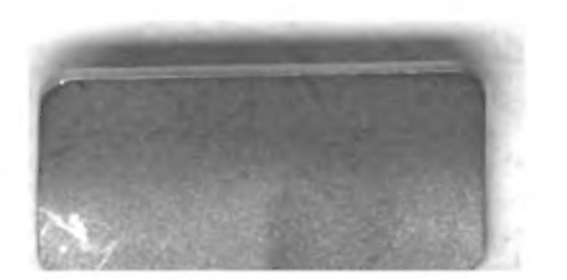
Digitized by Google

Math. P. 219^n

Heussi



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch der Geodäsie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Geodäsie.

Nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft

für

Feldmesser, Militärs und Architekten

bearbeitet

von

Jacob Heussi,

Dr. philos. und Oberlehrer am großherzoglichen Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Mit ungefähr 500 in den Text eingedruckten Figuren in Holzschnitt.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1861.

Digitized by Google

Xylographie und Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Vorwort.

Wie in jeder praktischen Wissenschaft, so bieten sich auch in der Geodäsie mehr als in allem theoretischen Wissen Fälle dar, welche selbst dem Geübtern als neu erscheinen, zu deren Lösung er daher augenblicklich, im Felde, während er an seinem Instrumente steht oder die aufzunehmende Gegend recognoscirt, die Mittel finden muß. Ein Lehrbuch kann unmöglich alle solche, theils aus besondern Terraingestaltungen, theils aus eigenthümlichen Combinationen der zu vermessenden Flächen, theils aus der Beschaffenheit der gebrauchten Instrumente und noch andern Ursachen herrührende Fälle berücksichtigen und erörtern, es bleibt schlechterdings kein anderes Mittel der Bewältigung solcher Schwierigkeiten, als die eigene Einsicht des Feldmessers, die durch Studium und Uebung erlangte Befähigung, sämmtliches geodätische Wissen innerhalb des Bereichs der niedern Feldmeßkunst völlig zu beherrschen. Dies schließt aber selbstverständlich ein gediegenes mathematisches Wissen in sich. Leider treffen wir dies nicht durchweg bei den Feldmessern an; gewöhnlich treten sie ihren Beruf mit spärlichen Kenntnissen hierin an, und nur wenn sie das Glück haben, einen tüchtig gebildeten Lehrherrn zu bekommen, pflegen sie ihre theoretischen Kenntnisse während der Lehrzeit noch einigermaßen zu vervollständigen. In diesem Stadium aber befinden sich solche angehenden Geodäten in der Regel in Verlegenheit, zu welchen Büchern sie ihre Zuflucht nehmen sollen, um sich zweckmäßig fortzubilden und die gerade zum Ziele führenden Hülfskenntnisse sowol als das eigentlich geodätische Wissen sich so anzueignen, daß sie beides zu ihrem vollen Besitze machen könnten, um ihre Methoden der Aufnahme mit Einsicht zu wählen und sich überhaupt in jedem vorkommenden Falle auf eine verständige Weise zu helfen. Sie suchen dann das eine in diesem, das andere in jenem Buche, welche die betreffenden Materien vielleicht nach so verschiedenen Stand- und Gesichts-

Digitized by Google

punkten behandeln, daß sie unmöglich alle für denselben Leser sich eignen können. Zu diesen Bemerkungen könnte ich eine Menge von Belegen aus dem Leben liefern, wenn solches noch nöthig wäre.

Da ich nun in unserer geodätischen Literatur, wenn man den Gegenstand nach diesen Gesichtspunkten betrachtet, eine Lücke fand, so entschloß ich mich auf das Zureden wohlmeinender Männer von Fach — freilich nach längerm Besinnen — den Versuch zu wagen, diese Lücke auszufüllen. Es geht nun schon aus dem Gesagten hervor, daß ich dahin gestrebt, ein Lehrbuch der Geodäsie zu liefern, worin der Studirende angeleitet würde, die Operationen des Aufnehmens und Vermessens mit voller Einsicht in sich zu verarbeiten und sie zu seinem geistigen Eigenthume zu machen, um jederzeit und in allen nur irgend vorkommenden Fällen sich mit Leichtigkeit zu orientiren, auch selbst ohne solche Fälle im einzelnen vorher schon theoretisch oder praktisch erörtert gesehen zu haben. Zugleich sollte das Lehrbuch alle mathematischen und physikalischen Hülfskenntnisse, welche nicht unbedenklich bei jedem Studirenden vorausgesetzt werden könnten, wenn auch nur in der Kürze, doch immer so behandelt liefern, daß jeder, mit gewöhnlichen Schulkenntnissen ausgerüstete junge Mann in dem hier anzunehmenden Alter und bei vorausgesetztem Fleiß und gutem Willen, sich leicht darin zu orientiren vermöchte. Da alles in diesen letztern Bereich Gehörige durchaus nur aus dem Gesichtspunkte der Anwendung in der Geodäsie behandelt ist, so macht es auch keine weitern Ansprüche auf Vollständigkeit. Man wird begreifen, daß die Bestimmung des Wieviel in diesem Punkte eine unbestimmte Aufgabe lösen hieß; der eine verlangt und bedarf in der That auch mehr, der andere weniger. Mancher meiner Leser würde wol gern noch eine Anleitung zum Studium der ebenen Trigonometrie mitgenommen haben. Aber das hätte mein Buch zu voluminös gemacht, und ich muß die, welche noch anderes, als was ich in diesen Bogen gegeben habe, bedürfen, auf die vielen mathematischen Lehrbücher verweisen, deren es manche sehr gute gibt *); nur eins möchte ich hinzufügen, daß für die Leser meines Buchs, die die Mathematik doch vorherrschend zum Zwecke der praktischen Anwendung studiren, Schriften von solchen Verfassern, welche sich selbst mit den praktischen Wissenschaften beschäftigt haben, denen der bloßen Theoretiker vorzuziehen sind, ohne diesen sonst irgendwie zu nahe treten zu wollen.

---

*) Für diesen Zweig der Mathematik kann ich mit Ueberzeugung empfehlen: Uhde, „Die ebene Trigonometrie" (Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1860).

Digitized by Google

Was nun den eigentlich geodätischen Theil meines Buchs anlangt, so habe ich gesucht, die Materien so zu ordnen, wie sie nach einer logischen Disposition dem Anfänger der Folge nach verständlich werden können, wie es denn auch bei der Behandlung der einzelnen Gegenstände mein stetes Bestreben war, dem Leser so klar als möglich zu werden. Dies hat oft, besonders bei der Beschreibung der Instrumente, seine großen Schwierigkeiten, und es dürfte dem Studirenden nicht genug anzurathen sein, stets danach zu trachten, die Instrumente, deren Bau und Einrichtung er studiren will, dabei in natura zur Hand zu haben. Sollten sie dann auch in Einzelheiten von den beschriebenen abweichen, so wird er doch sich leichter orientiren, als ohne eigene Anschauung. Ich habe zwar durch Zeichnung und Klarheit der Darstellung, durch Auseinanderhalten der Haupttheile und systematische Anordnung des Einzelnen in der Beschreibung alles gethan, was zur Verdeutlichung geschehen kann; aber eigene Anschauung geht über alles.

Es versteht sich von selbst, daß ich überall in der Instrumentenlehre die neuesten und bewährtesten Formen aus den besten Werkstätten beschrieben, ältere Instrumente überhaupt nur da aufgenommen habe, wo sie neben den neuern noch einige Geltung behalten haben, dagegen alle bloßen Raritätenstücke, welche der Rumpelkammer anheimgefallen, wie billig, mit Stillschweigen übergangen habe, um den Raum für Nützlicheres zu sparen. Bei den wichtigsten Instrumenten der Meßkunde, den Winkelmessern, mußte ich, meiner Ueberzeugung nach, den Erzeugnissen der Werkstatt von Breithaupt und Sohn in Kassel den Vorzug geben, ohne damit die anderer Künstler herabsetzen zu wollen; sie haben sich mir im Gebrauche als vorzüglich erwiesen. Es sind deshalb auch von einigen dieser Instrumente, von denen es mir nicht möglich war, Originalzeichnungen zu liefern, da mir die Instrumente selbst nicht zu Gebote standen, mit Herrn Breithaupt's Erlaubniß die Zeichnungen nach dessen lithographirten Tafeln angefertigt, da diese gewiß die beste Quelle dafür boten; während bei den Beschreibungen derselben alles berücksichtigt ist, was der Verfertiger selbst darüber angegeben hat.

Rücksichtlich der Grenzen, die ich einzuhalten für angemessen erachtete, ließ ich mich durch die unter dem 20. December 1854 publicirte und landesherrlich bestätigte „Feldmesserordnung für das Großherzogthum Mecklenburg-Schwerin" leiten, da einerseits hier zu Lande die Kammeringenieurs und deren Gehülfen nach den Bestimmungen dieses Gesetzes geprüft werden, andererseits aber, weil

diese Feldmesserordnung mir als die erschien, welche, von den mir bekannten, die meisten Anforderungen stellt, dieselben auch so bestimmt und klar ausspricht, daß jeder daraus erkennen kann, was er zum Examen braucht. Jedenfalls wird dann der Inhalt meines Buchs allen denen genügen, welche nach einem Reglement geprüft werden, das geringere Forderungen stellt. Das preußische Feldmesserreglement vom 1. December 1857 läßt leider die Angabe der Erfordernisse zu dem dortigen Examen vermissen. Bei einer vorurtheilsfreien Beurtheilung der mecklenburg-schwerinschen Feldmesserordnung wird man auch keineswegs die Forderungen zu hoch gestellt finden. Denn daß der Feldmesser seine Instrumente prüfen und berichtigen könne, ist eine so billige Forderung, daß man nicht einsieht, wie irgend eine Regierung den in ihrem Dienste stehenden Feldmessern dieselbe erlassen kann. Aber gerade diese Prüfung und Berichtigung der Instrumente führt zu den subtilsten mathematischen Untersuchungen, die manche der im ersten Abschnitte meines Buchs verhandelten Gegenstände der Hülfskenntnisse herbeigeführt haben. Ganz dasselbe muß von der Beurtheilung der Grenzen der Fehler in den Beobachtungen und von der Ausgleichung dieser Fehler gesagt werden. Nicht jede Aufnahme macht diese Rechnungen durchaus erforderlich; aber der Feldmesser soll sie machen können, damit er im Stande ist, sie da anzuwenden, wo sie nicht entbehrt werden können.

Schließlich bemerke ich, daß mein Buch nur die im §. 9 definirte niedere Geodäsie enthält; wer die höhere Geodäsie studiren will, muß die eigens darüber geschriebenen Werke, namentlich solche über specielle Länderaufnahmen, wie z. B. die von A. von Humboldt, Bessel u. a. studiren; durch vorherige Aneignung des Inhalts meines Buchs und tüchtige mathematische Kenntnisse wird es ihm leicht gelingen, diese ebenso interessanten wie lehrreichen Schriften zu verstehen.

Parchim, im Januar 1861.

Jacob Heussi.

Inhalt.

Einleitung.

Seite

§. 1. Begriff der Geodäsie oder Meßkunde 1
§. 2. Gestalt und Größe der Erde. Abplattung 1
§. 3. Verticale. Verticalebene. Barycentrischer Kern der Erde 2
§. 4. Entfernung zweier Verticalen von bestimmtem Winkel 2
§. 5. Horizontalebene. Horizont. Meeresspiegel; scheinbarer und wahrer Horizont. Zenith 2
§. 6. Horizontalweite. Geodätische Entfernung 3
§. 7. Darstellung des Gemessenen. Projection. Arten der Projection 4
§. 8. Horizontal- und Verticalprojection. Reduction auf den Horizont. Grund- und Aufriß 5
§. 9. Aufgabe der Geodäsie. Niedere und höhere Geodäsie. Feldmeßkunst und Landmeßkunst. Topographische und geographische Karten. Aufnahme, Vermessung 6
§. 10. Theile der Geodäsie 7

Erster Abschnitt.

Die unentbehrlichsten Hülfskenntnisse.

Erstes Kapitel.

Aus der Mathematik.

A. Aus der Analysis.

§. 11. 1. Methode der unbestimmten Coëfficienten 9
§. 12. 2. Recurrirende Reihen 11
§. 13. 14. 3. Binomialcoëfficienten 12
§. 15—19. 4. Der binomische Lehrsatz 14
§. 20. 5. Von den Potenzreihen 21

**

Digitized by Google

B. Aus der Geometrie.

Seite
§. 21—23. Die Transversalen und die harmonischen Verhältnisse 22

C. Aus der Trigonometrie.

§. 24. 1. Winkel- und Bogenmaß 27
§. 25. 2. Entwickelung der Sinus und Cosinus in Reihen 29
§. 26. 3. Ausdruck für den Bogen durch seinen Sinus 35

D. Aus der Differentialrechnung.

§. 27. 28. Ableitung einer Function 37
§. 29. 30. Differentialquotient 40
§. 31. Taylor'scher Lehrsatz 40
§. 32. Größte und kleinste Werthe der Functionen 41

E. Elemente der Coordinatentheorie.

§. 33. Bestimmung eines Punktes in der Ebene 43
§. 34. Coordinatenachsen. Abscissen. Ordinaten 45
§. 35. Polarcoordinaten 47
§. 36. Verwandlung der Polarcoordinaten in rechtwinkelige und umgekehrt 47
§. 37. Verwandlung der rechtwinkeligen Coordinaten 50
§. 38. Länge einer Linie durch ihre Coordinaten ausgedrückt 52
§. 39. Coordinaten des Halbirungspunktes einer Geraden 54
§. 40. Länge einer Geraden durch ihre Polarcoordinaten bestimmt 56
§. 41. Neigungswinkel einer Geraden mit den Coordinatenachsen 57
§. 42. 43. Den Neigungswinkel einer Geraden aus ihren Coordinaten zu finden 59
§. 44. Bequemerer Ausdruck für die Länge einer Geraden 62
§. 45. 46. Winkel zweier Geraden. Zusammenfassung aller Lagen unter drei Fälle 63
§. 47. Projection einer Geraden auf die Abscissenachse 69
§. 48. Coordinaten der Eckpunkte eines Linienzugs durch die Projectionen ausgedrückt 70
§. 49. Anwendung auf das geschlossene Polygon. Inhalt eines Linienzugs durch Coordinaten 74
§. 50. Inhalt eines Polygons durch Coordinaten 76
§. 51. Ableitung der trigonometrischen Dreiecksformeln aus diesen Resultaten 79

F. Auflösung der Dreiecke durch Reihen.

§. 52. Unzulänglichkeit der trigonometrischen Dreiecksformeln für sehr kleine Winkel 80
§. 53. 54. Entwickelung ausreichender Formeln für diese Fälle 81

Zweites Kapitel.

Aus der Physik.

A. Aus der Optik.

§. 55. Geradlinige Verbreitung des Lichts. Visiren 87
§. 56. Gesichtswinkel. Scheinbare Größe 88
§. 57. 58. Erleuchtung 88

B. Aus der Katoptrik.

Seite
§. 59. Zurückwerfung des Lichts. Spiegel 90
§. 60. Gesetze der Reflexion 90
§. 61. 62. Bilder in ebenen Spiegeln 91
§. 63. 64. Bilder in zwei gegen einander geneigten ebenen Spiegeln . . . 92

C. Aus der Dioptrik.

§. 65. Brechung des Lichts 94
§. 66. Gesetze der Brechung. Brechungsverhältniß 95
§. 67. Brechung durch parallele Ebenen 96
§. 68. Gang der Strahlen in parallelen Planspiegeln 96
§. 69. Prismatische Spiegel 98
§. 70. Totalreflexion 98
§. 71. Scheinbare Erhöhung der Gegenstände 99
§. 72. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung 100
§. 73. 74. Brechung im Prisma 101
§. 75. Glaslinsen 103
§. 76. Optischer Mittelpunkt bei Glaslinsen 104
§. 77. Brennpunkt. Gleichungen für die Brechung in Glaslinsen 106
§. 78. Construction und Berechnung der Bilder in Glaslinsen 110
§. 79. Bestimmung der Größe und Lage der Bilder 111
§. 80. 81. Sphärische Abweichung bei Linsen 112
§. 82. Farbenzerstreuung bei der Brechung 114
§. 83. Chromatische Abweichung 115
§. 84. Achromasie 116
§. 85. Dioptrische Instrumente, die in der Geodäsie gebraucht werden . . 117
§. 86. Die Lupe. Vergrößerung. Bau 117
§. 87. 88. Das Fernrohr. Einrichtung und Gebrauch 119
§. 89. Vergrößerung durch das astronomische Fernrohr 120
§. 90. Achromatisches Objectiv 121
§. 91. 92. Doppelocular. Collectivlinse 122
§. 93. Fadenkreuz, dessen Zweck und Einrichtung 125
§. 94. Prüfung und Berichtigung des Fernrohrs 128
§. 95. Behandlung eines Fernrohrs 132

D. Aus der Lehre vom Magnetismus.

§. 96. Magneteisenstein. Natürlicher Magnet. Magnetismus. Eigenschaften des Magnets. Pole. Künstlicher Magnet 136
§. 97. Anfertigung künstlicher Stahlmagnete 137
§. 98. Magnetnadel. Erdmagnetismus 137
§. 99. Magnetischer Meridian. Abweichung 138
§. 100. Magnetische Inclination 138
§. 101. Magnetische Linien auf der Erde 139

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Meßinstrumenten.

Seite
§. 102. Eintheilung der Instrumentenlehre 141

Erstes Kapitel.

Beschreibung von Vorrichtungen, welche in Verbindung mit mehreren Meßinstrumenten gebraucht werden.

A. Von den Maßen.

§. 103. Maßeinheit. Arten der Maße. Maßsystem 142
a. Längen-, Flächen- und Körpermaße.
§. 104. Versuche zur Auffindung eines Naturmaßes 142
§. 105. Maße verschiedener Länder 143
b. Winkelmaße.
§. 106. Sexagesimale und centesimale Theilung 147
§. 107. Verwandlung der Maße 147

B. Der Maßstab.

§. 108. Erklärung desselben. Verjüngung. Verjüngungsverhältniß der Flächen. Verjüngter Maßstab 149
§. 109. Wahl des Maßstabes. Berechnung des möglichen Verjüngungsverhältnisses 150
§. 110. Vorschriften über die Verjüngungsverhältnisse 152
§. 111. Transversalmaßstab 153
§. 112. Gebrauch des Transversalmaßstabes 154
§. 113. Formeln, den Maßstab betreffend 155
§. 114. Aufgaben über den Maßstab 156

C. Lineale.

§. 115. Stoff, Beschaffenheit und Größe derselben 159
§. 116. Prüfung und Berichtigung der Lineale 161

D. Der Nonius.

§. 117. Erklärung des Nonius oder Verniers 163
§. 118. Einrichtung und Arten des Nonius. Angabe 164
§. 119. Gebrauch des Nonius 165
§. 120. Ablesung, wenn kein Strich coincidirt 166
§. 121. Anwendung der Lupe zum Ablesen. Excedenz 167
§. 122. Nonius bei Kreistheilungen 168

E. Theilungen.

§. 123. Einrichtung der Theilungen. Mögliche Feinheit derselben 168
§. 124. Erhaltung getheilter Kreise 170
§. 125. Prüfung einer Kreistheilung 172

F. Die Schraube.

§. 126. Erklärung der Schraubenlinie und Schraube 173
§. 127. Größe der Steigung. Fehler 173

Digitized by Google

Seite
§. 128. Rechts und links gewundene Schrauben. Schraubenkopf. Schraubenzieher. Schraubenschlüssel 174
§. 129. Richtiger Gebrauch der Schraube 177
§. 130. Arten der Schrauben 177
§. 131. 1) Druckschrauben 178
§. 132. 2) Corrections-, Justir- und Stellschrauben 178
§. 133. 3) Schraube ohne Ende 180
§. 134. 4) Mikrometerschraube 180
§. 135. 5) Differentialschraube 181
§. 136. Winkelbestimmung mittels der Differentialschraube 182

G. Das Diopter.

§. 137. Gesichts- oder Visirlinie. Diopter 184
§. 138. Beschreibung der Diopter 184
§. 139. Prüfung der Diopter 185
§. 140. H. Das Senkloth 187

I. Die Libelle.

§. 141. Beschreibung und Arten der Libellen 188
§. 142. a. Röhrenlibellen. Beschreibung der Röhrenlibellen 188
§. 143. 144. Füllung und Verschluß, Scala 190
§. 145. Eintheilung der Libellen 191
§. 146. I. Libellen zur Horizontalstellung. 1) Die Libelle wird auf eine Ebene gesetzt 191
§. 147. 2) Die Libelle wird auf eine cylindrische Röhre gesetzt 192
§. 148. 3) Die Hängelibelle 193
§. 149. Ausschlag, Empfindlichkeit der Libelle 193
§. 150—152. Prüfung der Libelle 194
§. 153. Berichtigung 200
§. 154. II. Gebrauch der Libelle zum Messen kleiner Winkel 201
§. 155. 156. b. Dosenlibelle 202

Zweites Kapitel.

Instrumente zur Bezeichnung von Punkten im Felde.

§. 157. Absteckstäbe, Jalons, Stangen, künstliche und natürliche Signale, Pflöcke, Zeichenstäbe 203

Drittes Kapitel.

Instrumente zur Distanzmessung.

§. 158. 1. Meßstäbe, Meßruthen 205
§. 159. 2. Meßschnüre 205
§. 160. 3. Meßbänder 205
§. 161. Besondere Vorrichtungen zur genauen Distanzmessung 206
§. 162. Prüfung und Berichtigung der Maße 207
§. 163. Comparateur 208
§. 164. 4. Die Meßkette 211
§. 165. Prüfung und Berichtigung der Meßkette 212

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Instrumente zum Abstecken, Aufnehmen und Messen der Winkel.

Seite
§. 166. Verschiedene Fälle. Arten der Winkel 213

A. Instrumente zum Abstecken bestimmter Winkel.
§. 167. I. Das Winkelkreuz 214
§. 168. Prüfung desselben 215
§. 169. II. Die Winkeltrommel 215
§. 170. 171. III. Der Winkelspiegel 216
§. 172. Prüfung desselben 217
§. 173. 174. IV. Das Prismenkreuz 218
§. 175. 176. Prüfung und Gebrauch 221

§. 177. B. Instrumente zur graphischen Verzeichnung der Winkel 222
§. 178—184. I. Der Meßtisch 222
§. 185—188. Prüfung des Meßtisches 228
§. 189—190. II. Das Diopterlineal 232
§. 191. III. Die Kippregel 234
§. 192. Prüfung und Berichtigung der Kippregel 235
§. 193. Kippregel von Breithaupt und Sohn 238
§. 194. IV. Die Orientirboussole 239
§. 195. V. Die Feldboussole 240
§. 196. Prüfung und Berichtigung der Boussole 242
§. 197. Boussolen von Breithaupt und Sohn 243
§. 198. Gebrauch der Boussole 245

C. Instrumente zur Bestimmung der Winkel nach Gradmaß.
§. 199. I. Der Quadrant 247
§. 200. 201. Aufstellung und Prüfung des Quadranten 248
§. 202. II. Das Astrolabium 253
§. 203. Gebrauch des Astrolabiums 254
§. 204. III. Der Theodolit. Arten desselben 255
§. 205. 206. 1. Der einfache Theodolit 255
§. 207. Messung von Horizontal- und Höhenwinkeln 259
§. 208. 209. 2. Der Repetitionstheodolit 260
§. 210. Gebrauch desselben. Theorie der Repetition 266
§. 211. Prüfung des Theodoliten 269
§. 212. 213. Aufstellung und Behandlung des Theodoliten 276
§. 214. IV. Der Spiegelsextant 277
§. 215—217. Winkelmessung mit dem Sextanten 279
§. 218. Höhenparallaxe des Sextanten 282
§. 219. Prüfung und Berichtigung des Sextanten 283

D. Nivellirinstrumente.
§. 220. Arten derselben 285
§. 221—223. I. Die Nivellirlatte mit und ohne Zielscheibe 286
§. 224. II. Nivellirinstrumente mit Pendel oder Loth 287
Die Setzwage 289

Google

Seite
§. 225. Die Bergwage oder der Böschungsmesser 289
§. 226. Prüfung und Berichtigung 289
III. Röhreninstrumente.
§. 227. 1. Die Kanalwage. Prüfung 290
§. 228. 2. Die Quecksilberwage. Prüfung 291
§. 229. IV. Libelleninstrumente. Theile derselben 292
§. 230. 1. Das Nivellirdiopter. Prüfung und Berichtigung 293
§. 231. 2. Nivellirinstrument mit Fernrohr 294
§. 232. 3. Nivellirinstrument von Ertel und Sohn in München 294
§. 233. Prüfung und Berichtigung desselben 296
§. 234. 4. Breithaupt's großes Nivellirinstrument 298
§. 235. Prüfung und Berichtigung desselben 300
§. 236. Vorzüge dieser Construction 302
§. 237. 238. Noch andere Breithaupt'sche Constructionen von Nivellirinstrumenten 302
§. 239. Aufstellung und Berichtigung dieser Instrumente 304

Dritter Abschnitt.

Das Messen und Aufnehmen.

Erstes Kapitel.

Elementaraufgaben.

A. Grundaufgaben über das Abstecken und Messen der Linien und Winkel im Felde.

§. 240. Zwischen zwei zugänglichen Punkten eine gerade Linie abzustecken . 306
§. 241. Eine abgesteckte Gerade zu verlängern 307
§. 242. Eine auf ebenem Terrain abgesteckte Gerade zu messen. a. Mit Meßstäben. b. Mit der Meßkette 307
§. 243. 244. Mögliche Fehler der Kettenmessung 309
§. 245. Zu einer Geraden im Felde durch einen gegebenen Punkt ein Perpendikel abzustecken.
Erster Fall. Der Punkt liegt in der Geraden. 1. Mit der Meßkette. 2. Mit der Meßschnur. 3. Mit dem Meßtische. 4. Mit dem Winkelmesser. 5. Mit dem Winkelspiegel oder Winkelkreuz, der Winkeltrommel oder dem Prismenkreuz 313
Zweiter Fall. Der Punkt liegt außerhalb der Geraden. 1. Mit der Meßkette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Mit dem Winkelmesser. 4. Mit dem Winkelspiegel 2c. 314
§. 246. Einen durch die Gradzahl gegebenen Winkel auf dem Papier zu verzeichnen.
1. Mit dem halbkreisförmigen Transporteur. 2. Mit der Chordenscala oder dem geradlinigen Transporteur. 3. Mittels der trigonometrischen Tafeln 316

Seite

§. 247. Einen durch Zeichnung gegebenen Winkel in Graden und Theilen des Grades auszudrücken.

1. Durch den halbkreisförmigen Transporteur. 2. Durch die Chordenscala. 3. Mittels der trigonometrischen Tafeln . . . 317

§. 248. Einen im Felde abgesteckten Horizontalwinkel, dessen Schenkel zugänglich und übersehbar, auszumessen.

1. Mit der Meßkette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Mit dem Winkelmesser. 4. Mit Stab und Schnur . . . 318

§. 249. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer abgesteckten Geraden eine Parallele mit dieser abzustecken.

1. Durch zwei Perpendikel. 2. Durch gleiche Perpendikel. 3. Mit der Boussole. 4. Mittels eines entfernten Richtobjects . . . 320

§. 250. In einem gegebenen Punkte eine Gerade unter einem gegebenen schiefen Winkel an eine abgesteckte Gerade anzutragen.

Erster Fall. Der Punkt liegt in der Geraden.

a. Der Winkel ist durch Zeichnung gegeben. 1. Mit dem Meßtische. 2. Mit dem Winkelmesser.

b. Der Winkel ist im Gradmaß gegeben. 1. Mit dem Meßtische. 2. Mit dem Winkelmesser . . . 321

Zweiter Fall. Der Punkt liegt außerhalb der Geraden. (Vier Auflösungen) . . . 322

§. 251. Einen Verticalwinkel zu messen.

1. Mit dem Quadranten. 2. Mit dem Theodoliten. 3. Mit dem Spiegelsextanten . . . 322

§. 252. Ueber einer im Felde abgesteckten Geraden ein Quadrat zu beschreiben 323

§. 253. Ueber einer im Felde abgesteckten Geraden ein gleichseitiges Dreieck zu construiren . . . 323

§. 254. Einen Rhombus im Felde zu construiren, von dem die Seite und ein Winkel gegeben sind . . . 323

§. 255. Ueber einer im Felde abgesteckten Geraden ein regelmäßiges Achteck zu construiren . . . 324

§. 256. Um einen gegebenen Mittelpunkt ein regelmäßiges Achteck so zu construiren, daß eine Seite einer gegebenen Geraden parallel sei und der kleine Radius eine vorgeschriebene Größe habe . . . 324

§. 257. Durch drei im Felde gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben . . . 325

B. Zusammengesetztere Aufgaben über das Abstecken und Messen der Linien.

§. 258. Zwischen zwei im Felde gegebenen Punkten, die sich einer vom andern aus nicht anvisiren lassen, eine Gerade abzustecken. Zwei Auflösungen. . 325

§. 259. Eine Gerade zwischen zwei Punkten, zwischen welchen sich ein Wald befindet, abzustecken.

1. Mit der Kette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Trigonometrisch. 4. Durch Construction im Felde . . . 326

§. 260. Eine Gerade jenseit eines undurchsichtigen Hindernisses zu verlängern 328

Seite

§. 261. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade abzustecken, welche durch den Convergenzpunkt zweier abgesteckten Geraden geht, wenn der Convergenzpunkt unzugänglich und unsichtbar ist 329

§. 262. Die Horizontalweite zweier Punkte auf sehr unebenem Terrain zu messen.

1. Durch Staffelmessung. 2. Durch Reduction auf den Horizont 329

§. 263. Eine Gerade im Felde zu messen, die nicht ihrer ganzen Länge nach zugänglich ist.

Erster Fall. Es sind blos beide Endpunkte zugänglich. 1. Mit der Kette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Geometrisch. 4. Trigonometrisch. 330

Zweiter Fall. Es ist blos ein Endpunkt zugänglich. 1. Mit der Kette. 2. Durch Winkelmessung. 3. Geometrisch. 4. Mit dem Meßtische. 5. Durch geometrische Construction auf dem Plane. 6. Trigonometrisch . . 331

Dritter Fall. Es ist keiner der Endpunkte zugänglich. 1. Mit der Meßkette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Geometrisch. 4. Trigonometrisch. Allgemeines Verfahren für alle Fälle 333

§. 264. Durch einen außerhalb einer unzugänglichen Geraden gegebenen Punkt eine Parallele mit dieser abzustecken.

1. Geometrisch. 2. Trigonometrisch. 3. Mit der Kette. 4. Mit dem Meßtische. 5. Mit dem Winkelmesser. 335

§. 265. Eine Gerade zu messen, von der ein Theil unzugänglich ist, dagegen zu jeder Seite dieses Theils ein Stück gemessen werden kann, wenn überdies von einem außerhalb der Geraden liegenden Standpunkte aus die Winkel, unter welchen die drei Theile erscheinen, gemessen werden können.

1. Geometrisch. 2. Mit dem Meßtische. 3. Trigonometrisch 338

§. 266. Eine auf dem Papier verzeichnete unregelmäßig gekrümmte Linie im Felde abzustecken 339

§. 267. Eine im Felde bezeichnete unregelmäßig gekrümmte Linie in Grundriß zu legen. 340

§. 268. Die Länge einer im Felde bezeichneten unregelmäßig gekrümmten Linie im Felde zu bestimmen. 340

§. 269. Um einen im Felde gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis abzustecken 341

§. 270. Um einen gegebenen, aber unzugänglichen Mittelpunkt einen Kreis von gegebenem Radius abzustecken 341

C. Zusammengesetztere Aufgaben über das Messen der Winkel.

§. 271. Einen im Felde abgesteckten Horizontalwinkel auszumessen, wenn man vom Scheitelpunkte aus nur auf dem einen Schenkel messen, auf dem andern nur visiren kann. 342

§. 272. Einen schiefgeneigten Winkel auf den Horizont zu reduciren . . . 343

§. 273. Das Centriren der Winkel 345

§. 274. Den richtigen Winkel zu berechnen, wenn derselbe nicht genau an seinem Scheitelpunkte gemessen worden. 345

§. 275—277. Besondere Fälle dieser Aufgabe. 346

Digitized by Google

Zweites Kapitel.

Von den Beobachtungsfehlern geodätischer Messungen.

A. Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate der Rechnung.

Seite

§. 278. Fehler der durch Beobachtung gewonnenen Größen. Unvermeidliche oder zufällige Fehler . . . 348
§. 279. Fehlergrenzen in den Rechnungsresultaten . . . 349
§. 280. Einfluß der Fehler auf die Dreiecksformeln . . . 349
§. 281. Einfluß der Fehler auf die berechneten Seiten und Winkel . . . 351

B. Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

§. 282. Arten der vorkommenden Fehler . . . 361
§. 283. Arithmetisches Mittel . . . 362
§. 284. Werth der Fehler. Wahrscheinlichster Werth der beobachteten Größe. Methode der kleinsten Quadratsummen . . . 363
§. 285. Relativer Werth der Beobachtungen. Gewichte der Beobachtungen 364
§. 286. Abhängigkeit des Gewichts einer Beobachtung von der Genauigkeit der Beobachtung und von der Größe des wahrscheinlichen Fehlers. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der gemessenen Größen. Beispiele 365
§. 287. Winkelgleichungen. Seitengleichungen. Wahrscheinlichste Werthe der gemessenen Seiten berechnet . . . 374
§. 288. Anwendung der Formeln auf combinirte Dreiecke . . . 376

Drittes Kapitel.

Horizontalaufnahmen.

A. Aufnahme einzelner Punkte.

§. 289. Einschneiden. Vorwärts-, Seitwärts-, Rückwärtseinschneiden . . . 379
§. 290. Die Lage eines Punktes mittels zweier anderer bereits bekannten Punkte durch Vorwärtseinschneiden zu bestimmen.
1. Mit der Meßkette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Geometrisch. 4. Trigonometrisch . . . 380
§. 291. Die Lage eines Punktes mittels zweier anderer bereits bekannter, aber unzugänglicher Punkte zu bestimmen, wenn ein Punkt in der Verlängerung ihrer Verbindungslinie zugänglich ist.
1. Mit der Kette. 2. Mit dem Meßtische. 3. Trigonometrisch . . . 381
§. 292. Die Lage eines unzugänglichen Punktes mittels zweier schon bekannter Punkte zu bestimmen, wenn nur einer von diesen zugänglich ist, und die andern von ihm aus sichtbar sind.
1. Mit dem Meßtische. 2. Trigonometrisch . . . 382
§. 293. Die Lage eines Punktes mittels zweier schon bekannter Punkte zu bestimmen, wenn man sich nur seitwärts von der Verbindungslinie dieser beiden aufstellen kann.
1. Mit dem Meßtische. 2. Trigonometrisch . . . 383
§. 294. Mittels dreier schon bekannter Punkte die Lage eines vierten Punktes zu bestimmen, wenn nur letzterer zugänglich ist und von ihm aus nach den andern visirt werden kann. Pothenot'sches Problem.

Digitized by Google

Seite

1. Mit dem Meßtische. Fehlerzeigendes Dreieck. Verfahren, dasselbe möglichst zu verkleinern. Fortschaffung des fehlerzeigenden Dreiecks. (Fünf Methoden.) 2. Trigonometrisch. 3. Durch rechtwinkelige Coordinaten. 4. Geometrisch 384

§. 295. Specielle Fälle der vorigen Aufgabe 397

§. 296. Die Lage zweier Punkte mittels dreier schon bekannter Punkte zu bestimmen, wenn von jedem der zwei neuen Punkte aus immer nur zwei der alten Punkte nebst dem andern zu bestimmenden sichtbar sind und keine Linien gemessen werden können 398

B. Aufnahme ganzer Figuren.

Eigentliches Feldmessen.

§. 297. 1. Umfangs- oder Perimetermethode. 2. Diagonalmethode. 3. Dreiecks- oder Triangulirmethode. 4. Coordinatenmethode. 5. Polarmethode 401

§. 298. Die Mittagslinie eines gegebenen Punktes der Erde zu bestimmen. 405

§. 299. Eine kleinere Flur aufzunehmen. Das Recognosciren. Bestimmung des Maßstabes. Wahl der Methode der Aufnahme. Messung der Basis. Controle schon bestimmter Punkte. Aufnahme unzugänglicher Punkte. Aufnahme krummliniger Grenzen. Aufnahme der Details. Hand- oder Faustriß, Brouillon; Register oder Manual. Prüfung der Arbeit. Anfertigung des Risses. Bestimmung der Coordinaten der wesentlichen Punkte 406

§. 300. Eine größere Flur aufzunehmen.

1. Das Recognosciren. 2. Bestimmung der Basis und Netzpunkte. 3. Messung der Basis. 4. Aufnahme der Netzpunkte.

I. Geometrische Aufnahme des Netzes. a. Auf einem einzigen Blatte. b. Auf mehreren Blättern.

II. Trigonometrische Aufnahme des Netzes.

5. Auftragen des Risses vom Netze. 6. Aufnahme der Details. 7. Beispiel der Aufnahme einer Flur. Berechnung und Manual. 8. Prüfung der Aufnahme. 9. Einzeichnen der Mittagslinie 412

C. Berechnung des Flächeninhalts der Figuren.

§. 301. Zwei Methoden der Berechnung des Flächeninhalts 431

1. Berechnung des Flächeninhalts aus den gemessenen Größen.

§. 302. Den Inhalt eines Dreiecks aus den gemessenen Seiten und Winkeln zu bestimmen 432

§. 303. Den Inhalt eines Vierecks zu berechnen, wenn irgend fünf zu seiner Bestimmung ausreichende Stücke gegeben sind 432

§. 304. Den Inhalt eines Vierecks aus den Diagonalen und dem Winkel, unter welchem sich diese schneiden, zu bestimmen 432

§. 305. Den Inhalt eines beliebigen Vielecks durch Coordinaten zu berechnen 433

2. Inhaltsberechnung aus dem Grundrisse.

§. 306. Zerlegung der Figur in Trapeze 433

§. 307. Prüfung und Revision der Inhaltsbestimmung 434

3. Grad der Genauigkeit der Inhaltsbestimmung.

Digitized by Google

Seite

§. 308. Dreiecks- und Trapezformeln. Fehler in der Berechnung des Trapezes . . . 435
§. 309. Fehler in der Berechnung des Dreiecks . . . 436
§. 310. Gibt eine geneigte Fläche mehr Ertrag als ihre Horizontalprojection? 438

D. Verwandlung der Figuren.

§. 311. Wozu die Verwandlung der Figuren dient . . . 439
§. 312. Worauf die Verwandlung der Figuren beruht. Zwei Lehrsätze . . 439
§ 313. Ein Viereck in ein ihm gleichflächiges Dreieck zu verwandeln . . . 441
§. 314. Ein beliebig gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln . . . 442
§. 315. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln . . . 443
§. 316. Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln . . . 443
§. 317. Verwandlung von Ackerstücken in vorgeschriebene Formen . . . 444
§. 318. Ein Trapez in ein Rechteck mit gegebener Basis zu verwandeln . 444
§. 319. Ein beliebiges Vieleck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite der Lage, die andere der Größe nach gegeben ist . . . 445
§. 320. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite mit einer gegebenen geraden Linie parallel sei, während die andern beiden Seiten ihre Lage nicht ändern . . . 447

E. Theilung der Figuren.

§. 321. Theilung der Ackerstücke nach Bonität . . . 448
§. 322. Ein Dreieck durch Linien, die von einer Ecke auslaufen, in Theile von vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 448
§. 323. Ein Dreieck von einem in einer Seite liegenden Punkte aus nach gegebenem Verhältniß zu theilen . . . 450
§. 324. Ein Dreieck durch einen innerhalb desselben gelegenen Punkt nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 452
§. 325. Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer Seite desselben parallel laufen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 454
§. 326. Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer gegebenen Linie parallel laufen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 455
§. 327. Ein Viereck durch Linien, die von einer Ecke auslaufen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 457
§. 328. Ein Viereck durch Linien, die von einem in einer Seite liegenden Punkte ausgehen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 457
§. 329. Ein Viereck durch Linien, welche von einem innerhalb desselben gegebenen Punkte ausgehen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . 458
§. 330. Ein Trapez von einem in einer der parallelen Seiten liegenden Punkte aus nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 460
§. 331. Ein Trapez durch Linien, welche den parallelen Seiten parallel laufen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 461
§. 332. Von einem Trapeze ein Stück von gegebenem Inhalte so abzuschneiden, daß die Theilungslinie den parallelen Seiten parallel laufe . . 462
§. 333. Ein Viereck durch Linien, welche mit einer Seite desselben parallel laufen, nach vorgeschriebenem Verhältniß zu theilen . . . 467

Seite

§. 334. Ein Viereck ist durch eine Gerade in zwei Vierecke getheilt; man soll eine andere Gerade so ziehen, daß von jedem dieser beiden Vierecke Stücke von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden 470
§. 335. Von einer gegebenen unregelmäßigen Figur ein Stück von gegebenem Inhalte so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit einer gegebenen Geraden parallel laufe 473
§. 336. Im Innern eines Ackerstücks befindet sich ein Gewässer; das Ackerstück soll unter mehrere Interessenten so vertheilt werden, daß alle mit ihren Antheilen an das Wasser anstoßen 474
§. 337. Ein Grundstück enthält Acker von verschiedener Bonität; derselbe soll unter mehrere Interessenten nach gegebenen Werthverhältnissen getheilt werden 475
§. 338. An einem Grundstücke haben mehrere Interessenten Theil, ihre Antheile liegen aber zerstreut umher. Sie kommen überein, ihre zerstreut liegenden Aecker so auszutauschen, daß ein jeder das Seinige in einem Stück zusammen bekomme. Diese Permutation so durchzuführen, daß keiner der Interessenten Nutzen oder Schaden habe 477

Viertes Kapitel.

Verticalmessungen.

§. 339. Absolute und relative Höhe. Höhenmessung 486
§. 340. Höhenmessen, Hypsometrie; Nivelliren; trigonometrisches und barometrisches Höhenmessen 487

A. Das trigonometrische Höhenmessen.

§. 341. Die verticale Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn der Fuß desselben mit dem gewählten Standpunkte in einer Ebene liegt und zugänglich ist 487
§. 342. Die verticale Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn man an den Fuß desselben nicht herankommen kann 488
§. 343. Aus der bekannten Höhe eines Thurmes die directe Entfernung der Spitze von einem beliebigen Punkt der Ebene zu finden 488
§. 344. Aus der bekannten Höhe eines Thurmes die horizontale Entfernung eines Punktes von seinem von da aus unzugänglichen Fuße zu finden . . 489
§. 345. Die Höhen zweier Berge sind bekannt; die directe Entfernung beider Bergspitzen und die horizontale Entfernung der beiden von den Spitzen gefällten Lothe zu finden 489
§. 346. Die Höhe des obern Theils eines erhabenen Gegenstandes zu finden 489
§. 347. Die Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn sich nur eine vom Fußpunkte aus schief ansteigende Standlinie oder nur ein Theil einer solchen in einer Verticalebene mit dem Gegenstande messen läßt 490
§. 348. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn sich nur eine vom Fußpunkte aus schief absteigende Standlinie oder nur ein Theil derselben in derselben Verticalebene mit dem Gegenstande messen läßt 491

Digitized by Google

Seite

§. 349. Eine verticale Höhe zu messen, wenn man weder eine horizontale noch schiefe Standlinie, noch Theile davon in einer durch die zu messende Höhe gelegten Verticalebene benutzen kann 492

§. 350. Eine verticale Höhe zu messen, wenn man weder eine horizontale noch schiefe Standlinie, noch Theile davon in einer durch den Fußpunkt der Höhe gelegten Verticalebene benutzen, auch keine Hülfsstandlinie benutzen kann, die auch nur mit einem ihrer Endpunkte in der Horizontalebene des Fußpunktes läge 493

§. 351. Die Höhe eines senkrecht stehenden Gegenstandes ist bekannt; man soll von der Spitze desselben die Länge einer geraden Linie finden, welche mit dem Fuße in derselben Horizontalebene liegt 494

§. 352. Eine senkrechte Höhe kann aus drei in gerader Linie liegenden Standpunkten, die mit dem Fußpunkte der Höhe in derselben Horizontalebene liegen, gesehen werden; man soll die Höhe und die Entfernung der drei Standpunkte vom Fuße bestimmen 494

§. 353. Ein senkrecht stehender Gegenstand wird aus drei Standpunkten, die mit dem Fuße in derselben Horizontalebene liegen, gesehen. Man soll die Höhe des Gegenstandes und die Entfernung der drei Standpunkte von seinem Fuße bestimmen 496

§. 354. Behufs Anlage eines Tunnels die Höhe und Länge des Querschnitts eines Bergrückens zu finden, wenn die Spitze des Rückens zugänglich ist, aber im Thale kein Instrument an einer schicklichen Stelle aufgestellt werden kann 498

§. 355. Es soll die Höhe und Breite eines Berges unter der Voraussetzung gemessen werden, daß man von der Spitze aus nicht auf beiden Seiten nach dem Fuß sehen könne. 499

§. 356. Durch die Breite eines Berges soll ein Durchstich oder Tunnel gelegt werden. Das Terrain kann zwar auf beiden Seiten als horizontal angenommen werden, jedoch liegt es auf der einen Seite höher als auf der andern. Man soll die Breite und das Steigungsverhältniß finden. . 499

B. Einfluß der Krümmung der Erde auf die Verticalmessung.

§. 357. Correction wegen der Erhöhung des scheinbaren Horizonts über den wahren. 500

§. 358. Für die bekannte Entfernung zweier Orte die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über den wahren zu finden 502

C. Einfluß der terrestrischen Strahlenbrechung auf die Verticalmessungen.

§. 359. Correction wegen der Refraction 504

§. 360. Aus den scheinbaren gegenseitigen Zenithdistanzen zweier Orte und ihrer Entfernung von einander die Größe der Refraction zu bestimmen. . 505

§. 361. Aus den gegenseitigen scheinbaren Zenithdistanzen zweier Orte und ihrer Entfernung von einander die wahren Zenithdistanzen zu finden. . . 507

§. 362. Den rücksichtlich der Refraction verbesserten Höhenunterschied zweier Punkte zu finden. 508

Digitized by Google

Seite
§. 363. D. Reduction gemessener Höhenwinkel auf den richtigen Scheitelpunkt 515

E. Das Nivelliren.

§. 364. Nivellement. Zweck desselben 517
§. 365. Gefälle und Steigung. Arten der Nivellements 517
§. 366. Correction wegen der Krümmung der Erde 518
§. 367. Zwischen zwei gegebenen Punkten das Gefälle oder die Steigung zu finden 519
§. 368. Nivellementstabelle. Flußnivellements. Nivellements zum Zwecke des Straßenbaues. Längen- und Quernivellements 521
§. 369. Prüfung eines Nivellements 523

F. Berechnung des Auf- und Abtrags beim Straßenbau.

§. 370. Schwarze und rothe Zahlen 524
§. 371. Berechnung der rothen Zahlen 525
§. 372. Form der auf- und abzutragenden Erdmassen 526
§. 373. Berechnung derselben 527
§. 374. Berechnung der Böschungen und Gräben 530
§. 375. Mittlere Transportstrecken und Kostenberechnung des Auf- und Abtrags 531

Vierter Abschnitt.

Darstellung der Aufnahme durch Zeichnung.

§. 376. Karte, Horizontal- und Verticalprojection; Grund- und Aufrisse, Profile 534

Erstes Kapitel.

Abbildung der Horizontalaufnahmen.

§. 377. Topographische und geographische Karten 534
§. 378. Arten der topographischen Karten. Situationszeichnen 535
§. 379. Das Auftragen einer fertigen Aufnahme 535
§. 380. Kartenschrift. Art der Ausführung 536
§. 381. Ausführung in schwarzer Manier 536
§. 382. Ausführung in farbiger Manier 540

Zweites Kapitel.

Abbildung der Verticalaufnahmen.

§. 383. Zweierlei Darstellungsweisen der Verticalaufnahmen 542

A. Darstellung der Verticaldimensionen im Grundrisse. Bergzeichnen.

§. 384. Neigungswinkel einer Ebene. Neigungslinie. Abdachung, Böschung, Dossirung 542
§. 385. Niveaucurven. Höhenkoten 543
§. 386. Bestimmung der Höhenkote aus dem Grundrisse. Eintragen neuer Terrainpunkte. Einschalten neuer Niveaucurven 545

Digitized by Google

Seite
§. 387. Lehmann'sches Bergzeichnen 547
§. 388. Böschungsmaßstab; von Müffling's Generalstabsmanier 548
§. 389. Länge der Bergstriche 550
§. 390. Böschungsmesser 551
§. 391. Verschiedene Böschungsformen 552
§. 392. Theorie der Schluchten 554

B. Darstellung der Verticaldimensionen im Aufrisse. Berg- und Nivellementsprofile.

§. 393. Zeichnung des Profils aus dem Grundrisse 556
§. 394. Nivellementsprofil. Längen- und Querprofil. Maßstab der Längen und Höhen eines Profils 557

Anhang.

I. Amsler's Polarplanimeter 560
II. Der Orthograph von Pelz 567
III. Preisverzeichniß geodätischer Instrumente 571

Einleitung.

§. 1. Diejenige Wissenschaft, welche die Erdoberfläche oder beliebige Theile derselben ausmessen und durch Zeichnung darstellen lehrt, heißt praktische Geometrie, Meßkunde oder Geodäsie. Sie hat die erste Benennung davon erhalten, daß sie eine Anwendung der theoretischen Sätze der Geometrie ist, wiewol sie mit fast noch größerm Rechte eine Anwendung der Analysis genannt werden könnte, da, nach ihrem gegenwärtigen Zustande, ihre wissenschaftliche Begründung noch mehr analytischer als geometrischer Natur ist. Geodäsie, von γῆ, Erde, und δαίζω, ich theile, heißt Erdtheilung.

§. 2. Die Erde hat eine kugelähnliche Gestalt, ist aber nicht eine vollkommene Kugel; der Halbmesser r des Aequators beträgt nach den neuesten Messungen 3272077,14 Toisen oder 859,440 geographische Meilen, die halbe Achse ϱ 3261139,33 Toisen oder 856,566 geographische Meilen. *) Die Erde ist also ein Sphäroid, d. h. ein Körper, der durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entsteht. Der Unterschied der beiden Halbachsen beträgt 10937,81 Toisen oder 2,873 geographische Meilen, also $\frac{1}{299}$ der großen Halbachse; es ist also $\frac{r - \varrho}{r} = \frac{1}{299}$, und dieses Verhältniß heißt die Abplattung der Erde. Wegen des geringen Betrags dieser Größe läßt sich die Erde als eine Kugel ansehen, deren Halbmesser das arithmetische Mittel $\frac{r + \varrho}{2}$ beider

---

*) Diese Reduction der Toisen in geographische Meilen gründet sich auf die eben angegebene Größe der großen Halbachse der Erde nach Bessel. Heißt diese r, so ist die Länge eines Aequatorgrades $= \frac{r\pi}{180}$.

Nun ist: $\log r = 6{,}5148235$
$\log \pi = 0{,}4971499$
$\text{E.}\log 180 = 7{,}7447275$

$4{,}7567009$:

1° des Aequators = 57108,51 Toisen; aber 1° des Aequators = 15 geographische Meilen; also 1 Meile = 3807,23 Toisen.

Achsen r und ρ, nämlich = 3266608,23 Toisen oder 858 geographische Meilen ist.

§. 3. Vermöge der Schwere zieht die Erde alle außer ihr befindlichen Körper, die nicht zu entfernt sind, nach ihrer Oberfläche. Diejenigen geraden Linien, in welchen die Körper, wenn sie sich selbst überlassen sind, zur Erde fallen, heißen Verticalen, Lothe oder Lothrechte. Ihre Richtung wird an jedem Punkte der Erde durch ein dort aufgehängtes Senkblei angegeben. Jede durch eine Verticale gelegte Ebene heißt eine Verticalebene.

Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so müßten die Fallrichtungen schwerer Körper Normalen (Senkrechte) zur Oberfläche der Erde sein, also nothwendig ihren Convergenzpunkt im Mittelpunkte haben. Aus Gründen, deren Erörterung nicht hierher gehört, treffen sich bei der sphäroidisch gestalteten Erde die Fallrichtungen nicht genau in einem Punkte, ihre Durchschnitte schließen vielmehr einen körperlichen Raum ein, den man den barycentrischen Kern nennt, von βαρύς, schwer, weil er alle Schwererichtungen in sich vereinigt. Weil aber die Abplattung so gering ist, beträgt auch die Abweichung der Durchschnitte der Fallrichtungen vom Mittelpunkte der Erde nur wenig und kann in allen Rechnungen, welche sich auf die Messungen und Darstellungen der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben beziehen, vernachlässigt werden, d. h. man kann die Erde als vollkommene Kugel, die Fallrichtungen als Verlängerungen ihrer Radien, die sich alle im Mittelpunkte treffen, betrachten.

§. 4. Zwei Verticalen, die auf der Oberfläche der Erde 15 Meilen von einander abstehen, bilden am Mittelpunkte einen Winkel von 1°; und ist r der Erdhalbmesser, λ die Länge des Aequatorbogens zwischen zwei Verticalen, in demselben Maße ausgedrückt wie der Radius r, so findet man den dem Bogen λ entsprechenden Mittelpunktswinkel α durch die Proportion:

$$2r\pi : \lambda = 360^\circ : \alpha^\circ$$

oder

$$2r\pi : \lambda = 360 \cdot 60 \cdot 60'' : \alpha''$$

$$\alpha = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{r} \text{ Secunden,}$$

d. h. für

$$\pi = 3{,}1415926:$$

$$\alpha = 206264{,}8 \cdot \frac{\lambda}{r} \text{ Secunden.}$$

Für $\lambda = \frac{1}{4}$ Meile erhält man $\alpha = 1$ Minute. Verticalen, die auf der Oberfläche der Erde $\frac{1}{4}$ Meile von einander entfernt sind, können also noch als parallel angesehen werden.

§. 5. Eine Ebene, welche zu einer Verticalebene oder auch zu einer verticalen geraden Linie, also zu den Fallrichtungen schwerer Körper senkrecht steht,

heißt eine **Horizontalebene**, und jede in ihr gezogene Gerade eine **Horizontale**. Denkt man sich nun an irgend einem Orte der Erde die zu der Verticalen dieses Ortes gehörige Horizontalebene als Berührungsebene zur Erdoberfläche, rings um den Ort herum bis ins Unendliche sich erstreckend, so heißt solche Ebene der **Horizont** dieses Ortes. Da die festen Theile der Erdoberfläche zufällige und unregelmäßige Erhöhungen und Vertiefungen haben, so stellt eigentlich nur die ruhende Meeresoberfläche, die wegen ihrer Flüssigkeit den Schwerkräften ihrer Theile folgen kann, die Gestalt der Erde dar, wie sie ohne diese Unregelmäßigkeiten wäre, z. B. wenn die Erde ganz flüssig oder doch ganz und gar mit Wasser bedeckt wäre. Der Horizont irgend eines Punktes der Meeresoberfläche fällt daher in diesem Punkte mit dem Meeresspiegel zusammen, während der eines Punktes des Festlandes bald weiter, bald weniger weit vom Mittelpunkte der Erde entfernt ist als dieser. Ein Punkt, der weiter vom Mittelpunkte der Erde absteht als ein anderer, heißt **höher** als dieser, dieser **tiefer** als jener. Unter dem **Meeresspiegel** versteht man den Horizont eines Punktes der Erdoberfläche unter der Voraussetzung einer regelmäßigen Gestalt der Erde. Der Horizont eines Punktes des Festlandes liegt in den meisten Fällen höher oder tiefer als der Meereshorizont desselben Ortes. Die an einen Punkt der kugelförmig gedachten Erde gelegte Berührungsebene, welche oben schlechthin der Horizont genannt wurde, heißt eigentlich der **scheinbare Horizont** jenes Punktes, die Erdoberfläche selbst der **wahre**. Je mehr man sich von jenem Punkte in der Horizontalebene oder in der Erdoberfläche entfernt, desto mehr weicht der scheinbare Horizont vom wahren ab, d. h. der scheinbare Horizont erhebt sich immer mehr über den wahren.

Denkt man sich die Verticale eines Ortes bis an das scheinbare Himmelsgewölbe verlängert, so heißt sie die **Scheitellinie**, ein beliebiger Punkt in ihr das **Zenith** oder der **Scheitelpunkt** des Ortes.

§. 6. Die gegenseitige Entfernung zweier Orte der Erdoberfläche, in der Horizontalebene gemessen, heißt die **Horizontalweite** dieser Orte; die in dem Bogen eines größten Kreises *) auf der Erdoberfläche selbst gemessene Entfernung derselben Orte heißt ihre **wahre** oder **geodätische Entfernung**. Die Horizontalweite zweier Punkte A, B (Fig. 1) ist die Sehne AB, die sich in dem durch die beiden Punkte bestimmten größten Kreis der Erde zwischen diesen Punkten ziehen läßt; ihre wahre Entfernung der zwischen A und B gelegene Bogen der Erdkrümmung. Ist $AC = r$ der Erdhalbmesser, $ACB = \alpha$

Fig. 1.

*) Ein **größter Kreis** einer Kugel ist ein solcher, der in der Kugeloberfläche liegt und dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

der Mittelpunktswinkel zum Bogen AB, so ist die Größe des Bogens (nach §. 4):

in Graden: $\lambda = \frac{r \pi \alpha}{180} = \frac{r \alpha}{57,2957804}$;

in Minuten: $\lambda = \frac{r \pi \alpha}{180 \cdot 60} = \frac{r \alpha}{3437,7468}$;

in Secunden: $\lambda = \frac{r \pi \alpha}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{r \alpha}{206264,8}$.

Dagegen ist die diesem Bogen zugehörige Sehne

$$s = 2 r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Heißt δ der Unterschied zwischen dem Bogen und seiner Sehne, so ist, wenn man noch in dem Ausdrucke in Secunden $\frac{1}{206264,8}$ in einen Decimalbruch = 0,000004848136 verwandelt,

$$\delta = \lambda - s = r \left(0,000004848136 \cdot \alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right),$$

oder in Graden:

$$\delta = r \left(0,01745329 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Für den Erdhalbmesser r = 858 Meilen (§. 2) und $\alpha = 1°$ erhält man:

$$\delta = 0,00025 \text{ Meilen} = 6 \text{ Fuß} = 864 \text{ Linien}.$$

Wäre die Karte im Maßstabe von $\frac{1}{4000}$ der natürlichen Größe angefertigt, so betrüge die Differenz δ auf der Karte 0,216 Linien, eine Größe, die allemal vernachlässigt werden könnte, ohne der Genauigkeit der Karte Eintrag zu thun. Bei Entfernungen von der angegebenen Größe kann man also ohne merklichen Fehler in den Darstellungen der Theile der Erdoberfläche die Horizontalweiten statt der wahren Entfernungen nehmen. Für die Maße der Entfernungen dürfte dies jedoch nicht über 5 Meilen auszudehnen sein, da der Unterschied hier schon 2 Zoll beträgt.

Für die Höhenverhältnisse treten in diesem Punkte noch ganz andere Bedingungen ein, was seinen Grund in der Erhebung des scheinbaren Horizonts über den wahren hat, wie (in Fig. 1) Ac in der Entfernung Ab von A schon um die Größe bc über die Erdoberfläche erhoben ist. Wir werden weiterhin auf diesen Gegenstand zurückkommen, und mag es hier genügen, vorläufig darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß bei Höhenmaßen nicht unbedingt die Horizontalweite statt der wahren Entfernung gesetzt werden darf.

§. 7. Neben dem Ausmessen gegebener Theile der Erdoberfläche hat die Geodäsie es wesentlich auch mit der Darstellung des Gemessenen durch Zeichnung

zu thun. Man kann Gegenstände auf ebenen und gekrümmten Flächen darstellen. Die Geodäsie bedient sich dazu stets der ebenen Flächen. Ein Bild eines Punktes auf einer Ebene ist derjenige Punkt, in welchem die Ebene (Bildfläche) von einer durch das in beliebiger Lage angenommene Auge und den gegebenen Punkt geführten Geraden getroffen wird. Ist (Fig. 2) A das Auge, a ein Punkt und MN eine Ebene in der Richtung Aa, so ist α das Bild von a. Die Ebene könnte natürlich auch zwischen dem Auge und dem gegebenen Punkte a angenommen werden. Ebenso wie α von a, sind β, γ die Bilder von b, c, und αβγ das Bild des Gegenstandes abc für die in A angenommene Lage des Auges und

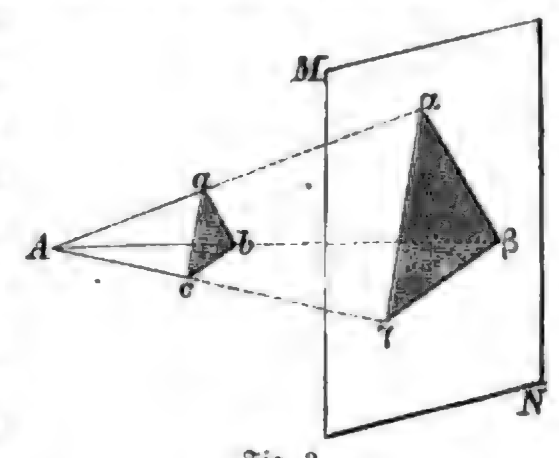


Fig. 2.

den hier gewählten Ort der Ebene MN. Versetzte man das Auge anderswohin, während a, b, c und die Ebene MN ihre Lage beibehielten, so fielen die Bilder α, β, γ an andere Stellen der Bildfläche MN. Die Punkte α, β, γ auf der Zeichenebene MN heißen die **Projectionen** der Punkte a, b, c; a, b, c sind auf MN **projicirt**; die Geraden Aα, Abβ, Acγ heißen **projicirende Linien**, MN wird die **Projectionsebene** genannt. Jedes Bild eines Gegenstandes ist also die Projection des Gegenstandes auf die Ebene des Bildes, für eine gewisse Lage des Auges und der Projectionsebene. Da man diesen verschiedene Lagen geben kann, so gibt es auch verschiedene Arten der Projection. Projicirt man, wie in Fig. 2, alle Punkte eines Gegenstandes von demselben Augenpunkte aus, d. h. behält das Auge stets dieselbe Lage, so heißt das so gewonnene Bild des Gegenstandes eine **perspectivische Projection**. Denkt man sich aber das Auge in unendlicher Ferne, so daß die projicirenden Linien Aaα, Abβ, Acγ alle als unter einander parallel angesehen werden können, und steht die Projectionsebene senkrecht gegen die projicirenden Linien, so heißt das so entstehende Bild eine **orthographische Projection**. In Fig. 3 stellt αβγ die orthographische Projection des Gegenstandes abc auf die Ebene MN vor. Man erhält dasselbe Bild, wenn man von a, b, c die Lothe aα, bβ, cγ auf die Projectionsebene MN fällt; das Auge wird dann in jeder der Verlängerungen von αa, βb, γc, nämlich in A′, A″, A‴ gedacht.

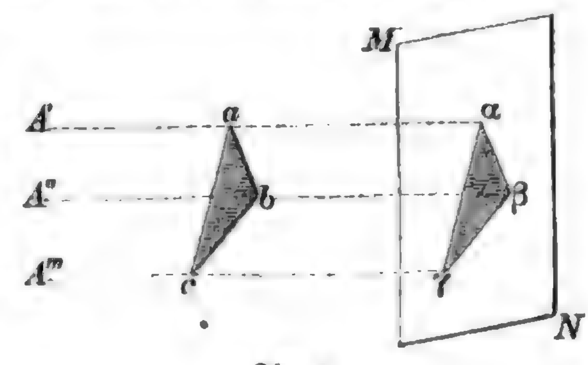


Fig. 3.

§. 8. Ist bei der orthographischen Projection die Projectionsebene der Horizont, so heißt die Zeichnung eine **Horizontalprojection**; ist die Pro-

jectionsebene vertical, so heißt die Zeichnung eine Verticalprojection. Von einer Linie oder Figur auf der Erdoberfläche die Horizontalprojection darstellen heißt, sie auf den Horizont reduciren. Die Horizontalprojection heißt ein Grundriß, Plan oder eine Karte der projicirten Fläche, die Verticalprojection ein Aufriß, Profil oder eine Höhenkarte.

§. 9. Es ist somit Aufgabe der Geodäsie, einen gegebenen Theil der Erdoberfläche dem Maße nach zu bestimmen und eine Horizontal- oder Verticalprojection davon anzufertigen. Die Geodäsie bedient sich hierzu stets der orthographischen Projection. Diejenige orthographische Projection jedoch, die man auf die in §. 7 beschriebene Weise erhält, ist an Größe der gegebenen Fläche gleich, sie ist eine Projection in natürlicher Größe, eine natürliche Projection; die Zwecke aber, für welche Karten bestimmt sind, fordern ein Bild nach einem verkleinerten Maßstabe, das jedoch jener natürlichen Projection vollkommen ähnlich ist. Der zweite Theil der Aufgabe der Geodäsie muß also nun so gefaßt werden: aus den durch directe Messung gewonnenen Daten von einer Erdstrecke ein der natürlichen Projection ähnliches Bild nach einem kleinern Maßstabe zu entwerfen.

Es kann aber die natürliche Projection eines größern Theils der Erdoberfläche der durch sie dargestellten Fläche nicht mehr vollkommen ähnlich sein, weil in der Horizontalprojection stets Horizontalweiten statt der wahren Entfernungen genommen werden und diese über eine Entfernung von 5 Meilen hinaus jenen nicht gleich gerechnet werden dürfen (§. 6); daher kann denn auch die verkleinerte Projection der natürlichen Fläche nur bis auf die genannte Entfernung annähernd ähnlich werden, wie man dies aus Fig. 4 auch noch deutlich sieht, wo ABD auf die Horizontalebene MN projicirt ist; der Bogen Bm hat zur Projection die Gerade Bm′, der Bogen Bn dagegen Bn′; aber diese Projectionen verhalten sich nicht wie die Bogen selbst, weil diese sich nicht wie ihre Sehnen verhalten; bis auf Bogenlängen von 5 Meilen ist indeß der Unterschied bei einem Radius wie der der Erde verschwindend klein. Die orthographische Projection liefert also der Natur ähnliche Bilder nur bis auf Strecken von ungefähr 5 Meilen; je kleiner der Maßstab, desto unbeträchtlicher werden natürlich die Abweichungen auch auf größere Entfernungen. Für größere Länderstrecken muß man eine andere Projectionsmethode anwenden; nicht weniger müssen bei der Messung und bei den Berechnungen größerer Länder, wo die Krümmung der Erde in Betracht kommt, Rücksichten genommen werden, welche eine wesentliche Abänderung auch dieser Methoden zur Folge haben. Man theilt daher die Geodäsie in eine niedere und höhere, je nachdem man von der Krümmung der Erde absehen

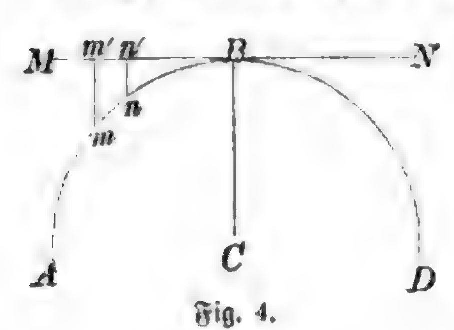


Fig. 4.

darf oder sie in Betracht ziehen muß. Die niedere Geodäsie enthält übrigens die Elemente, auf denen die höhere basirt ist. Unter den Elementen der Geodäsie verstehe ich daher lediglich die niedere Geodäsie.

Die niedere Geodäsie, welche also nur auf die Vermessung kleinerer Flächen anwendbar ist, betrachtet solche Flächen stets als Ebenen, während die höhere Geodäsie, welche Erdstrecken von beliebiger Ausdehnung mißt und durch Zeichnung darstellt, auf die Krümmung der Erde Rücksicht nimmt. Die niedere Geodäsie heißt Feldmeßkunst, die höhere Landmeßkunst. Die Karten, welche jene liefert, heißen topographische Karten, die, welche diese gibt, geographische oder Landkarten.

Eine Karte von einem kleinern oder größern Landstriche auf Grund der dazu nöthigen Messungen anfertigen, heißt das Land aufnehmen oder vermessen; die dazu erforderlichen Messungen, Berechnungen und zur Anfertigung der Karte nöthigen Arbeiten heißen die Aufnahme oder Vermessung, welche, je nach der Art der Karte, selbst eine topographische oder geographische ist.

§. 10. Um von einer vorgeschriebenen Erdstrecke eine Karte anzufertigen und die geforderten Zahlenverhältnisse kennen zu lernen, müssen wenigstens so viele Linien und Winkel direct gemessen werden, als zur geometrischen Bestimmung der Figur und der im Innern derselben aufzunehmenden Punkte unumgänglich nöthig sind. Auf Grund der so gewonnenen Maße kann die Figur erst gezeichnet, d. h. die Aufnahme ausgeführt werden. Die Geodäsie oder Meßkunde hat also zwei Theile:

1) Die Lehre vom Messen der Linien und Winkel;
2) Die Lehre vom Aufnehmen.

Die Geodäsie ist aber eine angewandte Wissenschaft, zu deren Erlernung manche anderweitige, besonders mathematische und physikalische Kenntnisse erforderlich sind. Um allgemein verständlich zu werden, wird das Lehrbuch der Geodäsie alle die Lehren aus den Hülfswissenschaften entwickeln müssen, welche nicht unbedenklich bei jedem Lernenden schon vorausgesetzt werden dürfen. Ein Theil des Lehrbuchs muß daher der Erörterung dieser Hülfskenntnisse gewidmet sein.

Man bedient sich ferner bei allen Messungen verschiedener, zum Theil sehr zusammengesetzter Instrumente, deren Bau, Zweck und Gebrauch dem angehenden Feldmesser gleichfalls bekannt werden müssen. Das Lehrbuch muß demnach auch hierüber die nöthige Auskunft geben.

Wenn man nun auch unter der Aufnahme einer Gegend im weitern Sinne des Wortes die zwei von einander gesonderten Geschäfte der Messung und der Zeichnung versteht, so wollen wir doch, um an sich Fremdartiges möglichst aus einander zu halten, diese zwei Geschäfte in besondern Abschnitten des Lehrbuchs behandeln und, um nicht neue Benennungen ohne Noth einzu-

führen, das Wort „Aufnehmen" hier in dem engern Sinne des Messens einer vorliegenden Fläche und des Berechnens der gemachten Messungen verstehen. Mit Berücksichtigung alles dieses bekommt denn das Lehrbuch folgende Abschnitte:

I. Die unentbehrlichsten Hülfskenntnisse.
II. Die Lehre von den Meßinstrumenten.
III. Die Lehre vom Messen und Aufnehmen.
IV. Die Darstellung der Aufnahmen durch Zeichnung.

Erster Abschnitt.

Die unentbehrlichsten Hülfskenntnisse.

Erstes Kapitel.

Aus der Mathematik.

A. Aus der Analysis.

1. Methode der unbestimmten Coëfficienten.

§. 11. Ein Ausdruck heißt eine Function eines andern, wenn der Werth des ersten sich mit dem des zweiten ändert oder von diesem abhängig ist. Der Ausdruck 2^x ist von dem Werthe von x abhängig, da, wenn x nach einander die Werthe 1, 2, 3, 4 .... annimmt, 2^x die Werthe 2, 4, 8, 16 .... bekommt. 2^x ist also eine Function von x. Ebenso sind ax, x^n u. s. w. Functionen von x, und zwar abhängige Functionen von x, während z. B. $\frac{ax}{bx}$, $\sqrt[x]{a^x}$ vom Werthe von x unabhängig sind. Um allgemein anzudeuten, daß ein Ausdruck eine Function eines andern x sei, ohne die Art der Abhängigkeit ausdrücken zu wollen, bezeichnet man solchen Ausdruck mit $F(x)$, oder $f(x)$, oder $\varphi(x)$, wo man indeß statt F, f, φ sehr wohl auch andere Buchstaben wählen kann. x heißt der Veränderliche oder Variable der Function.

Die Functionen können, wie die eben angeführten Beispiele, in einfacher Form ausgedrückt sein, so daß sie nur eingliederige Ausdrücke, Mononome bilden; sie können aber auch zusammengesetzte, vielgliederige Ausdrücke, Polynome bilden, wie z. B. $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$ Am häufigsten kommen zusammengesetzte Functionen in der Form dieses Beispiels vor, wo die Glieder die auf einander folgenden Potenzen des Veränderlichen enthalten. Eine Function von x heißt vom nten Grade, wenn x^n die höchste darin vorkommende Potenz von x ist.

Lehrsatz 1. Wird eine Function

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

des Veränderlichen x für jeden Werth von x, oder, wenn die Function vom mten Grade ist, auch nur für mehr als m Werthe von x zu Null, so muß jeder der Coëfficienten A, B, C, D .... von x für sich gleich Null sein.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist:

1) $$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots. = 0$$

für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$; für diesen Werth liefert aber der Ausdruck (1):

$$A = 0.$$

Und wenn $A = 0$, so ist die Gleichung (1) gleichbedeutend mit:

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots. = 0,$$

oder, wenn man durch x wegdividirt, mit:

$$B + Cx + Dx^2 + \ldots. = 0.$$

Ebenso schließend wie oben gibt diese Gleichung für $x = 0$:

$$B = 0,$$

also auch $$Cx + Dx^2 + \ldots. = 0,$$

oder: $$C + Dx + \ldots. = 0,$$

woraus man durch dieselben Schlüße, wie oben, erhält:

$$C = 0,$$

und dann auch: $D = 0$ u. s. w.

Ist die Function vom mten Grade, so hat sie $m + 1$ Glieder und ebenso viele Coëfficienten A, B, C .... Wird sie dann auch nur für $m + 1$ Werthe von x zu Null, so reichen diese gerade hin, sämmtliche $m + 1$ Coëfficienten zu bestimmen.

Lehrsatz 2. Sind die zwei Functionen von x:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

und $$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

für jeden Werth von x, oder, falls sie vom mten Grade sind, auch nur für $m + 1$ Werthe von x einander gleich, so sind die einzelnen Coëfficienten derselben Potenzen von x beziehlich einander gleich, d. h. es ist:

$$A = a,\ B = b,\ C = c,\ D = d \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Nach der Voraussetzung ist für jeden Werth von x:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots. = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.,$$

also auch: $(A - a) + (B - b)x + (C - c)x^2 + (D - d)x^3 + \ldots. = 0$

für jeden Werth von x, also nach Lehrsatz 1:

$$A - a = 0, \quad B - b = 0, \quad C - c = 0, \quad D - d = 0 \text{ u. s. w.}$$

oder $$A = a, \quad B = b, \quad C = c, \quad D = d \text{ u. s. w.}$$

Dieser Sätze bedient man sich besonders, um Ausdrücke in der Form von Reihen, die nach ganzen Potenzen von x fortlaufen, zu entwickeln und das Verfahren heißt dann die Methode der unbestimmten Coëfficienten.

2. Recurrirende Reihen.

§. 12. Um den Quotienten:

$$\frac{A}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + nx^n}$$

in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln, setze man:

$$\frac{A}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + nx^n} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots,$$

wo α, β, γ, δ.... unbestimmte, d. h. noch zu bestimmende Coëfficienten sind. Multiplicirt man nun die Reihe rechts mit dem Divisor links, so muß das Product dem Dividendus A gleich sein, weil die Reihe rechts den Werth des Ausdrucks links ausdrücken soll. Diese Multiplication gibt:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \ldots \\ \quad + a\alpha x + a\beta x^2 + a\gamma x^3 + a\delta x^4 + a\varepsilon x^5 + \ldots \\ \quad\quad + b\alpha x^2 + b\beta x^3 + b\gamma x^4 + b\delta x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad + c\alpha x^3 + c\beta x^4 + c\gamma x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad\quad + d\alpha x^4 + d\beta x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad + e\alpha x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + \ldots \text{ic.}\end{array}\right\} = A$$

$$\alpha + (\beta + a\alpha)x + (\gamma + a\beta + b\alpha)x^2 + (\delta + a\gamma + b\beta + c\alpha)x^3 + (\varepsilon + a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha)x^4 + (\zeta + a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha)x^5 + \ldots = A.$$

Da letztere Gleichung für jeden Werth von x stattfinden muß, so muß:

$$\alpha = A$$

sein, und da der Ausdruck rechts kein x enthält, so muß ferner:

$$\begin{array}{l}\beta + a\alpha = 0, \\ \gamma + a\beta + b\alpha = 0, \\ \delta + a\gamma + b\beta + c\alpha = 0, \\ \varepsilon + a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha = 0, \\ \zeta + a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha = 0 \text{ u. s. w.}\end{array}$$

sein. Daraus entwickelt man folgende Gleichungen:

$$\alpha = A$$
$$\beta = -a\alpha$$
$$\gamma = -a\beta - b\alpha$$
$$\delta = -a\gamma - b\beta - c\alpha$$
$$\varepsilon = -a\delta - b\gamma - c\beta - d\alpha$$
$$\zeta = -a\varepsilon - b\delta - c\gamma - d\beta - e\alpha$$
$$\eta = -a\zeta - b\varepsilon - c\delta - d\gamma - e\beta - f\alpha \text{ u. s. w.}$$

Man wird hier leicht das Gesetz heraussehen, nach welchem die Unbekannten aus den Coëfficienten gebildet werden müssen; jede Unbekannte wird gefunden, wenn man die vorhergehenden der Reihe nach mit den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Coëfficienten der Potenzen von x multiplicirt, und zwar, die nächst vorhergehende Unbekannte mit dem Coëfficienten von x in der ersten Potenz, die zweitvorhergehende mit dem Coëfficienten von x^2 u. s. w., während die erste Unbekannte α gleich dem Zähler des gegebenen Quotienten ist.

Dieser Satz enthält die Elemente der Theorie der recurrirenden Reihen.

---

3. Binomialcoëfficienten.

§. 13. Das Product

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots . n$$

von n Factoren, von denen der erste 1 und jeder folgende um 1 größer als der nächstvorhergehende, also der letzte = n ist, bezeichnet man durch

$$n!$$

spricht dieses aus: „n Facultät", und nennt den Ausdruck n! auch eine Facultät.

Es ist demnach: $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; aber $o!$ hat keine Bedeutung.

Es ist ferner:

1) $$n!\,(n+1) = (n+1)!$$

2) $$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

3) $$n \cdot (n-1)! = n!$$

4) $$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

5) $$\frac{(m+n)!}{m!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . m\,(m+1) \ldots . (m+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . m}$$
$$= (m+1)\,(m+2) \ldots . (m+n).$$

§. **14.** Den Ausdruck:

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{n!}$$

bezeichnet man durch x_n, gelesen: „x unten n" und nennt ihn einen Binomialcoëfficienten, x die Basis, n den Zeiger oder Index des Binomialcoëfficienten. Der Binomialcoëfficient x_n bezeichnet also einen Quotienten, dessen Zähler ein Product aus so viel Factoren ist, als der Zeiger n anzeigt, der erste Factor dieses Products ist die Basis x, jeder folgende um 1 kleiner als der vorhergehende, der Nenner des Quotienten aber ist die Facultät des Zeigers.

Hieraus folgt sogleich:

1) $$\frac{(m+n)!}{m!\;n!} = (m+n)_m = (m+n)_n.$$

Denn nach §. 13, 5 ist:

$$\frac{(m+n)!}{m!\;n!} = \frac{(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n)}{n!}$$
$$= \frac{(m+n)\,(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots[m+n-(n-1)]}{n!}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist ein Product aus n Factoren, wovon der erste $m+n$, jeder folgende um 1 kleiner als der vorangehende u. s. w., also ist der ganze Ausdruck $=(m+n)_n$.

Es ist aber auch $\frac{(m+n)!}{m!\;n!} = \frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m)}{m!}$

$$= \frac{(n+m)\,(n+m-1)\,(n+m-2)\ldots[n+m-(m-1)]}{m!}$$
$$= (n+m)_m = (m+n)_m.$$

2) $m_1 = m.$

3) $m_m = 1 = m_0.$

4) $m_{m+1} = m_{m+2} = \ldots = m_{m+p} = 0.$

5) $x_{n+1} + x_n = (x+1)_{n+1}.$

Denn es ist:

$$x_{n+1} = \frac{x(x-1)\,(x-2)\ldots[x-n]}{(n+1)!} = \frac{x(x-1)\ldots[x-(n-1)]\cdot(x-n)}{(n+1)!}$$

$$x_n = \frac{x(x-1)\,(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{n!} = \frac{x(x-1)\ldots[x-(n-1)]\cdot(n+1)}{(n+1)!}$$

Also $x_{n+1} + x_n = \frac{x(x-1)\,(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{(n+1)!}\cdot(x-n+n+1)$

$$= \frac{(x+1)\,x\,(x-1)\ldots[x-(n-1)]}{(n+1)!} = (x+1)_{n+1}.$$

6) $(-n)_2 = \frac{-n(-n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
$= (n+1)_2$.

7) $(-n)_3 = \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$= -\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$
$= -(n+2)_3$.

8) $(-n)_4 = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{4!}$
$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$
$= (n+3)_4$.

---

4. Der binomische Lehrsatz.

§. 15. Wenn m eine Zahl der Zahlenreihe bezeichnet, so ist allemal:

I. $(a+b)^m = a^m + m_1 \cdot a^{m-1} b + m_2 \cdot a^{m-2} b^2 + m_3 \cdot a^{m-3} b^3 + \ldots \ldots\ldots + m_{m-2} \cdot a^2 b^{m-2} + m_{m-1} \cdot a b^{m-1} + m_m \cdot b^m$,

wo nach §. 14 m_2 statt m_{m-2}, m_1 oder m statt m_{m-1}, und 1 statt m_m gesetzt werden kann.

Beweis. Es ist, wie man sich durch gewöhnliche Multiplication überzeugt:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$,
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$, u. s. w.

Berechnet man dieselben Potenzen von a + b nach der vorläufig als Behauptung hingestellten Formel (I), so erhält man:

$(a+b)^2 = a^2 + 2_1\, ab + 2_2 \cdot b^2$.
$(a+b)^3 = a^3 + 3_1 \cdot a^2 b + 3_2 \cdot ab^2 + 3_3 \cdot b^3$.
$(a+b)^4 = a^4 + 4_1 \cdot a^3 b + 4_2 \cdot a^2 b^2 + 4_3 \cdot ab^3 + 4_4 \cdot b^4$ rc.,

welche alle mit den direct berechneten völlig übereinstimmen. Also ist die Formel (I) in der That gültig für m = 2, m = 3, m = 4.

Man nehme nun an, die Formel (I) gelte, wenn man für m die bestimmte, aber beliebige positive ganze Zahl p setzt, so daß wirklich sei:

1) $(a+b)^p = a^p + p_1 \cdot a^{p-1} \cdot b + p_2 \cdot a^{p-2} b^2 + p_3 \cdot a^{p-3} b^3 + \ldots + p_{p-3} \cdot a^3 b^{p-3} + p_{p-2} \cdot a^2 b^{p-2} + p_{p-1} \cdot a b^{p-1} + p_p \cdot b^p$.

Multiplicirt man dann (1) links und rechts mit a + b, so erhält man:

2) $(a+b)^{p+1} = a^{p+1} + p_1 \cdot a^p b + p_2 \cdot a^{p-1} b^2 + p_3 \cdot a^{p-2} b^3 + \ldots$
$+ \quad a^p \cdot b + p_1 \cdot a^{p-1} b^2 + p_2 \cdot a^{p-2} b^3 + \ldots$
$+ p_{p-2} \cdot a^3 b^{p-2} + p_{p-1} \cdot a^2 b^{p-1} + p_p \cdot a b^p$
$+ p_{p-3} \cdot a^3 b^{p-2} + p_{p-2} \cdot a^2 b^{p-1} + p_{p-1} \cdot a b^p$
$+ p_p \cdot b^{p+1}$
$= a^{p+1} + (p_1+1) a^p \cdot b + (p_2+p_1) a^{p-1} b^2 + (p_3+p_2)$
$a^{p-2} b^3 + \ldots$
$+ (p_{p-2}+p_{p-3}) \cdot a^3 b^{p-2} + (p_{p-1}+p_{p-2}) \cdot a^2 b^{p-1}$
$+ (p_p + p_{p-1}) \cdot a b^p + p_p \cdot b^{p+1}.$

Oder nach §. 14, 5:
$(a+b)^{p+1} = a^{p+1} + (p+1)_1 a^p b + (p+1)_2 \cdot a^{p-1} b^2 + (p+1)_3 a^{p-2} b^3 + \ldots$
$+ (p+1)_{p-2} \cdot a^3 b^{p-2} + (p+1)_{p-1} \cdot a^2 b^{p-1} + (p+1)_p \cdot a b^p +$
$(p+1)_{p+1} \cdot b^{p+1}.$

Setzt man hier $p+1 = q$, wo dann: $p = q-1$
$p-1 = q-2$
$p-2 = q-3$ u. s. w.,

so folgt:
$$(a+b)^q = a^q + q_1 \cdot a^{q-1} b + q_2 \cdot a^{q-2} b^2 + q_3 \cdot a^{q-3} b^3 + \ldots + q_{q-3} \cdot a^3 b^{q-3} + q_{q-2} \cdot a^2 b^{q-2} + q_{q-1} \cdot a b^{q-1} + q_q \cdot b^q,$$

und diese Formel stimmt vollkommen mit (I) überein. So oft also die Formel (I) für irgend eine bestimmte Zahl p gilt, die statt m gesetzt wird, so gilt sie dann auch immer für die um 1 größere Zahl $p+1$, welche hier durch q bezeichnet worden ist. Da nun die Formel (I) richtig ist für $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$, so ist sie auch richtig für $m = 5$, dann aber auch für $m = 6$ u. s. w. für jede folgende Zahl der Zahlenreihe. Und dieser Satz heißt der **binomische Lehrsatz** oder das **Theorem von Newton**.

§. 16. Setzt man im binomischen Satze $-b$ statt b, so kommt:
II. $(a-b)^m = a^m - m_1 \cdot a^{m-1} b + m_2 \cdot a^{m-2} b^2 - m_3 \cdot a^{m-3} b^3 + \ldots$
$\pm m_{m-2} \cdot a^2 b^{m-2} \mp m_{m-1} \cdot a b^{m-1} \pm m_m \cdot b^m,$

wo in den letzten Gliedern die obern oder untern Zeichen gelten, je nachdem m eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist.

Da $a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$, so ist $(a \pm b)^m = a^m \cdot \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^m$,

oder, wenn man $\frac{b}{a}$ mit x bezeichnet,
$$(a \pm b)^m = a^m \cdot (1 \pm x)^m.$$

Setzt man nun in (I) und (II) 1 statt a und x statt b, so erhält man:
III. $(1 \pm x)^m = 1 \pm m_1 \cdot x + m_2 \cdot x^2 \pm m_3 x^3 + \ldots.$
$\pm m_{m-2} \cdot x^{m-2} \mp m_{m-1} \cdot x^{m-1} \pm m_m \cdot x^m,$

wo wieder die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, je nachdem in der Entwickelung von $(1-x)^m$ der Exponent m gerade oder ungerade ist. $(1+x)^m$ hat natürlich lauter positive Glieder. Multiplicirt man dann links und rechts noch mit a^m und setzt wieder $\frac{b}{a}$ statt x, so erhält man noch:

$$\text{IV.}\quad (a \pm b)^m = a^m \cdot \left[1 \pm m_1 \cdot \frac{b}{a} + m_2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \pm m_3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots \pm m_{m-2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} \mp m_{m-1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m-1} \pm m_m \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^m\right].$$

§. 17. Um die Richtigkeit des binomischen Satzes auch für negative ganze Exponenten darzuthun, setze man nach der bekannten Formel, daß $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$:

$$(1+b)^{-n} = \frac{1}{(1+b)^n} = \frac{1}{1+n_1 \cdot b + n_2 \cdot b^2 + n_3 \cdot b^3 + \ldots + n_{n-1} \cdot b^{n-1} + n_n \cdot b^n}$$

und verwandle diesen Quotienten nach dem Gesetze der recurrirenden Reihen (§. 12) in eine nach ganzen Potenzen von b fortschreitende Reihe. Man erhält, wenn man die unbestimmten Coëfficienten wie dort mit α, β, γ, δ, ε .... bezeichnet:

$\alpha = 1.$
$\beta = -n_1 \cdot \alpha.$
$\gamma = -n_1 \cdot \beta - n_2 \cdot \alpha = (n+1)_2 \cdot \alpha = (-n)_2 \cdot \alpha$ (§. 14, 6).
$\delta = -n_1 \cdot \gamma - n_2 \cdot \beta - n_3 \cdot \alpha = -(n+2)_3 \cdot \alpha = (-n)_3 \cdot \alpha.$
$\varepsilon = -n_1 \cdot \delta - n_2 \cdot \gamma - n_3 \cdot \beta - n_4 \cdot \alpha = (n+3)_4 \cdot \alpha = (-n)_4 \cdot \alpha$
u. s. w. Also ist denn:

$$\text{I.}\quad (1+b)^{-n} = 1 + (-n)_1 \cdot b + (-n)_2 \cdot b^2 + (-n)_3 \cdot b^3 + (-n)_4 b^4 + \ldots$$

Und setzt man $-b$ statt b, so werden die ungeraden Potenzen von b negativ, also:

$$\text{II.}\quad (1-b)^{-n} = 1 - (-n)_1 \cdot b + (-n)_2 \cdot b^2 - (-n)_3 \cdot b^3 + (-n)_4 \cdot b^4 - \ldots$$

und diese Reihen brechen nie ab.

Da $(a+b)^{-n} = a^{-n} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^n}$, so ist auch:

$$\text{III.}\quad (a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} + (-n)_1 \cdot \frac{b}{a^{n+1}} + (-n)_2 \cdot \frac{b^2}{a^{n+2}} + (-n)_3 \cdot \frac{b^3}{a^{n+3}} + \ldots$$

$$\text{IV.}\quad (a-b)^{-n} = \frac{1}{a^n} - (-n)_1 \cdot \frac{b}{a^{n+1}} + (-n)_2 \cdot \frac{b^2}{a^{n+2}} - (-n)_3 \cdot \frac{b^3}{a^{n+3}} + \ldots$$

§. 18. Es bleibt noch übrig, den binomischen Lehrsatz auch für gebrochene Exponenten, mögen dieselben positiv oder negativ sein, zu erweisen. Zu diesem Zwecke setze man:

1) $f(m) = 1 + m_1 \cdot x + m_2 \cdot x^2 + m_3 \cdot x^3 + \ldots.$

2) $f(n) = 1 + n_1 \cdot x + n_2 \cdot x^2 + n_3 \cdot x^3 + \ldots.$

wo $m_1, m_2, m_3 \ldots. n_1, n_2, n_3 \ldots.$ Binomialcoëfficienten vorstellen, deren Bedeutung (§. 14) festgestellt ist, während m und n jedoch hier ganz beliebige Zahlen bezeichnen mögen.

Multiplicirt man nun die Ausdrücke (1) und (2) mit einander, so bekommt man:

3) $f(m) \cdot f(n) = 1 + (m_1 + n_1) x + (m_2 + m_1 n_1 + n_2) x^2 + (m_3 + m_2 n_1 + m_1 n_2 + n_3) x^3 + (m_4 + m_3 n_1 + m_2 n_2 + m_1 n_3 + n_4) x^4 + \ldots$

Nun ist $m_1 + n_1 = (m + n)_1$

$$m_2 + m_1 n_1 + n_2 = \frac{m(m-1) + 2mn + n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{m^2 - m + 2mn + n^2 - n}{2} = \frac{(m+n)^2 - (m+n)}{2}$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} = (m+n)_2 \cdot$$

$$m_3 + m_2 n_1 + m_1 n_2 + n_3$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) + 3m(m-1)n + 3m \cdot n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$= \frac{m^3 - 3m^2 + 2m + 3m^2 n - 3mn + 3mn^2 - 3mn + n^3 - 3n^2 + 2n}{3!}$$

$$= \frac{(m+n)^3 - 3(m+n)^2 + 2(m+n)}{3!}$$

$$= \frac{(m+n)[(m+n)^2 - 3(m+n) + 2]}{3!} = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{3!}$$

$$= (m+n)_3.$$

Ebenso findet man, daß der Coëfficient von $x^4 = (m + n)_4$ ist u. s. w. Also ist denn:

4) $f(m) \cdot f(n) = 1 + (m+n)_1 \cdot x + (m+n)_2 \cdot x^2 + (m+n)_3 \cdot x^3 + \ldots$

Die Reihe (4) ist nun aber gerade ebenso aus $m + n$ gebildet, wie (1) aus m und (2) aus n. Da diese beziehlich durch $f(m)$ und $f(n)$ bezeichnet wurden, so muß nun, wenn durch das Zeichen f die Gleichartigkeit der Zusammensetzung angedeutet werden soll, die Reihe (4) ebenso durch $f(m + n)$ bezeichnet werden. Dann ist aber:

5) $f(m) \cdot f(n) = f(m + n),$

d. h. durch Multiplication der erstern Reihen erhält man dasselbe, wie wenn man in (1) $m + n$ statt m, oder in (2) $m + n$ statt n einsetzt.

Für $m = n$ erhält man aus (5):

6) $[f(m)]^2 = f(2m).$

Setzt man in (5) $n = 2m$, so ist:

7) $$f(m) \cdot f(2m) = f(3m).$$

Und für $f(2m)$ den Werth aus (6) gesetzt, liefert:

8) $$[f(m)]^3 = f(3m).$$

Gerade ebenso findet sich:

9) $$[f(m)]^4 = f(4m) \text{ u. s. w.}$$

Ist dann für eine bestimmte, aber beliebige Zahl p:

10) $$[f(m)]^p = f(pm),$$

und man setzt nun in (5) $n = pm$, so ist nach eben dieser Nummer:

11) $$f(m) \cdot f(pm) = f(m + pm) = f([p+1]m);$$

da aber, nach der Annahme in (10):

$$f(pm) = [f(m)]^p,$$

so ist nach (11) nun auch:

12) $$[f(m)]^{p+1} = f([p+1]m).$$

Gilt also die Gleichung (10) für irgend eine bestimmte Zahl p, so gilt sie allemal auch für die nächstfolgende Zahl $p+1$; nun gilt sie für $p = 2$, $= 3$, $= 4$ ꝛc., also gilt sie dann auch für $p = 5$ und alle folgenden Zahlen, und es ist ganz allgemein, wenn μ eine ganze Zahl bedeutet:

13) $$[f(m)]^\mu = f(\mu m),$$

d. h. wenn man μ Reihen wie $f(m)$ mit einander multiplicirt (oder eine solche Reihe mit μ potenzirt) so ergibt sich genau dasselbe, wie wenn man in der Reihe $f(m)$ μm statt m setzt. So lange m eine ganze Zahl bedeutet, drückt die Reihe $f(m)$ die Potenz $(1+x)^m$ aus (§. 16); da aber hier m beliebig ist, also auch eine gebrochene Zahl vorstellen kann, so läßt sich noch nicht ohne weiteres annehmen, daß $f(m)$ allemal die Potenz $(1+x)^m$ vorstelle; vielmehr ist dies eben die Frage, welche durch unsern Lehrsatz entschieden werden soll. Man setze also nun für m in (13) die gebrochene Zahl $\frac{\nu}{\mu}$, so erhält man:

14) $$\left[f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^\mu = f(\nu).$$

Nun ist aber ν eine ganze Zahl, weil nur der Quotient $\frac{\nu}{\mu}$ einen Bruch vorstellen soll; also ist:

$$f(\nu) = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \dots = (1+x)^\nu \text{ (§. 16);}$$

also ist dann auch:

15) $$\left[f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^\mu = (1+x)^\nu,$$

und 16) $$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = (1+x)^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{(1+x)^\nu}.$$

Es bedeutet aber $f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ die Reihe:

$$1 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_1 \cdot x + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_2 \cdot x^2 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_3 \cdot x^3 + \ldots,$$

also ist denn nach (16):

$$17) \quad (1 + x)^{\frac{\nu}{\mu}} = 1 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_1 \cdot x + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_2 \cdot x^2 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_3 \cdot x^3 + \ldots.$$

d. h. die Potenz $(1 + x)^m$ kann immer nach demselben Gesetze entwickelt werden, mag m eine ganze oder gebrochene Zahl sein. Der binomische Lehrsatz ist also hiermit auch für beliebig gebrochene Zahlen erwiesen.

§. 19. Der Beweis des binomischen Lehrsatzes für negative gebrochene Exponenten kann zwar als in dem für positive gebrochene geführten mit enthalten angesehen werden, weil dieser Beweis sich auf die Formel

$$f(\nu) = 1 + \nu_1 \cdot x + \nu_2 \cdot x^2 + \nu_3 \cdot x^3 + \ldots.$$

stützt, welche nach §. 17 bereits auch für negative ganze Exponenten gültig ist. Da sich indeß der Beweis für negative gebrochene Exponenten so eng an den vorigen anschließt, so wollen wir doch auch diesen nicht vorenthalten.

In §. 18 (5) setze man $-m$ statt n, so ergibt sich:

$$1) \quad f(m) \cdot f(-m) = f(m - m) = f(o),$$

d. h. das Product der Reihen $f(m)$ und $f(-m)$ ist der Werth, welchen man aus $f(m)$ erhält, wenn man o statt m setzt. Aus der bloßen Ansicht der Reihe §. 18 (1) zeigt sich, daß diese Substitution den Werth 1 liefert; also ist:

$$2) \quad f(m) \cdot f(-m) = 1,$$

$$3) \quad f(-m) = \frac{1}{f(m)}.$$

Aber nach §. 18 (17) ist, mag m ganz oder gebrochen sein:

$$4) \quad f(m) = (1 + x)^m,$$

also: 5) $$f(-m) = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m},$$

d. h. wenn man in der Reihe §. 18 (1) $-m$ statt m setzt, so erhält man den Werth der Potenz $(1 + x)^{-m}$; jene Reihe drückt aber für ein positives (ganzes oder gebrochenes) m den Werth von $(1 + x)^m$ aus; also läßt sich der Werth von $(1 + x)^{-m}$ durch bloße Substitution von $-m$ statt m aus $(1 + x)^m$ finden; d. h. der binomische Lehrsatz bleibt auch für negative gebrochene Exponenten gültig.

Man hat also; mag m eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen, allemal:

$$(1 + x)^m = 1 + m_1 \cdot x + m_2 \cdot x^2 + m_3 \cdot x^3 + m_4 \cdot x^4 + \ldots.$$

Setzt man hier noch $\frac{b}{a}$ statt x und multiplicirt beide Seiten der Gleichung

mit a^m (wie in §. 17, III), so erhält man für alle möglichen reellen, d. h. positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Werthe von m:

$$(a + b)^m = a^m + m_1 \cdot a^{m-1} b + m_2 \cdot a^{m-2} b^2 + m_3 \cdot a^{m-3} b^3 + \ldots$$

Der Satz kann oft bequem benutzt werden, um die ersten Glieder der Quadratwurzel eines Ausdrucks zu entwickeln. Z. B.:

$$\sqrt{a+b} = (a+b)^{1/2} = a^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{1/2},$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{1/2} = 1 + (1/2)_1 \cdot \frac{b}{a} + (1/2)_2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + (1/2)_3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots.$$

Nun ist $(1/2)_1 = 1/2$; $(1/2)_2 = \frac{1/2 \cdot (1/2 - 1)}{2} = \frac{1/2\,(-1/2)}{2} = -\frac{1}{8}$; $(1/2)_3 = \frac{1/2\,(1/2 - 1)\,(1/2 - 2)}{2 \cdot 3} = \frac{1/2\,(-1/2)\,(-3/2)}{6} = \frac{1}{16}$ u. s. w. Also ist:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{1/2} = 1 + 1/2 \cdot \frac{b}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots.$$

$$\sqrt{a+b} = a^{1/2}\left[1 + 1/2 \cdot \frac{b}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots.\right]$$

$$= \sqrt{a} + 1/2 \cdot \frac{b}{\sqrt{a}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a\sqrt{a}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{a^2\sqrt{a}} - \ldots.$$

Für die Berechnung dürfte folgende Form der binomischen Reihe noch vorzuziehen sein: man setze in der Entwickelung der Reihe das erste Glied gleich A, das zweite = B, das dritte = C u. s. w., sowie $\frac{b}{a} = Q$, so ist:

$$(a \pm b)^m = A \pm \frac{m}{1} \cdot AQ + \frac{m-1}{2} \cdot BQ \pm \frac{m-2}{3} CQ + \ldots.$$

weil hier jedes folgende Glied leicht aus dem vorangehenden berechnet werden kann.

Man wird endlich leicht bemerken, daß:

$$(a + b + c)^m = [a + (b + c)]^m$$
$$= a^m + m_1 \cdot a^{m-1}(b + c) + m_2\, a^{m-2} \cdot (b + c)^2 + m_3 \cdot a^{m-3} \cdot (b + c)^3 + \ldots.$$
$$= a^m + m_1\, a^{m-1}\, b + m_2\, a^{m-2}\, b^2 + \ldots.$$
$$+ m_1\, a^{m-1}\, c + 2 m_2\, a^{m-2}\, bc + \ldots.$$
$$+ m_2\, a^{m-2}\, c^2 + \ldots.$$

Oder wenn man $b + c + d + \ldots.$ mit z bezeichnet, so ist:

$$(a + b + c + d + e + \ldots.)^m =$$
$$a^m + m_1\, a^{m-1}\, z + m_2 \cdot a^{m-2}\, z^2 + m_3 \cdot a^{m-3}\, z^3 + \ldots.$$

wo die Potenzen von z wieder besonders entwickelt werden können. Dieser Satz wird der polynomische Lehrsatz genannt.

5. Von den Potenzreihen.

§. 20. **Aufgabe.** Man soll die Potenz a^x in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe verwandeln.

Auflösung. Man setze:

1) $a^x = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \ldots,$

wo $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ unbestimmte Coëfficienten sind, welche nun noch so zu finden sind, daß sie der Gleichung (1) für jeden Werth von x genügen. Zu diesem Zwecke setze man erst y, dann $x + y$ statt x; dadurch erhält man:

2) $a^y = A_0 + A_1 \cdot y + A_2 \cdot y^2 + A_3 \cdot y^3 + \ldots$

3) $a^{x+y} = A_0 + A_1 \cdot (x+y) + A_2 \cdot (x+y)^2 + A_3 \cdot (x+y)^3 + \ldots$

Multiplicirt man (1) mit (2), so erhält man:

$$
\begin{aligned}
4)\quad a^{x+y} = {} & A_0^2 + A_0 \cdot A_1 \cdot x + A_0 \cdot A_2 x^2 + A_0 \cdot A_3 x^3 + \ldots \\
& + (A_0 A_1 + A_1 x^2 + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \ldots) \cdot y \\
& + (A_2 A_0 + A_2 A_1 x + A_2^2 x^2 + A_2 A_3 x^3 + \ldots) \cdot y^2 \\
& + (A_3 A_0 + A_3 A_1 x + A_3 A_2 x^2 + A_3^2 x^3 + \ldots) y^3 \\
& + \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Nun entwickle man in (3) rechts die Potenzen von $(x + y)$ nach dem binomischen Lehrsatze und ordne, ebenso wie in (4), die Glieder zunächst nach Potenzen von y, dann aber jede Potenz von y wieder nach Potenzen von x, so bekommt man:

$$
\begin{aligned}
5)\quad a^{x+y} = {} & A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots \\
& + (A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + 5 A_5 x^4 + \ldots) y \\
& + (A_2 + 3 A_3 x + 6 A_4 \cdot x^2 + 10 A_5 x^3 + \ldots) y^2 \\
& + \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Die Reihen in (4) und (5) müssen nun für jeden Werth von x und y einander gleich sein, deshalb müssen (nach §. 11) die Coëfficienten von y einander gleich sein, oder es muß

$$
\begin{aligned}
& A_0 A_1 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \ldots \\
& = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

sein; also muß denn, ebenfalls nach §. 11, wieder

$$
\begin{aligned}
A_0 A_1 &= A_1 & \text{oder}\quad A_0 &= 1 \\
A_1^2 &= 2 A_2 & A_2 &= \frac{A_1^2}{2} \\
A_1 A_2 &= 3 A_3 & A_3 &= \frac{A_1^3}{2 \cdot 3} \\
A_1 A_3 &= 4 A_4 & A_4 &= \frac{A_1^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

sein, und durch Substitution dieser Werthe ergibt sich:

6) $a^x = 1 + \frac{1}{1!} A_1 x + \frac{1}{2!} A_1^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} A_1^3 x^3 + \frac{1}{4!} A_1^4 \cdot x^4 + \ldots.$

wo jedoch A_1 noch unbestimmt geblieben ist.

Um A_1 zu bestimmen, setze man zunächst $x = 1$, so kommt:

7) $a = 1 + \frac{A_1}{1!} + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \frac{A_1^4}{4!} + \ldots.$

und mittels dieser Gleichung müßte man A_1 durch a ausdrücken können; da sie aber vom unendlichen Grade ist, so würde man dabei unüberwindliche Schwierigkeiten finden. Man geht daher den umgekehrten Weg und gibt dem A_1 vorläufig einen bestimmten Werth, und zwar den einfachsten, setzt nämlich $A_1 = 1$, und bestimmt daraus den Werth von a für diesen Werth von A_1; den Werth der Reihe (7) für $A_1 = 1$ bezeichnet man durchweg mit dem Buchstaben e, und hat also:

8) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$

oder: $e = 2{,}718281828459\ldots.$

Dieses e (oder der eben berechnete Zahlenwerth 2,71828 ....) ist nun ein besonderer Werth des frühern a, nämlich der für $A_1 = 1$. Setzt man erst das frühere x wieder ein, so bekommt man:

9) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$

und setzt man, ebenfalls in (8) A_1 wieder ein, so erhält man:

10) $e^{A_1} = a$,

woraus 11) $A_1 = \overset{e}{\log}\, a$

folgt. Die Zahl e oder 2,7182 .... ist also hier zur Basis eines Logarithmensystems genommen; diese Logarithmen, deren Basis die Zahl e ist, heißen **natürliche Logarithmen** und werden mit log nat bezeichnet. Es ist also denn:

12) $A_1 = \log\text{ nat} \cdot a$

und 13) $a^x = 1 + \frac{x \cdot \log\text{ nat } a}{1!} + \frac{x^2 \cdot (\log\text{ nat} \cdot a)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (\log\text{ nat} \cdot a)^3}{3!} + \ldots.$

B. Aus der Geometrie.

§. 21. Die Lehren der ebenen Geometrie werden hier zwar insoweit vorausgesetzt, als man annehmen darf, daß sie beim gewöhnlichen Schulunterrichte erworben werden können. Da ich nun aber einige geodätische Aufgaben mittels der harmonischen Theilung lösen werde, und dieser Gegenstand, als ein Theil der

neuern Geometrie, in manche Lehrbücher noch nicht aufgenommen ist, so muß ich annehmen, daß es auch noch Schulen gibt, wo die Jugend diese schönen und fruchtbaren Sätze nicht kennen zu lernen Gelegenheit hat. Dies veranlaßte mich, sie hier in gedrängter Kürze zusammenzustellen.

Lehrsatz 1. Halbirt man in einem beliebigen Dreieck ABC (Fig. 5) durch eine Transversale CX einen innern Winkel C, so theilt die Transversale CX die Gegenseite AB so, daß

$$AX : BX = AC : BC.$$

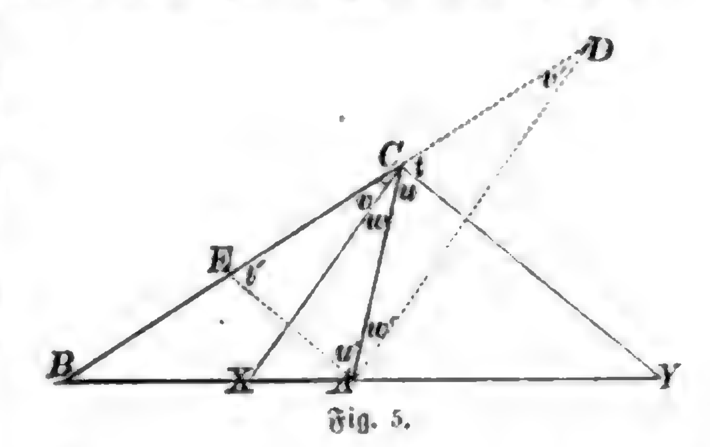


Fig. 5.

Beweis. Verlängere BC und ziehe $AD \parallel CX$ bis zum Durchschnitt in D, so ist:

$$AX : BX = CD : BC.$$

Aber Winkel $v = v'$ und $w = w'$, also, da $v = w$, auch $v' = w'$, demnach $CD = AC$, und daraus folgt die Behauptung.

Lehrsatz 2. Halbirt man in einem Dreieck ABC (Fig. 5) einen Außenwinkel ACD durch die Transversale CY, so schneidet sie die verlängerte Gegenseite AB so, daß:

$$AY : BY = AC : BC.$$

Beweis. Ziehe $AE \parallel CY$, so ist:

$$AY : BY = CE : BC;$$

aber Winkel $u = u'$ und $t = t'$, also, da $u = t$, auch $u' = t'$, also $CE = AC$, woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Halbirt man in einem Dreieck ABC einen innern Winkel ACB und auch den äußern DCB an derselben Ecke, so schneiden die beiden Transversalen CX und CY die Gegenseite und ihre Verlängerung so, daß die innern (durch X gebildeten) Abschnitte sich ebenso verhalten wie die äußern (durch Y gebildeten), oder daß:

$$AX : BX = AY : BY.$$

§. 22. Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 6) durch zwei Punkte X und Y, wovon der eine, X, in AB, der andere, Y, in deren Verlängerung liegt, so getheilt wird, daß die innern Abschnitte sich so verhalten wie die äußern, oder daß:

B X A Y

Fig. 6.

$$AX : BX = AY : BY,$$

so sagt man: die Linie AB sei in den Punkten X und Y harmonisch getheilt. Die Winkelhalbirungslinien CX und CY (in Fig. 5) theilen also die Grundlinie AB harmonisch.

Lehrsatz 3. Zieht man durch zwei Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 7) und die Verlängerung der dritten, oder durch die Verlängerungen aller drei Seiten (Fig. 8) eine Transversale XYZ, so werden die Seiten des Dreiecks dadurch in sechs Abschnitte getheilt, und das Product dreier von diesen Abschnitten, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, ist dem Producte der andern drei Abschnitte gleich.

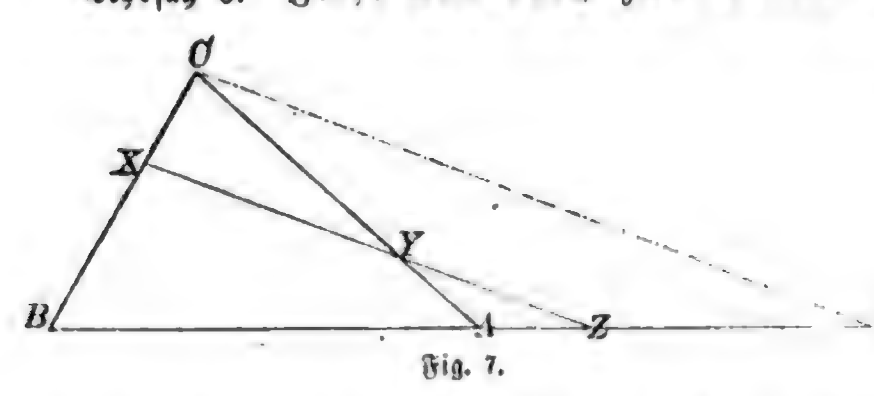


Fig. 7.

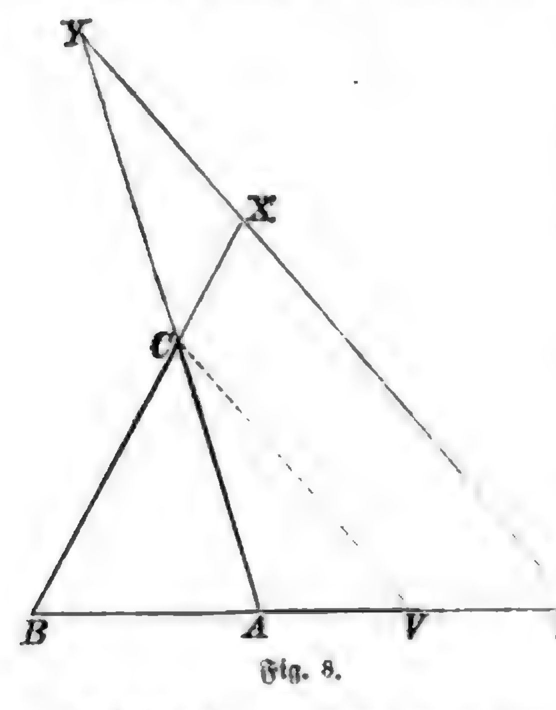


Fig. 8.

Beweis. Ziehe in den Figuren 7 und 8 CV ǂ XYZ, so ist in den Dreiecken ACV und AYZ:

$$VZ : CY = AZ : AY,$$

und in den Dreiecken BCV und BXZ:

$$CX : VZ = BX : BZ.$$

$$CX : CY = AZ \cdot BX : AY \cdot BZ;$$

demnach:

$$AY \cdot BZ \cdot CX = AZ \cdot BX \cdot CY.$$

Lehrsatz 4. Nimmt man innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC (Fig. 9 und 10) einen beliebigen Punkt O an, und zieht

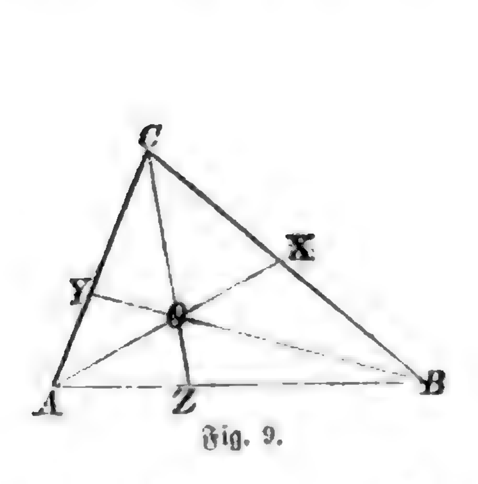


Fig. 9.

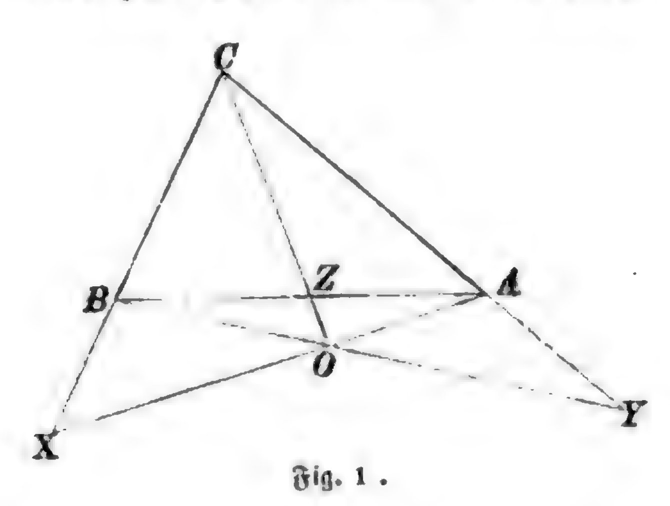


Fig. 1 .

Transversalen durch alle Ecken und diesen Punkt O, so theilen diese Transversalen die Seiten des Dreiecks in 6 Abschnitte, und das Product dreier nicht zusammenstoßender Abschnitte ist dem Producte der drei andern Abschnitte gleich.

Beweis. Das Dreieck ABX und die Transversale COZ (oder CZO in Fig. 10) geben nach Lehrsatz 3 folgende Gleichung:

1) $AZ \cdot BC \cdot OX = BZ \cdot CX \cdot AO.$

Das Dreieck ACX und die Transversale BOY dagegen geben nach Lehrsatz 3 folgende Gleichung:

2) $AO \cdot BX \cdot CY = OX \cdot BC \cdot AY.$

Multiplicirt man beide Gleichungen (1) und (2) mit einander und hebt die gleichen Factoren weg, so erhält man:

3) $AZ \cdot BX \cdot CY = BZ \cdot CX \cdot AY,$

welches die Behauptung war.

Lehrsatz 5. Verbindet man die Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 11 und 12) durch die Geraden AOX, BOY und COZ mit einem innerhalb oder außerhalb desselben gelegenen Punkte O, und zieht noch die Transversale XYZ′, so wird die Seite AB in den Punkten Z und Z′ harmonisch getheilt.

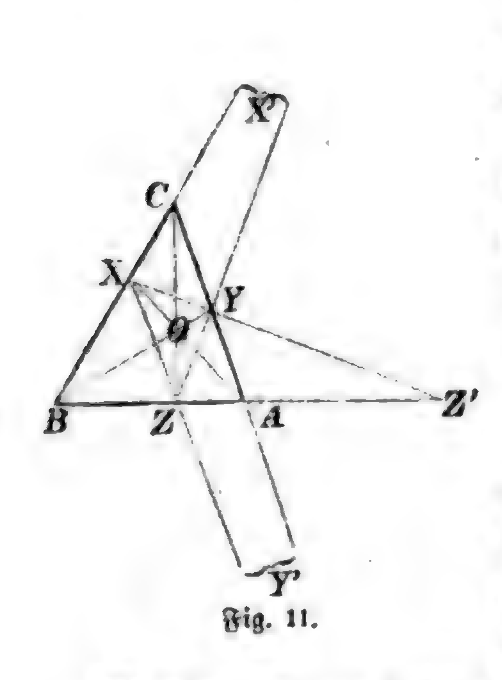


Fig. 11.

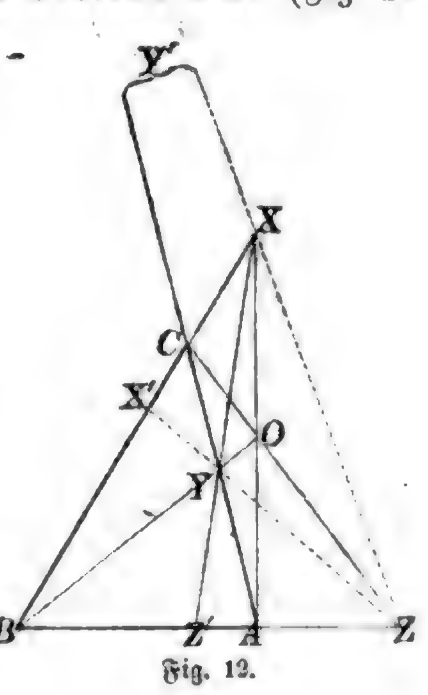


Fig. 12.

Beweis. Wegen Lehrsatz 4 ist:

1) $AZ \cdot BX \cdot CY = BZ \cdot CX \cdot AY,$

und wegen Lehrsatz 3:

2) $AZ' \cdot BX \cdot CY = BZ' \cdot CX \cdot AY.$

Dividirt man (1) durch (2), so kommt:

$$AZ : AZ' = BZ : BZ',$$

oder: $$AZ : BZ = AZ' : BZ',$$

wie behauptet worden.

Zieht man statt XY die Transversale XZ oder YZ, so kann man dasselbe von den andern Seiten beweisen.

Lehrsatz 6. In jedem vollständigen Viereck *) wird jede der drei Diagonalen durch die beiden andern harmonisch getheilt.

---

*) Ein vollständiges Viereck entsteht, wenn sich von vier Geraden je zwei gegenseitig durchschneiden, so daß also sechs Durchschnittspunkte entstehen; z. B.

Beweis. ABCDEF (Fig. 13) sei ein vollständiges Viereck, CA, DB, EF seine drei Diagonalen; diese schneiden sich gegenseitig in den Punkten G, H und J. CEF ist ein Dreieck, in welchem sich die Transversalen BE, CH und DF in einem Punkte A schneiden; daher wird, nach Lehrsatz 5, die Seite EF durch DBG und CAH in den Punkten G, H harmonisch getheilt.

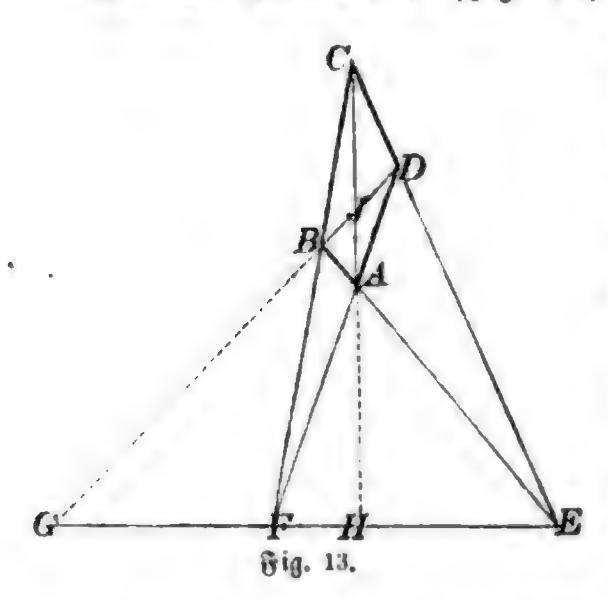


Fig. 13.

CBD ist ein Dreieck, in welchem sich die Transversalen AB, AC, AD in einem Punkte A schneiden; daher wird BD, durch AC und EF in J und G harmonisch getheilt.

ABC ist ein Dreieck, in welchem sich die Transversalen DA, DB, DC in einem Punkte D schneiden; daher wird AC durch BD und EF in J und H harmonisch getheilt.

§. 23. Wenn eine Gerade AB (Fig. 14) in den Punkten X, Y harmonisch getheilt ist, und man zieht aus einem beliebigen Punkte O die Geraden OA, OB, OX, OY durch die harmonischen Punkte A, B, X, Y, so heißen diese Geraden harmonische Strahlen; alle vier bilden ein System harmonischer Strahlen, oder ein harmonisches Strahlenbüschel.

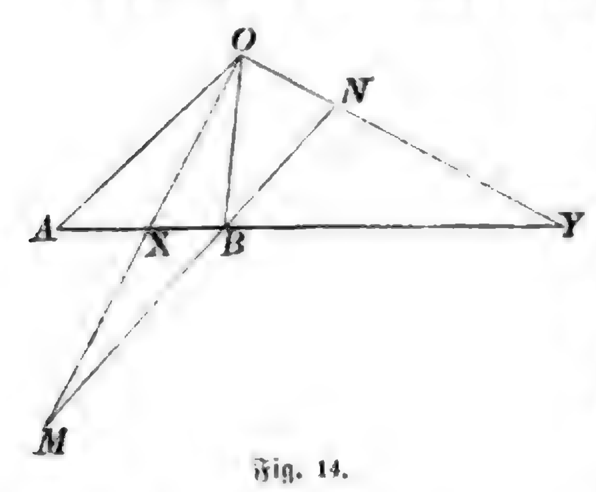


Fig. 14.

Lehrsatz 7. Zieht man durch ein harmonisches Strahlenbüschel OA, OB, OX, OY (Fig. 14) eine Gerade MN parallel mit einem Strahl OA, so schneiden die drei andern Strahlen zwei gleiche Stücke BM = BN davon ab.

Beweis. AYO ist ein Dreieck, in welchem BN ⫲ AO, also ist:

$$BN : AO = BY : AY.$$

In den Dreiecken AOX und BMX ist aber auch BM ⫲ AO, also:

$$BM : AO = BX : AX.$$

(Fig. 13) bilden AB, BC, CD, AD, zunächst das Viereck ABCD, aber CB, DA verlängert, schneiden sich noch in F, und AB, CD, in E, daher ist ABCDEF ein vollständiges Viereck. Sind die vier Linien paarweise parallel, so liegen die Schnittpunkte E und F in unendlicher Ferne. Das vollständige Viereck hat drei Diagonalen AC, BD, EF, die sich wieder in den Punkten G, H, J schneiden.

Nun ist, weil AB in X und Y harmonisch getheilt ist:

$$BX : AX = BY : AY.$$

Also:

$$BM : AO = BN : AO,$$

d. h.

$$BM = BN.$$

Lehrsatz 8. Jede von einem System harmonischer Strahlen geschnittene Gerade wird durch diese harmonisch getheilt.

Beweis. OA, OB, OX, OY (Fig. 14) sei ein System harmonischer Strahlen, AXBY eine davon geschnittene Gerade. Durch B ziehe MN ∦ AO; dann ist:

$$BY : AY = BN : AO.$$
$$BX : AX = BM : AO.$$
$$BM = BN \text{ (Lehrsatz 7).}$$
$$BX : AX = BN : AO.$$
$$BX : AX = BY : AY.$$

oder:

$$AX : BX = AY : BY.$$

Folgerung. Zieht man noch (in Fig. 15) die Gerade FJK durch die Ecke F und den Diagonaldurchschnitt J, so wird die Seite AB in M und E, die Seite CD in K und E harmonisch getheilt. Denn AC ist in J und H harmonisch getheilt, also sind FC, FJ, FA, FH harmonische Strahlen; CE wird von diesen Strahlen geschnitten, also sind C, D, K, E harmonische Punkte (Lehrsatz 8).

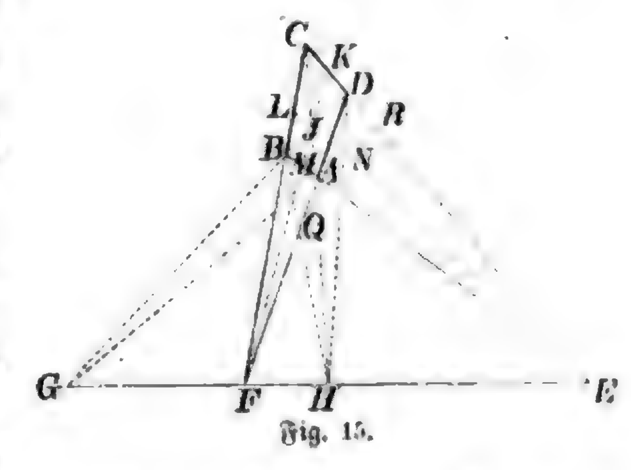


Fig. 15.

Zieht man EJ, so wird AD in N, BC in L harmonisch geschnitten. Durch DH wird AB in M und P, durch BH wird AD in N und Q harmonisch getheilt.

Zieht man also in einem vollständigen Viereck alle drei Diagonalen und verbindet noch zwei Diagonaldurchschnitte, oder einen Diagonaldurchschnitt und eine Ecke des Vierecks durch Gerade, so werden dadurch die getroffenen Seiten ebenfalls harmonisch getheilt.

C. Aus der Trigonometrie.

1. Winkel- und Bogenmaß.

§. 24. Schon einmal (§. 6) hat sich uns Veranlassung geboten, einen in Graden, Minuten, Secunden gegebenen Winkel in Bogenmaß auszudrücken.

Der einem Winkel zugehörige Bogen ist bei demselben Radius der Winkelgröße, bei gleicher Winkelgröße dem Radius, womit er beschrieben wird, proportional. Das erstere dieser Verhältnisse bietet ein bequemes Mittel dar, jeden Winkel in Bogenmaß auszudrücken, und ebenso jede Bogenlänge in Winkelmaß umzurechnen, wenn der Radius, womit der gegebene Bogen beschrieben worden, bekannt ist.

Um aber den Radius durch einen Zahlausdruck zu bestimmen, müßte man ihn auf irgend eine bekannte Längeneinheit beziehen; da diese Längeneinheiten rein willkürliche Größen sind, die nach dem Lande wechseln und auch nicht zu allen Zeiten dieselben bleiben, so eignen sie sich zu dem vorliegenden Zwecke nicht. Ueberdies ist es ganz unwesentlich, die Länge eines Bogens etwa nach Zoll oder Fuß 2c. zu kennen, und kann lediglich sein Verhältniß zum Radius interessiren; man hat daher für alle Fälle den Radius selbst als Maßeinheit für den Bogen genommen, und bestimmt also durch die Angabe blos das Verhältniß zwischen dem Bogen und seinem Radius; ein Bogen hat die Länge 0,53 heißt: der Bogen ist $\frac{53}{100}$ des Radius.

Zunächst mag nun die Gradzahl desjenigen Winkels gesucht werden, dessen Bogenlänge dem Radius gleich ist.

Da der Radius zur Einheit des Bogenmaßes genommen wird, so muß hier der gegebene Bogen = 1 gesetzt werden; die unbekannte Gradzahl des Winkels heiße x; dann ist:

$$x : 360 = 1 : 2\pi$$

$$x = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}1415926} = 57^\circ{,}2957804$$

$$= 57^\circ 17' 44''{,}8.$$

$$= 3437'{,}7468.$$

$$= 206264''{,}8.$$

Die Secundenzahl des dem Radius gleichen Bogens, also die Zahl 206264,8 bezeichnen wir künftig allemal mit dem Buchstaben ω. Ist dann s die Secundenzahl eines Winkels, λ die Länge des zugehörigen Bogens, so hat man:

$$1 : \lambda = \omega : s,$$

1) $$\lambda = \frac{s}{\omega},$$

2) $$s = \lambda \cdot \omega.$$

Will man einen Winkel in Bogenmaß verwandeln, so dividire man seine Secundenzahl durch ω; und will man einen Bogen, gegeben durch sein Maß für den Radius 1, in Winkelmaß verwandeln, so multiplicire man das auf den Radius 1 bezogene Bogenmaß mit ω.

Bezeichnet man mit arc s'' die Länge des Bogens von s'', so ist:

3) $$\text{arc } s'' = s \cdot \text{arc } 1'',$$

weil die Bogen bei gleichem Radius ihren Centriwinkeln proportional sind. Da nun die Länge eines Bogens von ω'' gleich 1 (d. h. gleich dem Radius) ist, so ist:

4) $$\text{arc } 1'' = \frac{1}{\omega} \text{ und } \omega = \frac{1}{\text{arc } 1''}.$$

Aber bei sehr kleinen Winkeln unterscheiden sich die Bogen noch gar nicht von ihren sin und tg, und zwar ist dies für den sin der Fall bis zu 29 Minuten oder 1740 Secunden, bei den tg bis 23 Minuten oder 1380 Secunden; es stimmen nämlich für diese Winkelgrößen Bogen und resp. Sinus und Tangente noch in der siebenten Decimalstelle überein. Innerhalb dieser Grenzen darf man also statt arc s'' setzen sin s'' oder tg s'', und es ist, bis zu 1740'':

5) $$\text{arc } s'' = s \cdot \sin 1''$$

und bis zu 1380'':

6) $$\text{arc } s'' = s \cdot \text{tg } 1''.$$

Also ist auch: 7) $$s = \frac{\text{arc } s''}{\sin 1''} = \frac{\text{arc } s''}{\text{tg } 1''}$$

innerhalb der angegebenen Grenzen. Wegen (1), (2) und (4) ist dann weiter:

8) $$\lambda = s \cdot \sin 1'' = s \cdot \text{tg } 1''.$$

9) $$s = \frac{\lambda}{\sin 1''} = \frac{\lambda}{\text{tg } 1''}.$$

Ist also für einen so kleinen Winkel x die Gleichung

$$\sin x = \mu \quad \text{oder } \text{tg } x = \nu$$

gegeben, so ist der Winkel x in Secunden, im ersten Falle $= \frac{\mu}{\sin 1''}$, im andern Falle $= \frac{\nu}{\text{tg } 1''}$ oder ebenfalls $= \frac{\nu}{\sin 1''}$, da $\sin 1'' = \text{tg } 1''$, während man für $\frac{1}{\sin 1''}$ oder $\frac{1}{\text{tg } 1''}$ die Zahl ω nehmen kann.

Wäre gegeben sin x = 0,0048, so wäre also:

$$\begin{aligned} \log \sin x &= 7{,}6812412 \\ \log \omega &= 5{,}3144251 \\ \log x &= 2{,}9956663 \\ x &= 990'',07 = 16'30'',07. \end{aligned}$$

---

2. Entwickelung des Sinus und Cosinus in Reihen.

§. 25. **Aufgabe 1.** Cos x in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze mit den unbestimmten Coëfficienten A_0, A_1, A_2, A_3 ....:

$$1) \quad \cos x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.$$

In der Reihe (1) setze man nun y statt x:

$$2) \quad \cos y = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots.$$

Dann setze man weiter in (1) $x + y$ statt x:

$$\begin{aligned} 3) \quad \cos(x+y) &= A_0 + A_1(x+y) + A_2(x+y)^2 + A_3(x+y)^3 + \ldots. \\ &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots. \\ &\quad + A_1 y + 2A_2 xy + 3A_3 x^2 y + 4A_4 x^3 y + \ldots. \\ &\quad + A_2 y^2 + 3A_3 xy^2 + 6A_4 x^2 y^2 + \ldots. \\ &\quad + A_3 y^3 + 4A_4 xy^3 + \ldots. \\ &\quad + A_4 y^4 + \ldots. \end{aligned}$$

Endlich setze man abermals in (1) $x - y$ statt x:

$$\begin{aligned} 4) \quad \cos(x-y) &= A_0 + A_1(x-y) + A_2(x-y)^2 + A_3(x-y)^3 + \ldots. \\ &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots. \\ &\quad - A_1 y - 2A_2 xy - 3A_3 x^2 y - 4A_4 x^3 y + \ldots. \\ &\quad + A_2 y^2 + 3A_3 xy^2 + 6A_4 x^2 y^2 + \ldots. \\ &\quad - A_3 y^3 - 4A_4 xy^3 + \ldots. \\ &\quad + A_4 y^4 + \ldots. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y, \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y. \\ \hline \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2 \cdot \cos x \cdot \cos y, \end{aligned}$$

oder $\quad \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x \cdot \cos y,$

d. h. das Product der Reihen (1) und (2) muß gleich sein der halben Summe der Reihen (3) und (4). Bevor wir indessen diese Rechnung ausführen, können wir die Reihen (1 — 4) noch etwas vereinfachen. Die Reihen sollen nämlich für jeden Werth von x gelten, also auch für $x = 0$; aber für $x = 0$ liefert die Reihe (1):

$$\cos 0 = A_0;$$

nun ist aber $\quad \cos 0 = 1,$

also muß $\quad A_0 = 1$ sein.

Ferner ist $\cos(-x) = \cos x$; die Reihe (1) muß also für positive und negative Werthe von x gleiche Werthe des cos liefern; dies ist nur möglich, wenn die Reihe keine ungeraden Potenzen von x enthält; die Coëfficienten der ungeraden Potenzen von x müssen also sämmtlich gleich Null sein. Die Reihe (1) kann daher einfacher so geschrieben werden:

$$1') \quad \cos x = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots.$$

Daher denn auch die andern Reihen sich vereinfachen, nämlich:

$$2') \quad \cos y = 1 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + A_6 y^6 + \ldots.$$

$$3') \quad \cos(x+y) = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots. \\ + 2 A_2 xy + 4 A_4 x^3 y + \ldots. \\ + A_2 y^2 + 6 A_4 x^2 y^2 + \ldots. \\ + 4 A_4 x y^3 + \ldots. \\ + A_4 y^4 + \ldots.$$

$$4') \quad \cos(x-y) = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots. \\ - 2 A_2 xy - 4 A_4 x^3 y - 6 A_6 x^5 y - \ldots. \\ + A_2 y^2 + 6 A_4 x^2 y^2 + 15 A_6 x^4 y^2 + \ldots. \\ - 4 A_4 x y^3 - 20 A_6 x^3 y^3 - \ldots. \\ + A_4 y^4 + 15 A_6 x^2 y^4 + \ldots. \\ - 6 A_6 x y^5 - \ldots. \\ + A_6 y^6 + \ldots.$$

Nun ist $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] =$

$$5) \quad \begin{cases} 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots. \\ + (A_2 + 6 A_4 x^2 + 15 A_6 x^4 + \ldots.) y^2 \\ + (A_4 + 15 A_6 x^2 + \ldots.) y^4 \\ + \ldots. \end{cases}$$

Und aus $(1')$ und $(2')$ ist $\cos x \cdot \cos y =$

$$6) \quad \begin{cases} 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots. \\ + (A_2 + A_2^2 x^2 + A_2 A_4 x^4 + A_2 A_6 x^6 + \ldots.) y^2 \\ + (A_4 + A_4 A_2 x^2 + A_4^2 \cdot x^4 + A_4 A_6 x^6 + \ldots.) y^4 \\ + \ldots. \end{cases}$$

Die Ausdrücke rechts in den Gleichungen (5) und (6) müssen nun für jeden Werth von y einander gleich sein; also müssen die Coëfficienten gleich hoher Potenzen in beiden Ausdrücken beziehlich einander gleich sein, also namentlich die Coëfficienten von y^2, d. h.:

$$A_2 + 6 A_4 x^2 + 15 A_6 x^4 + 28 A_8 x^6 + \ldots. \\ = A_2 + A_2^2 x^2 + A_2 A_4 x^4 + A_2 A_6 x^6 + \ldots. .$$

Da aber auch diese Gleichung wieder für jeden Werth von x gültig bleiben muß, so müssen die Coëfficienten derselben Potenzen von x beziehlich einander gleich sein, d. h. es ist:

$$A_2 = A_2$$

$$A_2^2 = 6 A_4 \quad \text{also} \quad A_4 = \frac{A_2^2}{6} = \frac{(2 A_2)^2}{4!}$$

$$A_2 A_4 = 15 A_6 \quad \text{»} \quad A_6 = \frac{A_2^3}{6 \cdot 15} = \frac{(2 A_2)^3}{6!}$$

$$A_2 A_6 = 28 A_8 \quad \text{»} \quad A_8 = \frac{A_2^4}{6 \cdot 15 \cdot 28} = \frac{(2 A_2)^4}{8!}$$

u. s. w. u. s. w.

Berechnet man in gleicher Weise noch mehr Glieder, so wird man finden, daß, wenn n jede ganze Zahl bedeutet, dann alle Glieder erhalten werden können, wenn man in der Gleichung:

$$A_{2n} = \frac{(2\,A_2)^n}{(2\,n)!}$$

statt n nach und nach alle ganzen Zahlen setzt, so daß also:

$$\cos x = 1 + \frac{(2\,A_2)}{2!} \cdot x^2 + \frac{(2\,A_2)^2}{4!} \cdot x^4 + \frac{(2\,A_2)^3}{6!}\, x^6 + \ldots,$$

wo indeß A_2 noch unbestimmt geblieben ist.

Aufgabe 2. Sin x in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze:

1) $\sin x = B_0 + B_1\, x + B_2\, x^2 + B_3\, x^3 + B_4\, x^4 + \ldots$

Da indessen $\sin 0 = 0$, und die Reihe (1) für $x = 0$ den Werth B_0 liefert, so muß offenbar $B_0 = 0$ sein. Da überdies $\sin(-x) = -\sin x$, so muß die Reihe (1) für entgegengesetzte Werthe von x auch selbst entgegengesetzte Werthe annehmen, die jedoch, absolut genommen, gleich groß sind. Dies ist nur möglich, wenn die Reihe (1) gar keine geraden Potenzen von x enthält, sondern lauter ungerade. Daher läßt sich denn die Reihe (1) bequemer so schreiben:

1′) $\sin x = B_1\, x + B_3\, x^3 + B_5\, x^5 + B_7\, x^7 + \ldots$

In derselben Weise, wie oben bei Aufgabe 1 das analoge Gesetz, findet man hier durch Subtraction der dort gebrauchten Gleichungen:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$$

$$\tfrac{1}{2}\,[\cos(x - y) - \cos(x + y)] = \sin x \cdot \sin y.$$

Setzt man also nun in (1′) y statt x, so erhält man:

2) $\sin y = B_1\, y + B_3\, y^3 + B_5\, y^5 + B_7\, y^7 + \ldots$

Die Gleichung (1′) mit (2) multiplicirt, gibt:

$$3)\ \sin x \cdot \sin y = (B_1^{\,2} \cdot x + B_1 B_3\, x^3 + B_1 B_5\, x^5 + B_1 B_7\, x^7 + \ldots)\, y + (B_3 B_1\, x + B_3^{\,2}\, x^3 + B_3 B_5\, x^5 + B_3 B_7\, x^7 + \ldots)\, y^3 + \ldots$$

Die Ausdrücke für cos (x + y) und cos (x — y) sind schon bei Aufgabe 1 entwickelt worden und brauchen also jetzt nur von einander subtrahirt zu werden; dann erhält man:

$$4)\ \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} = -(2\,A_2\, x + 4\,A_4\, x^3 + 6\,A_6\, x^5 + \ldots)\, y - (4\,A_4\, x + 20\,A_6\, x^3 + \ldots)\, y^3 - \ldots$$

Da nun die Reihen (3) und (4) einander gleich sein müssen, so müssen die

Coëfficienten der einzelnen gleichen Potenzen von y beziehlich einander gleich sein, also:

$$5) \quad B_1^2 x + B_1 B_3 x^3 + B_1 B_5 x^5 + B_1 B_7 x^7 + \ldots$$
$$= -2 A_2 x - 4 A_4 x^3 - 6 A_6 x^5 - 8 A_8 x^7 - \ldots$$

wo wieder die einzelnen Coëfficienten der gleichen Potenzen von x beziehlich einander gleich sein müssen, nämlich:

$$B_1^2 = -2 A_2 \quad \text{also:} \quad 2 A_2 = -B_1^2$$
$$B_1 B_3 = -4 A_4 \qquad B_3 = -\frac{B_1^3}{3!}$$
$$B_1 B_5 = -6 A_6 \qquad B_5 = +\frac{B_1^5}{5!}$$
$$B_1 B_7 = -8 A_8 \qquad B_7 = -\frac{B_1^7}{7!} \quad \text{u. s. w.}$$

also allgemein: $B_{2n+1} = (-1)^n \cdot \dfrac{B_1^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Substituirt man nun diese Werthe von B_3, B_5, B_7 &c. in die Reihe (1′) und setzt man gleichzeitig $-B_1^2$ statt $2 A_2$ in die (Aufgabe 1) für cos x gefundene Reihe, so erhält man sowol sin x als cos x in der verlangten Form ausgedrückt, nur daß nun noch B_1 zu bestimmen übrig bleibt. Man bekommt nämlich:

$$\text{I.} \quad \sin x = B_1 x - \frac{(B_1 x)^3}{3!} + \frac{(B_1 x)^5}{5!} - \frac{(B_1 x)^7}{7!} + \ldots$$

$$\text{II.} \quad \cos x = 1 - \frac{(B_1 x)^2}{2!} + \frac{(B_1 x)^4}{4!} - \frac{(B_1 x)^6}{6!} + \ldots$$

Aufgabe 3. In der Sinus- und Cosinusreihe den noch unbestimmt gebliebenen Coëfficienten B_1 zu bestimmen.

Auflösung. Um einen Punkt C (Fig. 16) schlage man einen Kreis, ziehe die Radien CA, CB so, daß sie den spitzen Winkel ACB bilden, fälle von B das Loth BS auf CA und verlängere es bis V, wo es die Kreislinie zum zweiten male trifft; in A lege man eine Tangente AT an den Kreis und verlängere CB bis zum Convergenzpunkte T: so läßt sich erweisen, daß Bogen

AB > BS,

und Bogen AB < AT.

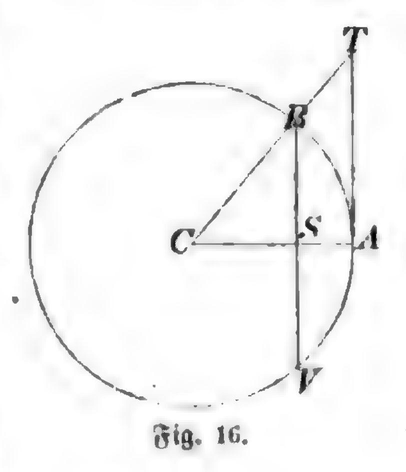


Fig. 16.

Die gerade Linie BV ist offenbar kleiner als der Bogen BAV zwischen denselben Punkten B und V. Also auch $\frac{1}{2}$ BV < $\frac{1}{2}$ BAV, d. h. BS < Bogen BA.

Der Inhalt des rechtwinkeligen Dreiecks ACT ist = $\frac{1}{2}$ AC · AT; der Inhalt des Sectors ACB ist = $\frac{1}{2}$ AC · AB; demnach:

$$\triangle ACT : \text{Sector } ACB = \tfrac{1}{2} AC \cdot AT : \tfrac{1}{2} AC \cdot AB$$
$$= AT : AB.$$

Aber $\angle ACT >$ Sector ACB; folglich muß auch $AT > AB$ sein. Es ist also Bogen $AB > BS$,
aber Bogen $AB < AT$.

Nun ist: $$AT : BS = AC : CS,$$

also: $$AT = \frac{BS \cdot AC}{CS}.$$

Setzt man den Radius $AC = 1$, so ist
$$AT = \frac{BS}{CS} = \frac{BS}{\sqrt{1 - BS^2}};$$

folglich ist 1) $$\text{Bogen } AB > BS,$$

aber 2) $$\text{Bogen } AB < \frac{BS}{\sqrt{1 - BS^2}}.$$

Bedeutet nun x die Länge des Bogens AB für den Radius 1, so ist $AC = BC = 1$ und $\frac{BS}{BC} = \frac{BS}{1} = BS = \sin x$. Folglich ist, nach (1) und (2):

3) $$x < \sin x,$$

4) $$x < \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}}.$$

Da alle hier vorkommenden Zahlen positiv sind, so hat man aus (4) auch:
$$x^2 < \frac{\sin x^2}{1 - \sin x^2},$$

oder: $$x^2 (1 - \sin x^2) < \sin x^2,$$
d. h. $$x^2 - x^2 \sin x^2 < \sin x^2$$
$$x^2 < (1 + x^2) \sin x^2,$$

also 5) $$\sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

während nach (3) $\sin x < x$.
Es ist also nach (3): $\sin x - x$ negativ, während nach (5): $\sin x - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ positiv ist, wenn nur x den Bogen irgend eines spitzen Winkels bezeichnet. Es ist aber:

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = x (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = x (1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \ldots.) \text{ (§. 19)}$$
$$= x - \tfrac{1}{2} x^3 + \ldots.$$

Da nun nach, §. 25, Aufg. 2, I:

$$\sin x = B_1 \cdot x - \frac{(B_1\, x)^3}{3!} + \dots$$

und

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x - \tfrac{1}{2} x^3 + \dots,$$

so ist 6)

$$\sin x - x = (B_1 - 1)\, x - \frac{(B_1\, x)^3}{3!} + \dots$$

7)

$$\sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (B_1 - 1)\, x + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{B_1^{\,3}}{3!}\right) x^3 + \dots$$

Der Ausdruck in (6) soll für jeden Werth von x negativ (3), der in (7) für jeden Werth von x positiv werden (5); nun kann man sich ein so kleines x eingesetzt denken, daß die nach dem ersten folgenden Glieder, welche die höhern Potenzen von x enthalten, zusammen kleiner werden, als das erste Glied; dann hängt auch das Zeichen des ganzen Ausdrucks lediglich vom Zeichen des ersten Gliedes ab. Da aber dieses erste Glied in beiden Reihen (6) und (7) dasselbe ist, so kann der Bedingung, daß die eine negativ und für denselben Werth von x, die andere positiv werde, nicht anders entsprochen werden, als wenn das erste Glied gleich Null wird, d. h. wenn:

$$B_1 - 1 = 0$$

oder

$$B_1 = 1$$

wird.

Hiermit ist denn der Coëfficient B_1 bestimmt, und die Reihen (I) und (II) der vorigen Aufgabe lauten nun:

III.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

IV.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

wo x die Länge des dem Winkel x zugehörigen Bogens für den Radius 1 vorstellt. Wäre x der Winkel, etwa in Secunden ausgedrückt, so müßte man nach §. 24 ihn noch durch ω dividiren und erhielte dann:

$$\sin x = \left(\frac{x}{\omega}\right) - \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^3 + \frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^5 - \frac{1}{7!} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{x}{\omega}\right)^6 + \dots$$

---

3. Ausdruck für den Bogen durch seinen Sinus.

§. 26. **Aufgabe.** Es ist $y = \sin x$ gegeben; man soll x in eine nach ganzen Potenzen von y fortschreitende Reihe verwandeln, d. h. man soll den Bogen x durch eine nach ganzen Potenzen des Sinus fortschreitende Reihe ausdrücken.

Auflösung. Man setze:

1) $$x = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots.$$

wo A, B, C, D .... unbestimmte Coëfficienten sind. Man hat nur nöthig, die ungeraden Potenzen von y zu setzen, weil, da $\sin(-x) = -\sin x$, also wenn $\sin x = y$, auch $\sin(-x) = -y$ ist, d. h. weil, so oft der Sinus (nämlich y) sein Zeichen wechselt, der Bogen x ebenfalls genau den entgegengesetzten Werth annehmen muß, was nur möglich ist, wenn die den Bogen ausdrückende Reihe keine geraden Potenzen des Sinus (y) enthält. Da nun $y = \sin x$ gegeben, so ist, nach §. 24 eigentlich:

2) $$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Aus (1) berechne man nun alle in (2) vorkommenden, also alle ungeraden Potenzen von x und setze deren Werth in (2) ein. Auf diesem Wege erhält man erstlich aus (1):

$$\begin{aligned}
x &= Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots.\\
x^3 &= A^3y^3 + 3\cdot A^2By^5 + 3\cdot AB^2y^7 + B^3y^9 + \ldots.\\
&\quad + 3\cdot A^2Cy^7 + 3\cdot AC^2y^{11} + C^3y^{15} + \ldots.\\
&\quad + 3\cdot A^2Cy^9 + 3\cdot AD^2y^{15} + D^3y^{21} + \ldots.\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^5 &= A^5y^5 + 5\cdot A^4By^7 + 10\cdot A^3B^2y^9 + \ldots.\\
&\quad + 5\cdot A^4Cy^9 + 10\cdot A^3C^2y^{13} + \ldots.\\
&\quad + 5\cdot A^4Dy^{11} + 10\cdot A^3D^2y^{17} + \ldots.\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^7 &= A^7y^7 + 7\cdot A^6By^9 + 21\cdot A^5By^{11} + \ldots.\\
&\quad + 7\cdot A^6Cy^{11} + 21\cdot A^5Cy^{15} + \ldots.\\
&\quad + 7\cdot A^6Dy^{13} + 21\cdot A^5Dy^{19} + \ldots.\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Setzt man nun diese Werthe in (2) ein, so erhält man:

3) $$y = Ay + \left.\begin{matrix}B\\ -\frac{1}{6}A^3\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}+C\\ -\frac{1}{2}A^2B\\ +\frac{1}{120}A^5\end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix}+D\\ -\frac{1}{2}AB^2\\ -\frac{1}{2}A^2C\\ +\frac{1}{24}A^4B\\ -\frac{1}{5040}A^7\end{matrix}\right\} y^7 + \text{u. s. w.}$$

und hierin müssen nun die Coëfficienten der gleichen Potenzen von y links und rechts einander gleich sein; also:

$A = 1$;

$B - \frac{1}{6}A^3 = 0$, d. h. $B = \frac{1}{6}$;

$C - \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{120}A^5 = 0$, d. h. $C = \frac{3}{40}$;

$D - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}A^2C + \frac{1}{24}A^4B - \frac{1}{5040}A^7 = 0$; d. h. $D = \frac{5}{112}$;

u. s. w. Also ist denn:

$$x = y + {}^1/_6\, y^3 + {}^3/_{40}\, y^5 + {}^5/_{112}\, y^7 + \ldots.$$

Um jedoch das Fortschreitungsgesetz dieser Reihe sichtbar zu machen, kann man ihr, wie man sich leicht überzeugen wird, folgende Form geben:

$$4)\quad x = y + {}^1/_3 \cdot {}^1/_2 y^3 + {}^1/_5 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^5 + {}^1/_7 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^7 + \ldots.$$

oder:

$$5)\quad x = \sin x + {}^1/_3 \cdot {}^1/_2 \sin x^3 + {}^1/_5 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin x^5 + {}^1/_7 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin x^7 + \ldots$$

weil eben y nichts anderes als sin x bedeuten sollte.

D. Aus der Differentialrechnung.

§. 27. Stellt f(x) eine Function von x vor, und f(x + h) das, was aus f(x) wird, wenn man darin überall, wo x vorkommt, x + h statt x setzt, so ist

$$1)\qquad f(x + h) - f(x)$$

die Aenderung, welche f(x) dadurch erfahren hat. Entwickelt man dann f(x + h) in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe, dividirt die nach (1) gefundene Aenderung von f(x) durch h und setzt nachgehends h = 0, so heißt der so aus f(x) gewonnene Ausdruck die Ableitung der Function f(x) nach x. Sie wird mit df(x) bezeichnet.

Es sei z. B. $f(x) = ax^m$,

so ist:
$$f(x + h) = a \cdot (x + h)^m$$
$$= ax^m + am_1 x^{m-1} \cdot h + am_2 x^{m-2} h^2 + \ldots.$$

also ist dann: $f(x + h) - f(x) = amx^{m-1} \cdot h + am_2 x^{m-2} h^2 + \ldots.$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = amx^{m-1} + am_2 x^{m-2} h + \ldots.$$

und für h = 0 wird dieser Ausdruck $= amx^{m-1}$; dies ist also die Ableitung von ax^m nach x genommen, oder es ist $df(x) = amx^{m-1}$.

Wäre (1) $f(x) = a + bx^m$, so würde der Summand a, da er kein x enthält, auch kein h bekommen; es ist also

$$f(x + h) = a + b(x + h)^m$$
$$= a + bx^m + bmx^{m-1}h + \ldots.$$
$$f(x) = a + bx^m$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = bmx^{m-1}$$

für h = 0.

Also $df(x) = bmx^{m-1}$.

Ein von x unabhängiger Summand a verschwindet also aus der Ableitung nach x.

Es sei 2) $f(x) = a^x$,

so ist: $f(x + h) = a^{x+h} = a^x \cdot a^h$.

Nun ist (§. 20): $a^h = 1 + \frac{\log \text{nat } a}{1} \cdot h + \frac{(\log \text{nat } a)^2}{2!} \cdot h^2 + \ldots .$

Also $f(x + h) = a^x + \frac{a^x \cdot \log \text{nat} \cdot a}{1} \cdot h + \frac{a^x \cdot (\log \text{nat } a)^2}{2!} \cdot h^2 + \ldots .$

$$d\, f(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \log \text{nat} \cdot a.$$

für $h = 0$.

3) Für $f(x) = \frac{a}{x^m}$ würde man setzen:

$$f(x) = a x^{-m}$$

und fände auf demselben Wege:

$$df(x) = -a m x^{-(m+1)} = -\frac{a m}{x^{m+1}}.$$

Es sei 4) $f(x) = \sin x$,

so ist $f(x + h) = \sin (x + h)$

$$df(x) = \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} \text{ für } x = 0;$$

$$\sin (x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$$\sin (x + h) - \sin x = \cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h)$$

$$df(x) = \frac{\cos x \sin h}{h} - \frac{\sin x (1 - \cos h)}{h} \text{ für } h = 0.$$

Nun ist (§. 25):

$$\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{3!} + \ldots .$$

und für $h = 0$, $\frac{\sin h}{h} = 1$;

ferner ist wieder nach §. 25:

$$\frac{1 - \cos h}{h} = \frac{h}{2!} - \frac{h^3}{4!} + \ldots .$$

und für $h = 0$, $\frac{1 - \cos h}{h} = 0$,

also: $df(x) = \cos x$.

Es sei 5) $f(x) = \cos x$,

so ist $f(x + h) = \cos (x + h)$

$$= 1 - \frac{(x + h)^2}{2!} + \frac{(x + h)^4}{4!} - \frac{(x + h)^6}{6!} + \ldots . \text{ (§. 25)}$$

$$f(x+h) = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{2xh + h^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{4!}$$
$$- \frac{x^6}{6!} - \frac{6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + \ldots.}{6!}$$
$$+ \frac{x^8}{8!} + \frac{8x^7h + 28x^6h^2 + \ldots.}{8!}$$
$$- \frac{x^{10}}{10!} - \frac{10x^9h + \ldots.}{10!}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$f(x+h) - f(x) = -\frac{2xh + h^2}{2!} + \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + \ldots.}{4!}$$
$$- \frac{6x^5h + 15x^4h^2 + \ldots.}{6!}$$
$$+ \frac{8x^7h + \ldots.}{8!}$$
$$- \frac{10x^9h + \ldots.}{10!}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots. \text{ für } h = 0,$$

$$d\,f(x) = -\sin x.$$

Es ist bei diesem Beispiele ein anderer Weg betreten worden als beim vorigen, um dem Anfänger zu zeigen, daß man durch verschiedene Methoden zum Ziele gelangen kann.

§. 28. Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Functionen von x; soll von $f(x) \pm \varphi(x)$ die Ableitung nach x gesucht werden, so hat man:

$$d[f(x) \pm \varphi(x)] = \frac{[f(x+h) \pm \varphi(x+h)] - [f(x) \pm \varphi(x)]}{h}$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

wenn nur nachgehends $h = 0$ gesetzt wird. Also ist:

$$d[f(x) \pm \varphi(x)] = d\,f(x) \pm d\,\varphi(x).$$

Die Ableitung von der Summe oder Differenz zweier Functionen desselben Veränderlichen ist gleich der Summe oder Differenz der Ableitungen jeder einzelnen Function nach demselben Veränderlichen.

Hätte man aber $f(y) \pm \varphi(x)$ und enthielte $f(y)$ gar kein x, so wäre $d f(y) = 0$, vorausgesetzt, daß diese Ableitung nach x genommen sei, d. h. daß man x in $x + h$ übergehen lasse und $f(x)$ subtrahire, durch h dividire und $h = 0$ setze, weil eben in $f(y)$ kein x vorhanden ist; also reducirte sich dann die nach x genommene Ableitung auf $\pm d\varphi(x)$.

§. 29. Eine in der eben beschriebenen Weise gebildete Ableitung einer Function von x wird im allgemeinen selber wieder eine Function von x sein. Man kann also von neuem die Ableitung nach x davon bilden, sie zum zweiten male nach x ableiten. Diese zweite Ableitung wird durch d^2 bezeichnet, eine dritte durch d^3 u. s. w.

Es sei
$$f(x) = 5\,a x^3,$$
so ist:
$$\begin{aligned} d f(x) &= 15\,a x^2 \\ d^2 f(x) &= 30\,a x \\ d^3 f(x) &= 30\,a \\ d^4 f(x) &= 0. \end{aligned}$$

§. 30. Gewöhnlich bezeichnet man die Aenderung h des Veränderlichen x durch dx, die Aenderung der Function $f(x)$, also den Ausdruck
$$f(x + dx) - f(x)$$
durch $df(x)$, so daß dann
$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$
ist, wenn man sich dx im Momente des Verschwindens denkt. Es ist also
$$\frac{df(x)}{dx} = df(x).$$
Das Zeichen $\frac{df(x)}{dx}$ heißt ein Differentialquotient, dx das Differential von x, $df(x)$ das von $f(x)$. Für eine Function den Differentialquotienten bilden, heißt die Function differentiiren. Der Differentialquotient ist gleich der Ableitung.

§. 31. Entwickelt man nach dem binomischen Satze die Potenz $(x + h)^m$, so wird man finden, daß der Coëfficient von h in der Entwickelung der Ableitung von x^m gleich ist: daß ferner der Coëfficient von h^2 gleich $\frac{d^2 x^m}{2!}$, der von h^3 gleich $\frac{d^3 x^m}{3!}$ u. s. w. ist, so daß man also den binomischen Satz sehr wohl auch so schreiben könnte:
$$(x + h)^m = x^m + \frac{dx^m}{1!} \cdot h + \frac{d^2 x^m}{2!} h^2 + \frac{d^3 x^m}{3!} \cdot h^3 + \ldots.$$

Entwickelt man in derselben Weise $\sin(x + h)$ mit Hülfe der Formel §. 25, so erhält man:

$$\sin(x+h) = (x+h) - \frac{(x+h)^3}{3!} + \frac{(x+h)^5}{5!} - \ldots$$

Löst man hier die Potenzen nach dem binomischen Satze auf und ordnet nach Potenzen von h, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(x+h) = x &- \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots \\ &+ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)\frac{h}{1!} \\ &- \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\frac{h^2}{2!} \\ &- \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)\frac{h^3}{3!} \\ &+ \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\frac{h^4}{4!} \\ &- \ldots \ldots \ldots \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

oder:

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \cdot \frac{h}{1!} - \sin x \cdot \frac{h^2}{2!} - \cos x \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

d. h.

$$\sin(x+h) = \sin x + d\sin x \cdot \frac{h}{1!} + d^2\sin x \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3\sin x \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

weil

$$\begin{aligned} d\sin x &= \cos x \\ d^2\sin x &= d\cos x = -\sin x \\ d^3\sin x &= -d\sin x = -\cos x \\ d^4\sin x &= -d\cos x = \sin x \quad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Versucht man dieselbe Rechnung mit beliebigen andern Functionen, so wird man immer finden, daß, wenn man in f (x) x + h statt x setzt, f (x + h) sich in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln läßt nach der Form:

$$f(x+h) = f(x) + d\,f(x) \cdot \frac{h}{1!} + d^2 f(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3 f(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Die Analysis weist diesen Satz für alle Fälle allgemein nach und gibt dem Satze nach seinem Erfinder den Namen des Taylor'schen Lehrsatzes.

§. 32. Ist f (x) eine Function von x und man denkt sich h im Moment des Verschwindens, so stellt f (x + h) den Werth von f (x) vor, wenn x um das unendlich kleine h zugenommen oder abgenommen hat, je nachdem h positiv oder negativ gedacht wird. In beiden Fällen drückt

$$f(x+h) - f(x)$$

die Aenderung aus, welche f(x) durch das Wachsthum oder die Abnahme von x erfährt.

Aus der Taylor'schen Reihe ist ersichtlich, daß die Aenderung

$$f(x+h) - f(x)$$
$$= df(x) \cdot h + d^2 f(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3 f(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots$$

Denkt man sich h im Moment des Verschwindens, so hängt das (±) Zeichen der Reihe rechts lediglich von dem Zeichen des ersten Gliedes ab, weil die folgenden Glieder nur höhere Potenzen von h enthalten, welche gegen die erste verschwinden. Ist also $df(x)h$ positiv, so ist:

$$f(x+h) > f(x),$$

und ist $df(x) \cdot h$ negativ, so ist umgekehrt:

$$f(x+h) < f(x),$$

und wenn für ein positives h das eine der Fall ist, so tritt für ein negatives das andere ein. Ist also $df(x)$ positiv, so nimmt die Function f(x) zu und ab mit x zugleich, und ist $df(x)$ negativ, so nimmt f(x) ab, wenn x wächst und umgekehrt.

Es sind nun aber Werthe von x denkbar, welche $df(x) = 0$ machen; dann fängt der Unterschied

$$f(x+h) - f(x)$$

mit der zweiten Potenz von h an, welche für positive und negative h gleichmäßig positiv bleibt. Also ändert denn $f(x+h) - f(x)$ sein Zeichen nicht mit h zugleich, es bleibt positiv, wenn $d^2 f(x)$ positiv ist, mag man $x+h$ oder $x-h$ statt x setzen, und wird für beide Werthe von x negativ, wenn $d^2 f(x)$ negativ ist. Im ersten Falle sind die Nachbarwerthe von f(x), der für das nächstgrößere x, wie der für das nächstkleinere x, beide größer als f(x); also hat dann f(x) einen kleinsten Werth, ein Kleinstes oder Minimum erreicht. Ist dagegen $d^2 f(x)$ negativ (während immer $df(x) = 0$), so sind beide Nachbarwerthe von f(x) kleiner als f(x) selbst (weil nun $f(x+h) - f(x)$ negativ ist); also hat dann f(x) einen größten Werth, ein Größtes oder Maximum erreicht.

Um also den Werth von x zu finden, welcher eine Function von x zu einem Minimum oder Maximum macht, differentiirt man die Function nach x, setzt das Differentiale gleich Null und löst diese Gleichung nach x auf. Verlangt man dann den kleinsten oder größten Werth der Function für diesen Werth von x zu wissen, so setze man den aus der Gleichung gefundenen Werth statt x in die Function ein. Um nun noch zu erfahren, ob dieser Werth ein Minimum oder ein Maximum sei, nehme man das zweite Diffe-

rential der Function f(x); ist dieses positiv, so ist der fragliche Werth ein Minimum, ist es negativ, so ist jener Werth ein Maximum.

Ist z. B. $a x (x - b) = f(x)$ gegeben, so ist:

$$d f(x) = 2 a x - a b = 0$$
$$x = \frac{1}{2} b.$$

Für diesen Werth von x ist f(x) $\frac{1}{4} a b^2$. Ferner ist: $d^2 f(x) = 2 a$, also positiv; der Werth $x = \frac{1}{2} b$ macht also f(x) zu einem Minimum.

E. Elemente der Coordinatentheorie.

§. 33. Ein Punkt in der Ebene ist seiner Lage nach bestimmt, wenn man weiß, daß er in einer in der Ebene gegebenen Geraden liegt, und wie weit er von einem in dieser Geraden gegebenen Punkte nach der einen oder andern Seite absteht. Z. B. P oder Q (Fig. 17) ist bestimmt und gegeben, wenn die Gerade M N ihrer Lage nach, und der Punkt A in M N seiner Lage nach gegeben ist, und wenn endlich noch bekannt ist, daß P um die Größe $AP = a$ von A aus nach N hin, Q um die Größe $AQ = b$ von A aus nach M hin liegt. Die gegenseitige Entfernung der Punkte P und Q, oder die Gerade P Q ist hier offenbar $= a + b$.

M S Q A R P N

Fig. 17.

Liegen aber die Punkte P, R auf derselben Seite von A und ist $AR = c$, so ist $PR = AP - AR = a - c$. Liegen also zwei Punkte auf derselben Seite von A, so ist ihre gegenseitige Entfernung von einander gleich der Differenz ihrer Entfernungen von demselben Punkte A; liegen dagegen die Punkte auf verschiedenen Seiten von A, so ist ihre gegenseitige Entfernung gleich der Summe ihrer Entfernungen vom Punkte A. Der Punkt A mag der Anfangspunkt der Zählung oder Messung heißen.

Die beiden eben angeführten Gesetze lassen sich indeß auf eins zurückführen, wenn man sich aus den Elementen der Zahlenlehre erinnert, daß die Differenz zweier positiven Zahlen auch als Summe einer positiven und einer negativen Zahl dargestellt werden kann, daß nämlich:

$$a - b = a + (-b).$$

Um daher beide Gesetze in eins zusammengefaßt zu sehen, brauchen wir nur das auf eine beliebige Einheit bezogene Maß b der Linie A Q als eine negative Zahl zu betrachten, wenn das auf dieselbe Einheit bezogene Maß a der Linie A P als positive Zahl dargestellt worden ist, weil dann die Summe

der Entfernungen sich in der That in eine Differenz verwandelt. Zu demselben Ziele gelangt man auch, wenn man das Maß b der Linie AQ als positive, dagegen das Maß a der Linie AP als negative Zahl betrachtet; denn dann ist:

$$PQ = b + (-a) = b - a,$$

nur daß jetzt die Differenz b — a den entgegengesetzten Werth von der frühern a — b hat.

Da auf diese Weise der Gegensatz der Richtung bequem und sicher durch die entgegengesetzten Vorzeichen der Maße der Linien bezeichnet werden kann, so ist es zu einem Princip geworden, eine Linie, die einer andern gerade entgegengesetzt gerichtet ist, durch ein ihrem Maße vorgesetztes (—) Zeichen auszudrücken, oder ihr Maß als negative Zahl zu betrachten, wenn das Maß der andern als positive Zahl ausgedrückt worden ist. Nimmt man AN als die Seite der positiven Maße, also AM als die der negativen Maße an, und ist das Maß von AS, abgesehen von der Lage der Linie AS, = d, so ist:

$$PS = a - (-d) = a + d,$$
$$RS = c - (-d) = c + d,$$
$$QS = AS - AQ = (-d) - (-b) = b - d.$$

Da, absolut genommen, $b < d$, also $(-b) > (-d)$, so ist $(-d) - (-b)$ oder b — d eine negative Zahl, etwa = — q, unter q selbst eine positive Zahl verstanden.

Es ist wohl zu beachten, daß die Linien selber nie positiv oder negativ, sondern immer nur **absolut**, d. h. weder positiv noch negativ sein können; blos ihre in Zahlen ausgedrückten Maße können diesen Gegensatz der Zeichen bekommen.

Hätte man nun irgend einen beliebigen Maßstab zu Grunde gelegt, z. B. einen solchen, wo eine Ruthe durch 0,1 Zoll ausgedrückt würde, und es wäre ein Punkt B in der Linie MN (Fig. 18) durch das Maß seines Ab-

Fig. 18.

standes von A = + 3 R., ein anderer C durch das Maß — 5 R., D durch das Maß — 11 R. und E durch das Maß + 8 R. gegeben, wo alle Maße auf den Maßstab XZ bezogen sind, so wäre die Lage dieser Punkte folgende:

$$BE = 8 - 3 = +5 \text{ R.}$$
$$CD = (-5) - (-11) = +6 \text{ R.}$$
$$BC = 3 - (-5) = +8 \text{ R.}$$
$$BD = 3 - (-11) = +14 \text{ R.}$$
$$CE = 8 - (-5) = +13 \text{ R.}$$
$$DE = 8 - (-11) = +19 \text{ R.}$$

Da z. B. das Maß von AE, nämlich + 8, größer ist als das von AD, — 11, die Linie DE aber absolut ist, so dürfte man als Ausdruck für die Linie DE nicht die Differenz (— 11) — 8 = — 19 setzen, weil dann die Linie DE negativ würde, was keinen Sinn hat. Die Linie DE hält immer 19 R. und zwar absolut, ebenso AD 11 R.; — 11 R. drückt blos den Gegensatz der Richtung aus. Es stellt sich hier die Regel heraus, daß immer die kleinere Zahl von der größern subtrahirt werden muß; wenn aber $p > q$, so ist $-p < -q$, also $(-q) - (-p)$ absolut, aber $(-p) - (-q)$ negativ.

§. 34. Soll die Lage eines oder mehrerer Punkte in der Ebene bestimmt werden, die nicht innerhalb einer der Lage nach gegebenen Geraden liegen, so nimmt man zwei auf einander senkrechte Gerade XX′, YY′ (Fig. 19) in der Ebene an, nennt sie Achsen und sucht die (senkrechten) Entfernungen jedes zu bestimmenden Punktes M von jeder dieser Achsen, MP, MQ. Da aber MP = AQ, und MQ = AP, so drückt auch AQ die Entfernung des Punktes M von der Achse XX′, AP die Entfernung de Punktes M von der Achse YY′ aus. AP wird mit x bezeichnet und heißt die Abscisse des Punktes M, AQ wird mit y bezeichnet und Ordinate des Punktes M genannt. Dadurch, daß man statt MP die Linie AQ nimmt, und statt MQ die Linie AP, reducirt man die Bestimmung des Punktes M auf die Bestimmung seiner Abscisse in der Geraden XX′ und seiner Ordinate in der Geraden YY′, also auf das Verfahren des §. 33.

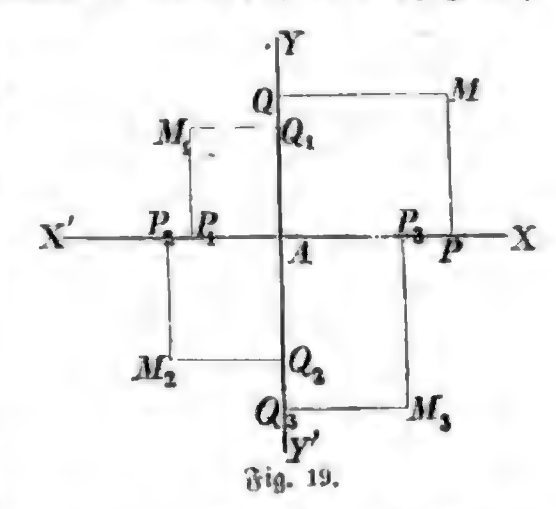


Fig. 19.

Die Maße x, y der Entfernungen des Punktes M von beiden rechtwinkeligen Achsen XX′ und YY′ heißen zusammen auch die Coordinaten oder Coordinatenwerthe des Punktes M in Bezug auf die Achsen XX′ und YY′; XX′ heißt die Abscissenachse, YY′ die Ordinatenachse, beide Achsen auch Coordinatenachsen, A ihr Anfangspunkt.

Anmerkung. Coordinaten des Punktes M sind eigentlich die Linien MP, MQ, Coordinatenwerthe ihre Maße als Zahlen, noch versehen mit den ihnen zukommenden Vorzeichen.

Alle Punkte mit gleichen Ordinaten liegen in einer mit der Abscissenachse parallelen Geraden, und alle Punkte mit gleichen Abscissen liegen in einer mit der Ordinatenachse parallelen Geraden.

Umgekehrt: alle Punkte einer mit der Abscissenachse parallelen Geraden haben gleiche Ordinaten, und alle Punkte einer mit der Ordinatenachse parallelen Geraden haben gleiche Abscissen.

Da das Loth MP an sich schon die Ordinate des Punktes M ausdrückt,

so kann man in den meisten Fällen die Ordinatenachse YY' ganz entbehren, wenn nur der Anfangspunkt A der Coordinaten in der Abscissenachse völlig bestimmt ist.

Die Ordinaten eines in der Abscissenachse liegenden Punktes ist Null, und die Abscisse eines in der Ordinatenachse liegenden Punktes ist auch gleich Null. Abscisse und Ordinate des Anfangspunktes sind beide gleich Null.

Die Abscissen- und Ordinatenachse theilen die Ebene in vier Räume XAY, YAX', $X'AY'$ und $Y'AX$ (Fig. 19), welche man Regionen nennt. Nimmt man eine davon willkürlich als die erste an, so heißt die jenseits der Ordinatenachse, aber auf derselben Seite der Abscissenachse liegende die zweite, die von der zweiten aus jenseits der Abscissenachse, aber mit der zweiten auf einerlei Seite der Ordinatenachse liegende die dritte, endlich die mit der dritten auf einerlei Seite der Abscissenachse, aber jenseits der Ordinatenachse liegende die vierte Region. Ist z. B. XAY die erste Region, so ist YAX' die zweite, $X'AY'$ die dritte und $Y'AX$ die vierte. In der ersten Region sind nun stets die Abscissen und Ordinaten positiv; nach §. 33 sind dann aber in der zweiten Region die Abscissen negativ und die Ordinaten positiv, in der dritten die Abscissen und Ordinaten negativ, in der vierten die Abscissen positiv und die Ordinaten negativ. Ist (Fig. 19) $MP = y$ das absolute Maß der Linie MP, ohne Rücksicht auf ihre Lage zu den Achsen, und sind ebenso $MQ = x$, $M_1P_1 = y_1$, $M_1Q_1 = x_1$, $M_2P_2 = y_2$, $M_2Q_2 = x_2$, $M_3P_3 = y_3$, $M_3Q_3 = x_3$; so sind die Coordinatenwerthe

des Punktes M .... $+y$, $+x$;
" " M_1 .... $+y_1$, $-x_1$;
" " M_2 .... $-y_2$, $-x_2$;
" " M_3 .... $-y_3$, $+x_3$;

wenn nur XAY als erste Region der Achsen angenommen wird.

Soll ein Dreieck verzeichnet werden, von dessen Eckpunkten A_1, A_2, A_3 (Fig. 20) die Coordinatenwerthe gegeben sind, nämlich: $x_1 = +13$, $y_1 = -8$; $x_2 = -5$, $y_2 = +11$; $x_3 = -14$, $y_3 = -12$, alles auf den Maßstab Fig. 18 bezogen: so trage man diese Maße, vom Anfangspunkte A der gegebenen oder willkürlich angenommenen rechtwinkeligen Achsen aus, auf diese, nach denjenigen Richtungen auf, welche durch die Vorzeichen bestimmt werden, die Ordinaten nach P_1, P_2, P_3, die Abscissen nach Q_1,

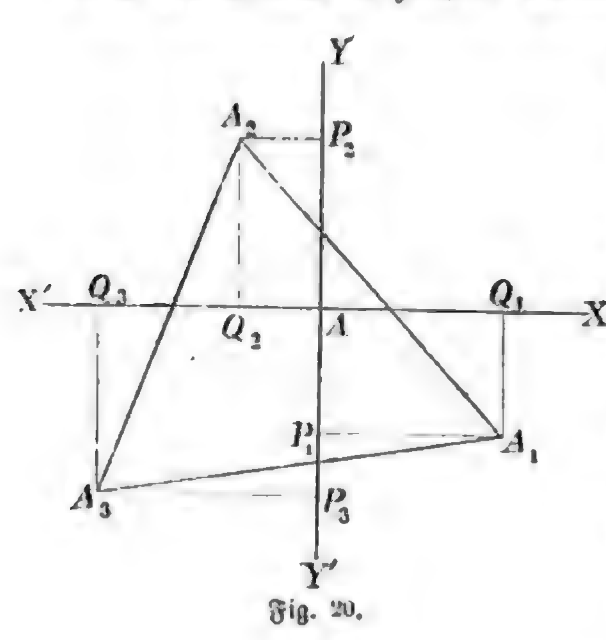


Fig. 20.

Q_2, Q_3, ziehe durch erstere Punkte Parallelen mit der Abscissenachse, durch letztere Parallelen mit der Ordinatenachse, so bestimmen sich die Ecken A_1, A_2, A_3 des Dreiecks.

§. 35. Legt man eine Gerade XX' (Fig. 21) als Achse zu Grunde, nimmt in ihr irgend einen Punkt O an, so daß OX als positive, OX' als negative Achsenrichtung gilt, und zieht nach einem zu bestimmenden Punkte M die Gerade OM: so ist M durch die Gerade $OM = r$ und den Winkel $MOX = v$, welchen OM mit der positiven Achsenrichtung macht, völlig bestimmt. Zur gehörigen Unterscheidung der möglichen Fälle wird noch festgestellt, daß der Winkel v stets derjenige Winkel sein soll, welchen r bei einer Drehung rechts herum durchlaufen muß, um in die Lage der positiven Achsenrichtung zu kommen, also im Falle der Fig. 21 der hohle Winkel MOX; der Pfeil im Winkel MOX zeigt die Richtung der Drehung an. Die Maße der Größen r und v heißen Polarcoordinaten, OX ist die Achse, O der Pol der Polarcoordinaten, $OM = r$ heißt der Radius Vector oder blos Vector, der Winkel $MOX = x$ die Anomalie des Punktes M.

Fig. 21.

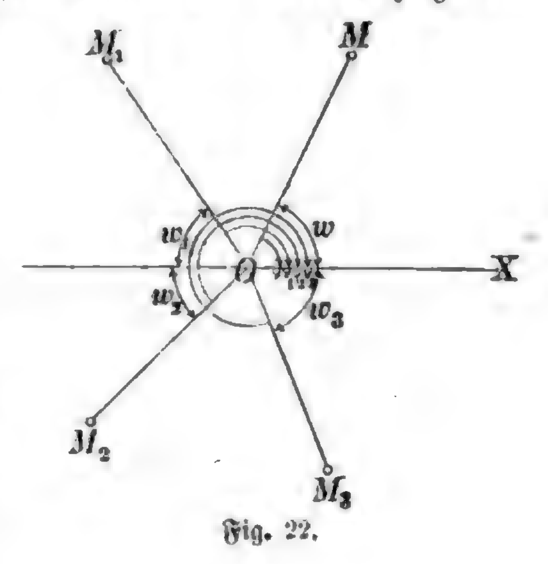


Fig. 22.

Heißen w, w_1, w_2, w_3 beziehlich die spitzen Winkel, welche die Vectoren der Punkte M, M_1, M_2, M_3 (Fig. 22) mit der Achse machen, so ist die Anomalie v in den einzelnen Fällen:

Für M ist $v = w$,
" M_1 " $v_1 = \pi - w$, d. h. $180° - w_1$,
" M_2 " $v_2 = \pi + w_2$ " $180° + w_2$,
" M_3 " $v_3 = 2\pi - w_3$ " $360° - w_3$.

§. 36. Sind von einem Punkte M die Polarcoordinaten r und v gegeben, und man nimmt die Achse der Polarcoordinaten zur Abscissenachse, den Pol zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so ist die Abscisse des Punktes M stets gleich dem Producte aus dem Vector und dem Cosinus der Anomalie, die Ordinate gleich dem Producte aus dem Vector und dem Sinus der Anomalie.

Für den Punkt M (Fig. 23) ist nämlich $v = w$, $MP = y$, $OP = x$, und eben weil $v = w$, ist v ein spitzer Winkel und M liegt in der ersten Region, also sind x und y positiv; daher ist:

$$x = r \cdot \cos v \text{ und } y = r \cdot \sin v.$$

Für M_1 ist $v_1 = \pi - w_1$ oder $w_1 = \pi - v_1$,

$$x_1 = r_1 \cdot \cos w_1 \text{ und } y_1 = r_1 \cdot \sin w_1$$

d. h. $$x_1 = r_1 = \cos(\pi - v_1) = - r_1 \cdot \cos v_1$$

und $$y_1 = r_1 \cdot \sin(\pi - v_1) = r_1 \cdot \sin v_1.$$

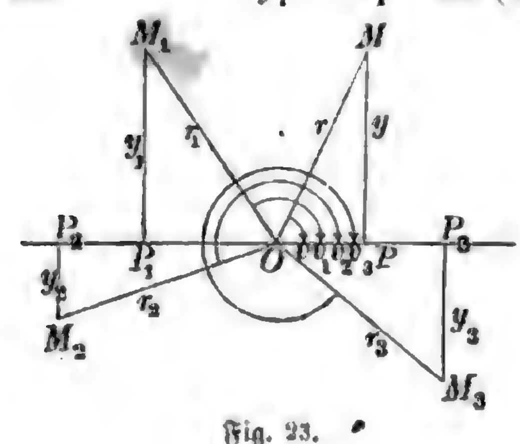


Fig. 23.

Da w_1 spitz ist, so ist v_1 stumpf; M_1 liegt daher in der zweiten Region und x_1 ist negativ, der absolute Werth der Abscisse ist $- x_1 = r_1 \cos v_1$; y_1 ist positiv, also in der That $y_1 = r_1 \cdot \sin v_1$.

Für M_2 ist $v_2 = \pi + w_2$ oder $w_2 = v_2 - \pi$; $M_2 P_2 = y_2$, $OP_2 = x_2$, also:

$$x_2 = r_2 \cos w_2 \qquad \text{und } y_2 = r_2 \sin w_2,$$

oder $$x_2 = r_2 \cos(v_2 - \pi) \quad ,, \quad y_2 = r_2 \cdot \sin(v_2 - \pi),$$

d. h. $$x_2 = - r_2 \cos v_2 \quad ,, \quad y_2 = - r_2 \cdot \sin v_2.$$

Da aber $v_2 - \pi$ ein spitzer Winkel ist, so liegt M_2 in der dritten Region, wo x_2 und y_2 negativ sind; die absoluten Werthe sind demnach:

$$- x_2 = r_2 \cos v_2 \text{ und } - y_2 = r_2 \cdot \sin v_2.$$

Endlich für M_3 ist $v_3 = 2\pi - w_3$, $w_3 = 2\pi - v_3$; $M_3 P_3 = y_3$, $OP_3 = x_3$, also:

$$x_3 = r_3 \cdot \cos w_3 \qquad \text{und } y_3 = r_3 \cdot \sin w_3;$$

$$x_3 = r_3 \cos(2\pi - v_3) \quad ,, \quad y_3 = r_3 \cdot \sin(2\pi - v_3),$$

d. h. $$x_3 = r_3 \cdot \cos v_3 \quad ,, \quad y_3 = - r_3 \cdot \sin v_3.$$

Da nun $2\pi - v_3$ ein spitzer Winkel ist, so liegt M_3 in der vierten Region, wo x_3 positiv, y_3 negativ ist; die absoluten Werthe sind demnach:

$$x_3 = r_3 \cdot \cos v_3 \text{ und } - y_3 = r_3 \cdot \sin v_3.$$

Umgekehrt: sind die rechtwinkeligen Coordinaten x, y eines Punktes M gegeben, so findet man die Polarcoordinaten dieses Punktes für den Anfangspunkt als Pol und die Abscissenachse als Achse der Polarcoordinaten durch die Formeln:

$$\text{tg } v = \frac{y}{x} \text{ und } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man löse nämlich die Gleichungen:

$$x = r \cos v \text{ und } y = r \cdot \sin v$$

nach v und r auf, indem man die zweite durch die erste dividirt, wodurch:

$$\text{tg } v = \frac{y}{x}$$

hervorgeht. Den Vector r findet man entweder aus der Figur nach dem pythagoräischen Lehrsatze, oder aus denselben Gleichungen; es ist nämlich:

$$x^2 = r^2 \cos v^2$$
$$y^2 = r^2 \sin v^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos v^2 + \sin v^2) = r^2$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ein Beispiel mag dies erläutern. Von einem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 24) sei gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = 39^\circ\, 15'\, 12'' & r_1 = 11 \\ v_2 = 86\ \ 54\ \ 10 & r_2 = 25 \\ v_3 = 124\ \ 27\ \ 35 & r_3 = 19. \end{array}\right\}$$

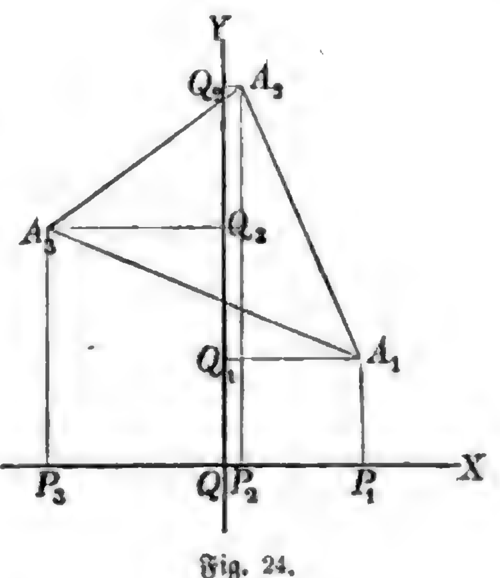


Fig. 24.

Für den Pol als Anfangspunkt und die Achse der Polarcoordinaten als Abscissenachse ist dann:

$\log r_1$	$= 1{,}0413927$	$\log r_1$	$= 1{,}0413927$
$\log \cos v_1$	$= 9{,}8889405$	$\log \sin v_1$	$= 9{,}8012324$
$\log x_1$	$= 0{,}9303342$	$\log y_1$	$= 0{,}8426251$
x_1	$= 8{,}517934.$	y_1	$= 6{,}96025.$
$\log r_2$	$= 1{,}3979400$	$\log r_2$	$= 1{,}3979400$
$\log \cos v_2$	$= 8{,}7326382$	$\log \sin v_2$	$= 9{,}9993652$
$\log x_2$	$= 0{,}1305782$	$\log y_2$	$= 1{,}3973052$
x_2	$= 1{,}35076.$	y_2	$= 24{,}9635.$
$\log r_3$	$= 1{,}2787536$	$\log r_3$	$= 1{,}2787536$
$\log \cos v_3$	$= 9{,}7526835$ (—)*)	$\log \sin v_3$	$= 9{,}9162034$
$(\pi - v_3)$	$= 55^\circ\, 32'\, 25''$	$\log y_3$	$= 1{,}1949570$
$\log x_3$	$= 1{,}0314371$	y_3	$= 15{,}6659.$
x_3	$= -10{,}7507.$		

Aus den so gefundenen Coordinatenwerthen kann man für ein gegebenes Achsensystem die drei Punkte A_1, A_2, A_3, also dann auch das Dreieck $A_1 A_2 A_3$

*) Ein einem Logarithmus angehängtes (—) Zeichen bedeutet, daß die Zahl oder Winkelfunction selbst negativ ist. Je nachdem die Zahl addirt oder subtrahirt wird, stellt das Resultat den Logarithmus eines Products oder Quotienten vor; dieses Product oder dieser Quotient ist also dann allemal negativ.

construiren, ohne dabei Winkel zu benutzen. Bezieht man sämmtliche Maße der Coordinaten auf den Maßstab (Fig. 18), so erhält das gesuchte Dreieck die Gestalt und Größe von A_1 A_2 A_3 (Fig. 24).

Sind dagegen die rechtwinkeligen Coordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks gegeben, nämlich:

$$x_1 = +7;\quad x_2 = +3;\quad x_3 = -9;$$
$$y_1 = +4;\quad y_2 = +16;\quad x_3 = +11;$$

so findet man:

$$\operatorname{tg} v_1 = {}^4/_7 \qquad r_1 = \sqrt{65}$$
$$\operatorname{tg} v_2 = {}^{16}/_3 \qquad r_2 = \sqrt{265}$$
$$\operatorname{tg} v_3 = -{}^{11}/_9 \qquad r_3 = \sqrt{202}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 4 &=& 10{,}6020600 \\ \log 7 &=& 0{,}8450980 \\ \hline \log \operatorname{tg} v_1 &=& 9{,}7569620 \\ v_1 &=& 29^\circ\ 44'\ 41'',5. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log 16 &=& 11{,}2041200 \\ \log 3 &=& 0{,}4771213 \\ \hline \log \operatorname{tg} v_2 &=& 10{,}7269987 \\ v_2 &=& 79^\circ\ 22'\ 49''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 11 &=& 11{,}0413927 \\ \log 9 &=& 0{,}9542425\ (-)^{*)} \\ \hline \log \operatorname{tg} v_3 &=& 10{,}0871502\ (-) \\ v_3' &=& 50^\circ\ 42'\ 38''; \end{array}$$

aber der Winkel muß, wegen des (—) Zeichens im Nenner der Tangente, im zweiten Quadranten liegen, also ist $v_3 = \pi - v_3' = 129^\circ\ 17'\ 22''$.

Zur Berechnung der Vectoren hat man:

$$\begin{array}{rcl} \log 65 &=& 1{,}8129134 \\ 2) & & \overline{\qquad\qquad} \\ \log r_1 &=& 0{,}9064567 \\ r_1 &=& 8{,}0622. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log 265 &=& 2{,}4232459 \\ 2) & & \overline{\qquad\qquad} \\ \log r_2 &=& 1{,}2116229 \\ r_2 &=& 16{,}278. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 202 &=& 2{,}3053514 \\ 2) & & \overline{\qquad\qquad} \\ \log r_3 &=& 1{,}1526757 \\ r_3 &=& 14{,}212. \end{array}$$

Fig. 25.

§. 37. Ist ein Punkt M (Fig. 25) durch seine rechtwinkeligen Coordinaten gegeben, und man nimmt, statt A, einen neuen Anfangspunkt A′, der jedoch in derselben Abscissenachse gelegen ist, und so, daß A A′ = p, so ist allemal, mag A′ diesseits oder jenseits A liegen, wenn x der alte, x′ der neue Abscissenwerth des Punktes M ist:

---

*) Hier wird tg v_3 negativ, weil sie $= \frac{9}{-11}$ ist.

$$x = p + x' \quad \text{oder} \quad x' = x - p.$$

I. A' liege in der ersten Region der alten Ordinate.

1) Der Fußpunkt P der Ordinate von M liege diesseits A' (Fig. 25), so ist:

$$AP = AA' + A'P,$$

d. h.

$$x = p + x'.$$

2) P_1 sei Fußpunkt der Ordinate von M_1 (Fig. 25); P_1 liege zwischen A und A', so ist:

$$AA' = AP' + A'P_1$$
$$p = x + (-x')$$
$$x = p + x'.$$

3) P_2 sei Fußpunkt der Ordinate von M_2 und liege jenseits A (Fig. 25), so ist:

$$A_1P_2 = AA' + AP_2$$
$$-x' = p + (-x)$$
$$x = p + x'.$$

II. A' liege in der zweiten Region der alten Ordinate (Fig. 26), so ist $AA' = -p$ und:

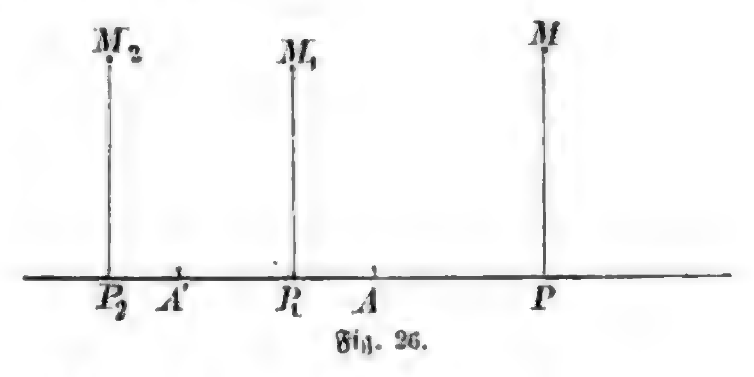


Fig. 26.

entweder $AP = A'P - AA'$, d. h. $x = x' - (-p)$,
oder $AP_1 = AA' - A'P_1$, „ $-x = (-p) - x'$,
oder $AP_2 = AA' + A'P_2$, „ $-x = (-p) + (-x')$.

Und alle diese Fälle liefern die Gleichung:

$$x = p + x'.$$

Nimmt man in der Ordinatenachse einen neuen Anfangspunkt an, dessen alter Ordinatenwerth, absolut genommen, q heißen mag, so findet für denselben, wenn noch der neue Ordinatenwerth eines Punktes M y' heißt, aus ganz gleichen Gründen die Gleichung:

$$y = q + y' \quad \text{oder} \quad y' = y - q$$

statt.

Nimmt man endlich einen Anfangspunkt an, der weder in der alten Abscissenachse noch auch in der Ordinatenachse liegt, und legt durch diesen Punkt neue Achsen, beziehlich parallel mit den alten, so finden, wenn p, q die

alten Coordinaten des neuen Anfangspunktes, x, y die alten, x', y' die neuen Coordinaten eines Punktes M sind, folgende Gleichungen statt:

$$x = p + x' \quad \text{oder} \quad x' = x - p.$$
$$y = q + y' \quad \text{„} \quad y' = y - q.$$

Es seien (Fig. 27) XX_1, YY_1 die alten Achsen, X'X'', Y'Y'' die neuen, A der alte, A' der neue Anfangspunkt; A' liege in der zweiten Region des alten Achsensystems und zwar um 3 Längeneinheiten von der Ordinatenachse YY_1, um 4 von der Abscissenachse XX_1 entfernt; M sei ein Punkt in der dritten Region der alten Achsen, so daß seine Coordinatenwerthe $x = -8$, $y = -6$; die neuen Coordinatenwerthe des Punktes M zu finden.

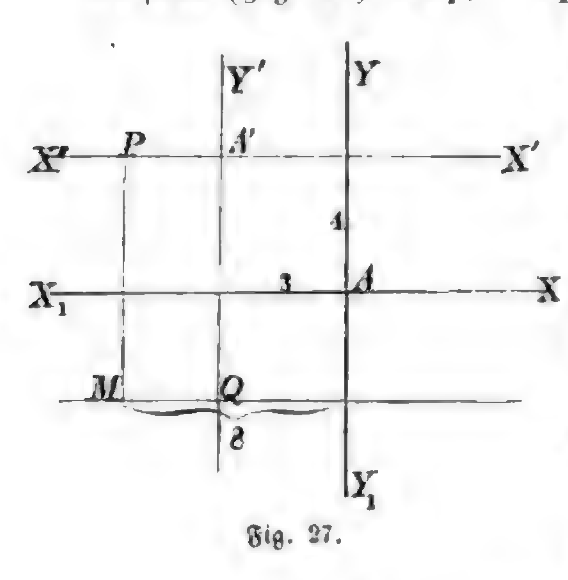


Fig. 27.

Nach der Annahme ist $p = -3$, $q = +4$, also

$$x' = (-8) - (-3) = -5,$$
$$y' = (-6) - 4 = -10,$$

d. h. $\quad MQ = -5, \; MP = -10.$

§. 38. Sind zwei Punkte M, N durch ihre rechtwinkeligen Coordinaten x', y', x'', y'' gegeben, so ist, wie auch die Punkte in Bezug auf die Achsen gelegen sein mögen, allemal:

$$MN = +\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$
$$= +\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Um dies zu beweisen, nehmen wir zuerst M und N in der ersten Region liegend an, wie M und N (Fig. 28); die Punkte können dann vier verschiedene Lagen haben, wenn man die Coordinatenwerthe x', y' einmal auf M, dann auf M_1, hernach auf N, endlich auf N_1 bezieht, während x'', y'' jedesmal auf den andern Endpunkt der Geraden MN, oder M_1N_1 bezogen werden müssen.

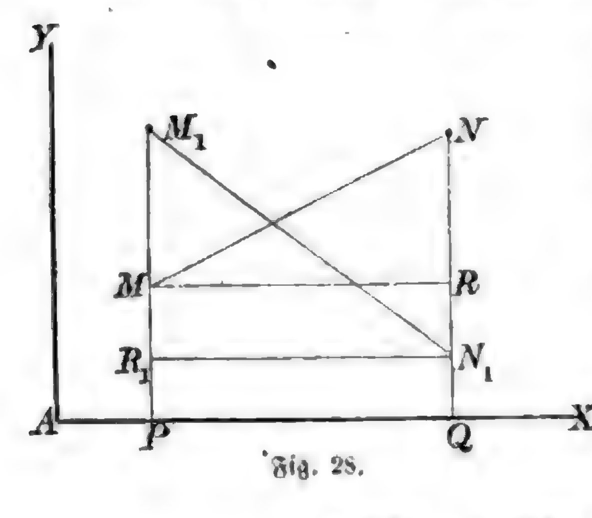


Fig. 28.

Ziehe $MP \mp AY$, $NQ \mp AY$, $MR \mp AX$, so ist:

$$MN^2 = MR^2 + NR^2,$$

oder

$$MN^2 = (AQ - AP)^2 + (NQ - RQ)^2$$
$$= (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2.$$

Aber $(x'' - x')^2 = (x' - x'')^2$ und $(y'' - y')^2 = (y' - y'')^2$, also folgt die Behauptung unmittelbar für die Linie MN.

Für die Linie $M_1 N_1$ ziehe man $N_1 R_1 \# AX$, so ist:

$$\begin{aligned} M_1 N_1^2 &= N_1 R_1^2 + M_1 R_1^2 \\ &= (AQ - AP)^2 + (M_1 P - R_1 P)^2 \\ &= (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2. \\ &= (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2. \end{aligned}$$

Bezieht man ferner die Coordinatenwerthe x', y' auf den Punkt N, x'', y'' auf M, oder x', y' auf N_1, x'', y'' auf M_1, so bleibt das Verfahren, den Werth von MN oder $M_1 N_1$ zu finden, noch dasselbe und auch das Resultat wird dem vorigen völlig gleich.

Untersucht man nun noch die Fälle, wo MN einer der Achsen parallel liegt, wie z. B. MR oder NR; so ist im ersten Falle $y'' = y'$, also $y'' - y' = 0$, im zweiten $x'' = x'$ oder $x'' - x' = 0$; also ist denn in der That:

$$MR^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

und

$$NR^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2,$$

da es ganz gleichgültig ist, ob im ersten Falle $(y'' - y')^2$, im andern $(x'' - x')^2$ zu dem übrigen Ausdrucke hinzugesetzt wird oder nicht, weil eben beide Ausdrücke $= 0$ sind.

Wenn nun allgemein für alle Fälle:

$$MN^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2,$$

so ist:

$$MN = + \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2},$$

wo die Wurzel stets nur ihren positiven Werth haben darf, weil sie eine Linie vorstellt, eine Linie aber nie negativ sein kann.

Liegen aber die Punkte M, N nicht in der ersten Region der Achsen, so nehme man zwei neue Achsen an, parallel den alten und so gelegen, daß die Punkte M und N in die erste Region der neuen Achsen zu liegen kommen. Heißen dann x_1', y_1', x_1'', y_1'' die neuen Coordinatenwerthe der Punkte M, N, so ist:

$$x_1' = x' - p, \; x_1'' = x'' - q,$$
$$y_1' = y' - q, \; y_1'' = y'' - q,$$

wenn p und q die Coordinatenwerthe des neuen Anfangspunktes, auf die alten Achsen bezogen, sind. Da M, N in der ersten Region der neuen Achsen liegen, so ist:

$$MN = + \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (y_1' - y_1'')^2},$$

d. h.

$$\begin{aligned} MN &= + \sqrt{[(x' - p) - (x'' - p)]^2 + [(y' - q) - (y'' - y)]^2} \\ &= + \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}. \end{aligned}$$

Also ist der Satz jetzt für alle Lagen der Punkte M, N gültig.

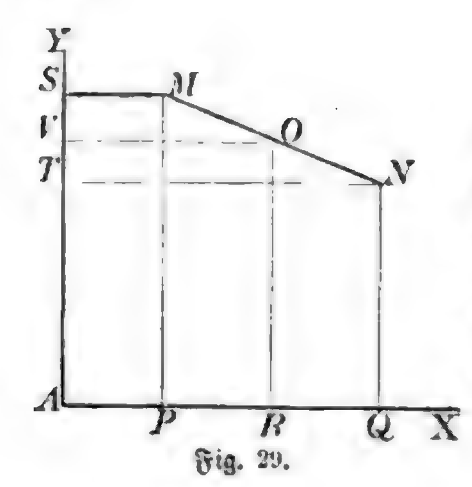


Fig. 29.

§. 39. Soll man die Coordinatenwerthe x_1, y_1 des Halbirungspunktes O einer durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegebenen Geraden M N (Fig. 29) finden, so ist, wenn man von M, O, N die Ordinaten MP, OR, NQ fällt, und x', y' die Coordinatenwerthe von M, x'', y'' die von N sind:

$$AR = AP + PR = AP + \frac{PQ}{2},$$

$$x_1 = x' + \frac{x'' - x'}{2} = \frac{x'' + x'}{2}.$$

Zieht man dann noch MS, OV, NT sämmtlich parallel mit der Abscissenachse AX, so ist:

$$AV = AT + TV = AT + \frac{ST}{2},$$

$$y_1 = y'' + \frac{y' - y''}{2} = \frac{y'' + y'}{2}.$$

Für eine mit der Abscissenachse parallele Gerade ist:

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2},$$

aber: $$y_1 = y' = y'',$$

also auch $$y_1 = \frac{y' + y''}{2}.$$

Und ebenso findet sich der Satz für eine mit der Ordinatenachse parallele Gerade, wo $x' = x'' = x_1$ ist, bestätigt.

Lägen die Punkte M, N, O, oder einzelne derselben, nicht in der ersten Region, so könnte man neue Achsen annehmen, parallel mit den alten und so gelegen, daß M, N, O in die erste Region der neuen Achsen zu liegen kämen, und würde dann auf demselben Wege wie §. 38 die Richtigkeit der Behauptung auch für diesen Fall bestätigt finden.

Es sollen nun die Längen der Seiten des Dreiecks im ersten Zahlenbeispiel des §. 36 gefunden werden.

Es war dort gefunden, wenn wir die zuletzt gebrauchte Bezeichnung x', y', x'', y'' u. s. w. einführen:

$x' =$	8,517934	$x'' =$	1,35076	$x''' =$	$-10,7507$
$x'' =$	1,35076	$x''' =$	$-10,7507$	$x' =$	8,517934
$x'-x'' =$	7,167174	$x''-x''' =$	12,10146	$x'''-x' =$	$-19,268634$
$y' =$	6,96025	$y'' =$	24,9635	$y''' =$	15,6659
$y'' =$	24,9635	$y''' =$	15,6659	$y' =$	6,96025
$y'-y'' =$	$-18,00325$	$y''-y''' =$	9,2976	$y'''-y' =$	8,70565

$\log(x'-x'') = 0,8553479$ $\qquad$ $\log(y'-y'') = 1,2553509\ (-)$ *)

$\times 2$ $\qquad$ $\times 2$

1,7106958 $\qquad$ 2,5107018

$(x'-x'')^2 = 51,36837$ $\qquad$ $(y'-y'')^2 = 324,117$

$(y'-y'')^2 = 324,117$

$A_1 A_2^2 = 375,48537$

$\log A_1 A_2^2 = 2,5745930$

2) 1,2872965

$A_1 A_2 = 19,37744.$

$\log(x''-x''') = 1,0828377$ $\qquad$ $\log(y''-y''') = 0,9683709$

$\times 2$ $\qquad$ $\times 2$

2,1656754 $\qquad$ 1,9367418

$(x''-x''')^2 = 146,4452.$ $\qquad$ $(y''-y''')^2 = 86,4453.$

$(y''-y''')^2 = 86,4453$

$A_2 A_3^2 = 232,8905$

$\log A_2 A_3^2 = 2,3671517$

2) 1,1835758

$A_2 A_3 = 15,26074.$

$\log(x'''-x') = 1,2848530$ $\qquad$ $\log(y'''-y') = 0,9398012$

$\times 2$ $\qquad$ $\times 2$

2,5697060 $\qquad$ 1,8796024

$(x'''-x')^2 = 371,284.$ $\qquad$ $(y'''-y')^2 = 75,7883.$

$(y'''-y')^2 = 75,7883$

$A_3 A_1^2 = 447,0723$

$\log A_3 A_1^2 = 2,6503777$

2) 1,3251888

$A_3 A_1 = 21,14407.$

Die Halbirungspunkte der Seiten liefern folgende einfache Rechnung:

---

*) Weil hier die Quadrate der Differenzen $y'-y''$ ꝛc. in Rechnung kommen, ist es überflüssig, auf die Vorzeichen Rücksicht zu nehmen.

$$\begin{array}{rlrl} x' &= 8,517934 & y' &= 6,96025 \\ x'' &= 1,35076 & y'' &= 24,9635 \\ \hline & \ 9,868694 & & \ 31,92375 \\ & 2) \overline{} & & 2) \overline{} \\ x_1 &= 4,934347 & y_1 &= 15,96187 \\ x'' &= 1,35076 & y'' &= 24,9635 \\ x''' &= -10,7507 & y''' &= 15,6659 \\ \hline & \ 9,39994 & & \ 40,6294 \\ & 2) \overline{} & & 2) \overline{} \\ x_2 &= -4,69997 & y_2 &= 20,3147. \end{array}$$

Ebenso ist die Rechnung für x_3, y_3 zu führen.

§. 40. Sind die Polarcoordinaten zweier Punkte M, N gegeben, so findet man die Gerade M N entweder dadurch, daß man nach §. 36 aus den Polarcoordinaten die rechtwinkeligen berechnet und aus diesen M N nach §. 38 bestimmt; oder man sucht zu dem Dreieck M N O (Fig. 30) die nöthige Zahl Bestimmungsstücke und berechnet M N als Seite dieses Dreiecks trigonometrisch.

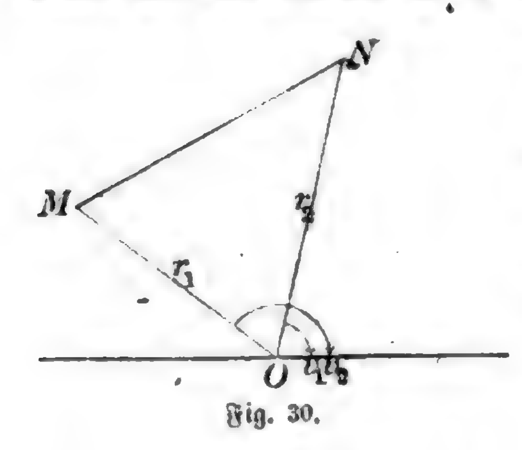


Fig. 30.

Sind r_1, v_1 die Polarcoordinaten des Punktes M, r_2, v_2 die des Punktes N, x', y' die rechtwinkeligen Coordinaten von M, x'', y'' die von N, so ist nach §. 36:

$$x' = r_1 \cdot \cos v_1, \qquad x'' = r_2 \cdot \cos v_2,$$
$$y' = r_1 \cdot \sin v_1, \qquad y'' = r_2 \cdot \sin v_2,$$

also nach §. 38:

$$\begin{aligned} MN &= +\sqrt{(r_1 \cos v_1 - r_2 \cos v_2)^2 + (r_1 \sin v_1 - r_2 \sin v_2)^2} \\ &= +\sqrt{\begin{Bmatrix} r_1{}^2 \cos v_1{}^2 - 2\, r_1\, r_2 \cos v_1 \cos v_2 + r_2{}^2 \cos v_2{}^2 \\ + r_1{}^2 \sin v_1{}^2 - 2\, r_1\, r_2 \sin v_1 \sin v_2 + r_2{}^2 \sin v_2{}^2 \end{Bmatrix}} \\ &= +\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2\, r_1\, r_2 \cos (v_1 - v_2)}, \end{aligned}$$

wo, wenn etwa $v_1 < v_2$ sein sollte, $\cos (v_2 - v_1)$ gesetzt werden kann, weil $\cos (-x) = \cos x$ ist.

Für die zweite Art der Lösung bestimmt sich das Dreieck M O N durch $OM = r_1$, $ON = r_2$ und Winkel $MON = v_1 - v_2$, indem man einen Hülfswinkel φ so annimmt, daß

$$\sin \varphi = \frac{2 \cos \frac{v_1 - v_2}{2}}{r_1 + r_2} \cdot \sqrt{r_1\, r_2};$$

dann
$$MN = (r_1 + r_2) \cdot \cos \varphi$$
setzt.

Um hiernach die Seite $A_1 A_2$ des ersten Beispiels in §. 36 zu berechnen, erhielte man:

$$A_1 A_2 = + \sqrt{(121 + 625 - 550 \cdot \cos 47^\circ\, 38'\, 58'')}$$

$\log \cos 47^\circ\, 38'\, 58'' = 9{,}8284439$

$\log 550 = 2{,}7403627$

$2{,}5688066$

121

625

746

370,516

$370{,}516$

$\log 375{,}484 = 2{,}5745914$

2) $1{,}2872957$

$A_1 A_2 = 19{,}3774.$

Nach dem andern Verfahren erhält man folgende Rechnung:

$v_2 - v_1 \quad 47^\circ\, 38'\, 58''$

2) $23 \quad 49 \quad 29$

$\log \cos (v_2 - v_1) = 9{,}9613192$

$\log 2 = 0{,}3010300$

$\log \sqrt{r_1 r_2} = 1{,}2196663$

$E \log (r_1 + r_2) = 8{,}4436975$

$\log \sin \varphi = 9{,}9257130$

069

$\varphi = 57^\circ\, 26'\, 4''$ $\quad 1344 | 6100 | 4$ $\quad | 724 |$

$r_1 \cdot r_2 = 275.$

$\log r_1 r_2 = 2{,}4393327$

2) $1{,}2196663$

$\log \cos \varphi = 9{,}7310087$

132

$9{,}7309955$

$\log (r_1 + r_2) = 1{,}5563025$

$\log A_1 A_2 = 1{,}2872980$

$A_1 A_2 = 19{,}3775.$

§. 41. Um die Winkel zu bestimmen, welche eine Gerade mit den Achsen macht, muß man eine gleichmäßige Art, diese Winkel zu messen, beobachten. Betrachtet man aber die Lage einer Geraden zu den Coordinatenachsen, so kann man sie hier, wo nur die **Winkel** in Betracht kommen, die sie mit den Achsen macht, allemal als durch den Anfangspunkt der Achsen gehend ansehen; denn ist dies nicht der Fall, so kann man durch einen beliebigen Punkt der Geraden neue Achsen parallel mit den alten legen, so bildet die Gerade mit diesen neuen Achsen noch dieselben Winkel, wie mit den alten.

Ist nun XX', YY' (Fig. 31) ein rechtwinkeliges Achsensystem, A der Anfangspunkt, so kann eine durch A gehende Gerade AB, und dann, nach dem Vorigen, auch jede andere Gerade in der Ebene der Achsen, die acht verschiedenen Hauptlagen AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5, AB_6, AB_7, AB_8 gegen die Achsen annehmen, d. h. die Gerade kann sich, vom Anfangspunkte aus, nach jeder der vier Regionen erstrecken, oder mit einer der vier Achsenrichtungen zusammenfallen.

Wenn von dem Winkel die Rede ist, welchen eine Gerade AB mit der Abscissenachse macht, so verstehen wir darunter allemal denjenigen Winkel, welchen die Gerade um den wirklichen, oder, durch Annahme neuer, mit den alten paralleler Achsen, um den so neugebildeten Anfangspunkt durchlaufen muß, um in die Lage der positiven Richtung der Abscissenachse zu kommen, während die Drehung der Geraden allemal in dem Sinne geschehen soll, in welchem die positive Richtung der Ordinatenachse sich, durch die erste Region der Achsen hindurch drehen müßte, wenn sie in die Lage der positiven Richtung der Abscissenachse kommen wollte. Der Winkel, den eine Gerade AB in diesem Sinne mit der positiven Richtung der Abscissenachse macht, heißt der **Neigungswinkel** dieser Geraden AB.*)

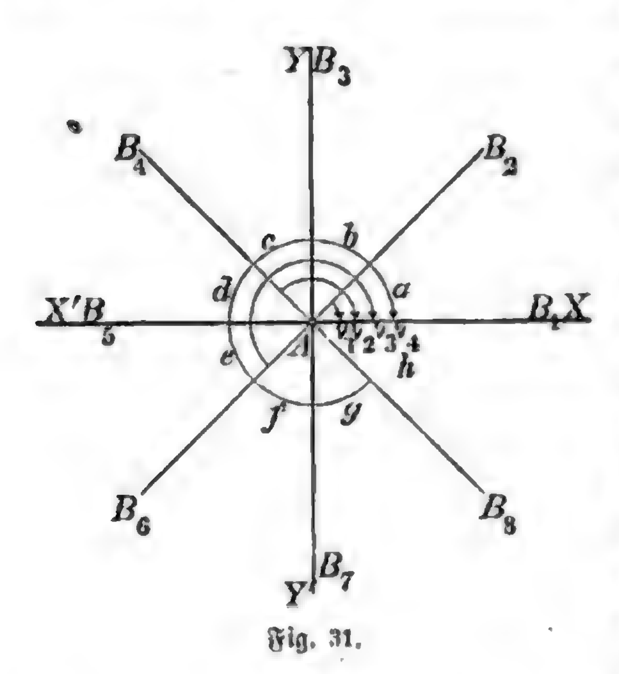


Fig. 31.

Hiernach müßten die Geraden AB_2, AB_4, AB_6, AB_8 beziehlich die durch die Pfeile bezeichneten Winkel durchlaufen, und diese Winkel sind daher die Neigungswinkel der genannten Geraden. Der Neigungswinkel von AB_2 ist sonach der spitze Winkel $B_1AB_2 = a$, der von $AB_4 = B_1AB_4 = R + c$,

*) Es leuchtet ein, daß man mit der Euklidischen Definition des Winkels als „Neigung zweier Linien gegeneinander", eben weil sie zu unbestimmt ist und nichts erklärt, hier, wie schon in der gewöhnlichen Trigonometrie, nicht auskommen kann; ebenso wenig brauchbar ist die Erklärung, welche einige Neuere vom Winkel gegeben haben, indem sie ihn als „den zwischen den Schenkeln enthaltenen Raum, als einen Theil der Ebene" bezeichnen. Ich definire den Winkel auch selbst schon in den Elementen der Geometrie als die **Größe der Drehung**, welche der eine Schenkel um den Scheitelpunkt herum machen muß, um in die Lage des andern zu kommen; die Maßeinheit dieser Drehung ist entweder die ganze, oder die halbe, oder die Vierteldrehung, oder ein willkürlich angenommener Theil dieser Drehung (der 360. oder 400. Theil der ganzen Drehung — der Winkelgrad, nach der Sexagesimal- oder Centesimaltheilung u. s. w.).

Will man die **Richtung** der Drehung, welche oben im Texte zur Sprache gekommen, durch die Ausdrücke „links" und „rechts" unterscheiden, so muß man, um alle Zweideutigkeit zu verbannen, sich in den Scheitelpunkt des Winkels, welchen die bewegte Gerade durchlaufen soll, gestellt denken, und zwar mit dem Gesichte in die Richtung der bewegten Geraden. Da wir hier die Lage der Regionen so angenommen haben, daß die zweite links von der ersten folgt, so geht unsere Drehung des Winkelschenkels stets **rechts** herum.

der von $AB_6 = \overline{B_1 A B_6}$*) $= 2R + e$, der von $AB_8 = \overline{B_1 A B_8} = 3R + g$. Ebenso macht AB_3 einen Winkel $= 1R$, $AB_5 = 2R$, $AB_7 = 3R$ mit der positiven Richtung AX der Abscissenachse.

Unter dem Winkel, den eine Gerade AB mit der Ordinatenachse macht, verstehen wir die Größe der Drehung, welche die Gerade um den Anfangspunkt A herum, in demselben Sinne wie vorhin (also rechts herum), machen muß, um zunächst zur positiven Richtung der Abscissenachse und von da weiter zur positiven Richtung der Ordinatenachse zu gelangen. AB_1 (Fig. 32) macht also $3R$, AB_2 $3R + a$, AB_3 $4R$, AB_4 $4R + c$ u. s. w. mit der positiven Richtung AY der Ordinatenachse.

Die Neigungswinkel zur Abscissenachse werden mit ν, die zur Ordinatenachse mit ν' bezeichnet. Hat die betreffende Gerade eine nähere Bezeichnung durch einen Index, wie AB_1, AB_2 u. s. w., so erhalten ν und ν' denselben Index und heißen dann beziehlich ν_1, ν_1', ν_2, ν_2' u. s. w.

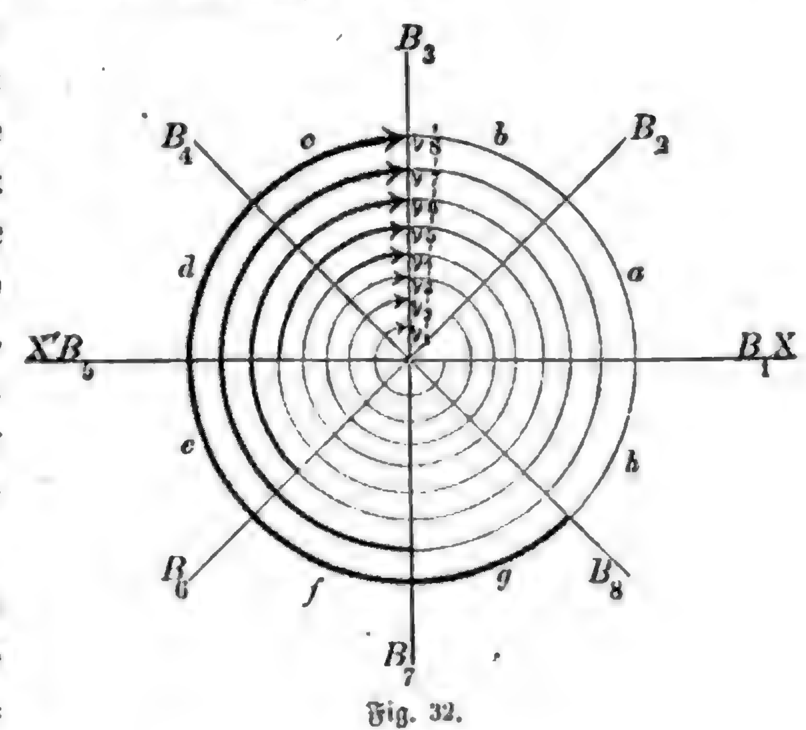


Fig. 32.

§. 42. Die Neigungswinkel ν und ν', welche eine Gerade mit der Abscissen- und Ordinatenachse macht, bestimmen sich gegenseitig allemal durch die Gleichung:

$$\nu' - \nu = 3R = \frac{3}{2}\pi$$

Für AB_2 ist z. B.

$$\begin{aligned} \nu &= 1R - b \\ \nu' &= 4R - b \\ \hline \nu' - \nu &= 3R. \end{aligned}$$

Für AB_4 ist:

$$\begin{aligned} \nu &= 1R + c \\ \nu' &= 4R + c \\ \hline \nu' - \nu &= 3R. \end{aligned}$$

*) Durch einen Strich über den einen Winkel bezeichnenden Buchstaben drücke ich den erhabenen Winkel aus, welcher durch dieselben Linien gebildet wird, wie der ihn zu 360° ergänzende hohle Winkel.

In derselben Weise läßt sich der Satz für alle andern Lagen der Geraden nachweisen.

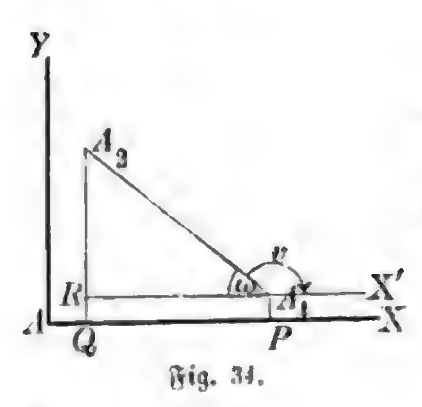


Fig. 33.

§. 43. Eine begrenzte Gerade $A_1 A_2$ ist durch die Coordinatenwerthe x_1, y_1, x_2, y_2 ihrer Endpunkte A_1 und A_2 gegeben; man soll die Winkel finden, welche sie mit der Abscissen- und Ordinatenachse macht.

Auflösung. Legen wir zunächst Fig. 33 zu Grunde und ziehen $A_1 P$ und $A_2 Q$ parallel mit AY, $A_1 R \mp AX$, so ist $A_2 A_1 R = \nu$ und

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{A_2 R}{A_1 R} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

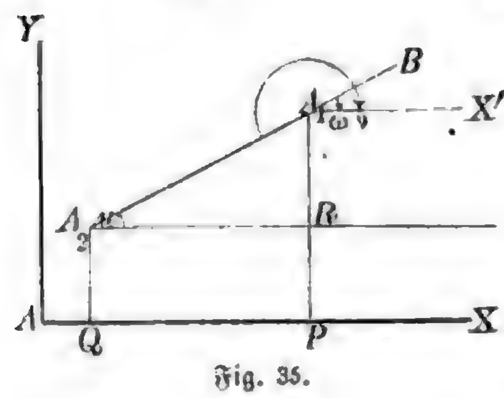


Fig. 34.

Gibt man dann der Geraden die Lage der $A_1 A_2$ (Fig. 34) und nennt ω den spitzen Winkel, den sie mit der Abscissenachse macht, so ist:

$\nu = A_2 A_1 X'$, $\omega = A_2 A_1 R$, also $\nu = \pi - \omega$ und

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{A_2 R}{A_1 R} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$\operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg}(\pi - \omega) = - \operatorname{tg} \omega = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

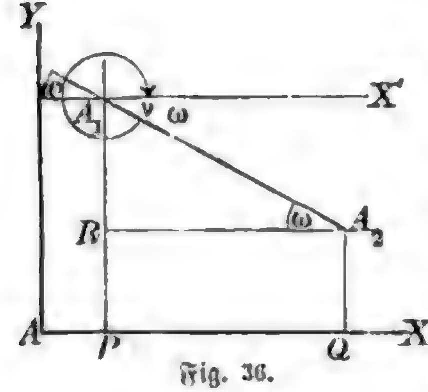


Fig. 35.

In der Lage $A_1 A_2$ der Fig. 35 erhält man durch Verlängerung der Geraden über A_1 hinaus nach B den Winkel $B A_1 X' = \omega = A_1 A_2 R$ und $\nu = \pi + \omega = \overline{A_2 A_1 X'}$.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{A_1 R}{A_2 R} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$\operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg}(\pi + \omega) = \operatorname{tg} \omega = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Für die Lage der $A_1 A_2$ (Fig. 36) ist $\omega = A_2 A_1 X' = A_1 A_2 R$ und $\nu = 2\pi - \omega = \overline{A_2 A_1 X'}$.

Fig. 36.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{A_1 R}{A_2 R} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$\operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg}(2\pi - \omega) = - \operatorname{tg} \omega = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Aber auch für die Fälle, wo die Gerade $A_1 A_2$ mit einer der Achsen zusammenfällt, gilt der soeben gefundene Ausdruck für $\operatorname{tg} \nu$ nicht minder. Z. B. für die Lage AB_1 (Fig. 31) ist $\nu = 0$, also $\operatorname{tg} \nu = 0$, und $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ gibt denselben Werth, weil jetzt $y_2 = y_1$, d. h. $y_2 - y_1 = 0$ ist.

In der Lage AB_3 der Fig. 31 ist $\nu = \frac{1}{2}\pi$, also $\operatorname{tg}\nu = \infty$; der Ausdruck $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ liefert dasselbe Resultat, weil jetzt $x_2 = x_1$, also $x_2 - x_1 = 0$ ist. In der Lage AB_5 ist $\nu = \pi$, $\operatorname{tg}\nu = 0$, während $y_2 = y_1$, also auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ den Werth 0 gibt. Endlich in der Lage AB_7 ist $\nu = \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\nu = -\infty$, während $x_2 = x_1$, also $x_2 - x_1 = 0$; und, wenn A der Anfangspunkt der Coordinaten ist, $y_1 = 0$ und y_2 negativ ist, also auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\infty$; ist aber A blos ein Hülfspunkt, so ist doch $y_2 - y_1$ negativ, also das Resultat wieder $= -\infty$.

Für alle denkbaren Lagen der Linie $A_1 A_2$ ist also allemal:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Je nachdem aber:

$y_2 - y_1$	positiv	und $x_2 - x_1$ zugleich	positiv	liegt ν im	1.	Quadranten,
	positiv		negativ		2.	
	negativ		negativ		3.	
	negativ		positiv		4.	

und ist also der Reihe nach:

entweder $\nu = \omega$,
oder $\nu = \pi - \omega$,
oder $\nu = \pi + \omega$,
oder $\nu = 2\pi - \omega$,

wenn ω allemal den *spitzen* Winkel bezeichnet, welchen die Linie $A_1 A_2$ mit der Abscissenachse macht.

Denn, um nur einen Fall zu erörtern, ist z. B. $y_2 - y_1$ negativ, so liegt A_2 näher an der Abscissenachse als A_1, und ist zugleich auch $x_2 - x_1$ negativ, so liegt A_2 auch näher an der Ordinatenachse als A_1; die Lage solcher Linie ist also durch $A_1 A_2$ Fig. 35 dargestellt, wo ν = dem erhabenen Winkel $\overline{A_2 A_1 X'}$ ist. — Oder: wenn Zähler und Nenner negativ sind, so ist der Ausdruck selbst positiv, und dieser Fall entspricht nur der Tangente eines Winkels im dritten Quadranten. Ebenso läßt sich der Fall der Fig. 36 und jeder andere erörtern.

Aus dem Winkel ν, welchen die Gerade $A_1 A_2$ mit der Abscissenachse macht, findet man aber den Winkel ν', den sie mit der Ordinatenachse macht, nach §. 42 durch die Gleichung

$$\nu' - \nu = 3R,$$

wenn man nur bei dem Messen oder Ablesen der Winkel genau so verfährt, wie es §. 41 bestimmt worden. Aus der so gefundenen Größe des Winkels ν' läßt sich dann der Winkel, den die Gerade mit der Ordinatenachse nach gewöhnlicher Auffassungsweise macht, in jedem einzelnen Falle leicht finden. Wäre z. B. $\nu = 160^\circ$, so wäre $\nu' = 160^\circ + 3 \cdot R = 160^\circ + 270^\circ = 430^\circ$; man müßte also hier 360° subtrahiren, um den gesuchten Winkel $= 70^\circ$ zu bekommen.

Es sollen nun die Neigungswinkel der drei Geraden berechnet werden, deren rechtwinkelige Coordinaten im ersten Beispiele zu §. 36 gefunden worden. Die Logarithmen der Differenzen $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$ u. s. w. sind schon §. 39 gefunden und können daher hier benutzt werden. Zu bemerken ist nur, daß dort überall die entgegengesetzten Werthe $y_1 - y_2$, $x_1 - x_2$ u. s. w. berechnet sind; wir könnten auch diese hier gebrauchen, setzen aber lieber die der Formeln und bekommen so die entgegengesetzten Vorzeichen, die sich durch die Quotientenformen wieder ausgleichen.

$$\log (y_2 - y_1) = 1{,}2553509$$
$$\log (x_2 - x_1) = 0{,}8553479\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \omega = 10{,}4000030$$
$$\omega_1 = 68^\circ\ 17'\ 32''.$$

Weil nun der Zähler positiv, der Nenner negativ ist, so liegt der Winkel im zweiten Quadranten; also ist:

$$\nu_1 = \pi - \omega = 111^\circ\ 42'\ 28''.$$
$$\log (y_3 - y_2) = 0{,}9683709\ (-)$$
$$\log (x_3 - x_2) = 1{,}0828377\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \omega_2 = 9{,}8855332$$
$$\omega_2 = 37^\circ\ 32'\ 6''.$$

Zähler und Nenner sind negativ, also liegt ν im dritten Quadranten und ist $= \pi + \omega_2 = 217^\circ\ 32'\ 6''$.

$$\log (y_1 - y_3) = 0{,}9398012\ (-)$$
$$\log (x_1 - x_3) = 1{,}2848530$$
$$\log \operatorname{tg} \omega_3 = 9{,}6549482$$
$$\omega_3 = 24^\circ\ 18'\ 48''$$
$$\nu_3 = 2\pi - \omega = 335^\circ\ 41'\ 12''.$$

Um endlich die Neigungswinkel der drei Geraden zur Ordinatenachse zu finden, braucht man nur jeden der eben bestimmten Winkel um $^3/_2\pi$ oder 270° zu vermehren.

§. 44. Wir sind nun in Stand gesetzt, die Länge einer Geraden, von der die Coordinaten ihrer Endpunkte bekannt sind, auf eine für die numerische Berechnung bequemere Weise auszudrücken, als dies im Frühern geschehen.

Soll z. B. die Länge von $A_1 A_2$ (Fig. 34) gefunden werden, so ist:

$$A_2 R = A_1 A_2 \cdot \sin A_2 A_1 R = A_1 A_2 \cdot \sin (\pi - \nu)$$
$$= A_1 A_2 \cdot \sin \nu.$$
$$y_2 - y_1 = A_1 A_2 \cdot \sin \nu.$$
$$A_1 A_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sin \nu}.$$

Man berechnet also aus den Coordinaten den Neigungswinkel der Geraden

zur Abscissenachse nach §. 43 und dividirt die Differenz der Ordinaten beider Endpunkte durch den Sinus des Neigungswinkels.

In Fig. 35 hat man:

$A_1 R = A_1 A_2 \cdot \sin A_1 A_2 R = A_1 A_2 \cdot \sin B A_1 X' = A_1 A_2 \cdot \sin (\nu - \pi)$.

$A_1 R = - A_1 A_2 \cdot \sin \nu$.

$y_1 - y_2 = - A_1 A_2 \cdot \sin \nu$.

$y_2 - y_1 = A_1 A_2 . \sin \nu$.

$A_1 A_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sin \nu}$.

Und wiederum in Fig. 36:

$A_1 R = A_1 A_2 \cdot \sin A_1 A_2 R = A_1 A_2 \cdot \sin A_2 A_1 X' = A_1 A_2 \cdot \sin (2\pi - \nu)$.

$y_1 - y_2 = - A_1 A_2 \cdot \sin \nu$.

$y_2 - y_1 = A_1 A_2 \cdot \sin \nu$.

$A_1 A_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sin \nu}$.

In entsprechender Weise wird man bei jeder andern der für die Gerade $A_1 A_2$ möglichen Lagen verfahren.

Um hiernach die schon einmal berechneten Seitenlängen aus den Coordinaten des §. 39 und den zugehörigen in §. 43 berechneten Neigungswinkeln zu finden, hat man:

$\log (y_2 - y_1)$	$= 1{,}2553509$	$\log (y_3 - y_2)$	$= 0{,}9683709$
$\log \sin \nu_1$	$= 9{,}9680542$	$\log \sin \nu_2$	$= 9{,}7847926$
$\log A_1 A_2$	$= 1{,}2872967$	$\log A_2 A_3$	$= 1{,}1835783$
$A_1 A_2 = 19{,}3774$.		$A_2 A_3 = 15{,}2608$	u. s. w.

§. 45. Sind zwei zusammenstoßende Gerade $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ gegeben, so verstehen wir unter dem Winkel φ dieser beiden Geraden allemal denjenigen der beiden Winkel $A_1 A_2 A_3$ und $\overline{A_1 A_2 A_3}$ (des hohlen und erhabenen), der von der ersten Geraden $A_1 A_2$ von links nach rechts durchlaufen wird, wenn sie in die Lage der zweiten Geraden $A_2 A_3$ kommen soll. Die wesentlichen Lagen einer Geraden gegen die Achsen sind in Fig. 31 durch $A B_2$, $A B_4$, $A B_6$, $A B_8$ dargestellt. Um daher alle gegenseitigen Lagen zweier Geraden zu bekommen, werden wir nur diese vier Fälle zu combiniren haben, indem wir zugleich darauf achten, ob vielleicht bei gleichen Lagen in Bezug auf die Achsen doch noch verschiedene Verhältnisse der Geraden untereinander eintreten können, was wahrscheinlich ist, da wir z. B. unter $A B_2$ alle vom Punkte A innerhalb des Winkels $B A B_3$ auslaufenden Geraden verstehen; sollen also etwa beide gegebenen Geraden eine der durch $A B_2$ bezeichneten Lagen haben, so kann entweder die erste näher an der Abscissenachse liegen als die zweite, oder es kann dieses Verhältniß das umgekehrte sein, und so in andern Fällen.

Bezeichnen wir die vier genannten Lagen aus Fig. 31 mit 1, 2, 3, 4, so gehen daraus für zwei Linien die Combinationen:

11, 12, 13, 14; 21, 22, 23, 24; 31, 32, 33, 34; 41, 42, 43, 44

hervor, die nämlich so zu verstehen sind, daß die erste dieser Combinationen gebildet ist aus zwei Linien der ersten Art, die zweite aus einer Linie der ersten und einer der zweiten Art u. s. w., wo unter der ersten Art die Lage AB_2 (Fig. 31), unter der zweiten die Lage AB_4 u. s. w. zu verstehen ist. Unter diesen Verbindungen müssen die Fälle 11, 13; 22, 24, 31, 33, 42, 44 in zwei verschiedenen Lagen genommen werden, so daß es also im ganzen 24 verschiedene Fälle gibt, die in Fig. 37 alle einzeln aufgeführt stehen. Die

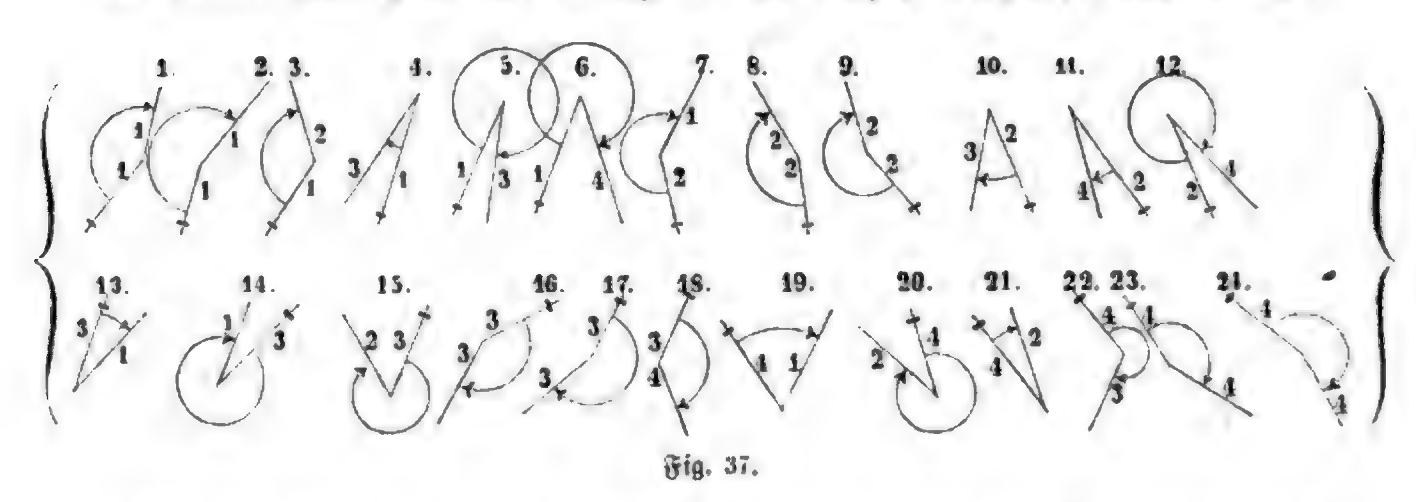


Fig. 37.

Ziffern bezeichnen die Lagen in Bezug auf Fig. 31; der kleine Querstrich durch eine der beiden Linien bezeichnet den Ausgangspunkt der ersten Geraden, der Bogen mit der Pfeilspitze den Winkel φ der beiden Geraden nach der oben gemachten Bestimmung.

Um nun für die Bestimmung des Winkels φ ein Gesetz aufzufinden, muß man alle 24 Fälle vornehmen und untersuchen, wie sich in jedem derselben φ aus den Neigungswinkeln ν_1 und ν_2 der ersten und zweiten Geraden zur Abscissenachse bestimmen lasse. Es mag dies an einigen speciellen Fällen gezeigt werden.

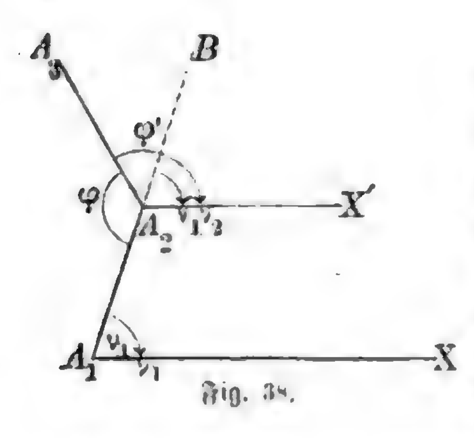


Fig. 38.

Es stelle Fig. 38 den ersten Fall von Fig. 37 vor. Durch den Anfangspunkt A_1 der ersten Geraden $A_1 A_2$ lege man die Achse $A_1 X$, oder eine der Achse parallele Gerade, die dann also eine sogenannte Nebenachse ist; ebenso durch den Anfangspunkt A_2 der zweiten Geraden $A_2 A_3$ die Nebenachse $A_2 X' \# A_1 X$; verlängere $A_1 A_2$ nach B. $A_2 A_1 X$ ist der Neigungswinkel ν_1 der ersten Geraden; $B A_2 X'$ aber $= A_2 A_1 X = \nu_1$; $A_3 A_2 X'$ ist der Neigungswinkel der zweiten Geraden $A_2 A_3$ und $A_1 A_2 A_3 = \varphi$. Nun ist $\varphi = \pi - \varphi' = \pi - A_3 A_2 B$, und $A_3 A_2 B = \nu_2 - \nu_1$, also $\varphi = (\nu_1 - \nu_2) + \pi$.

In ganz ähnlicher Weise wie Nr. 1 erörtern sich die Fälle 3, 4, 8, 10, 11, 16, 18 und 23, wo überall $\varphi < \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$ ist.

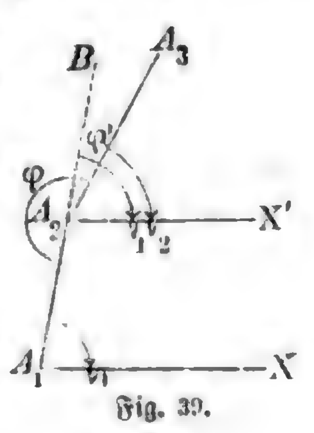


Fig. 39.

Die Fig. 39 stellt den zweiten Fall der Fig. 37 vor, wo $\varphi = \overline{A_1 A_2 A_3} = \pi + \varphi' = \pi + B A_2 A_3$, und $B A_2 A_3 = \nu_1 - \nu_2$, also $\varphi = (\nu_1 - \nu_2) + \pi$. Hier ist $\varphi > \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$, aber der Werth von φ nimmt dennoch dieselbe Gestalt an wie im ersten Falle, wiewol jetzt $\nu_1 - \nu_2$ einen positiven Werth hat, während im ersten Falle diese Differenz negativ war. Mit diesem zweiten Falle völlig übereinstimmend sind die Nummern 7, 9, 14, 15, 17, 20, 22 und 24.

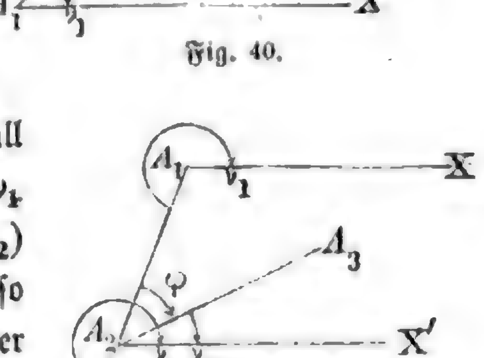


Fig. 40.

Die Fig. 40 stellt den fünften Fall der Fig. 37 dar, wo $\varphi = A_1 A_2 A_3 = 2\pi - \varphi'$, $\nu_1 = B A_2 X'$, $\nu_2 = \overline{A_3 A_2 X'} = \pi + \nu_1 + \varphi'$ also $\varphi' = \nu_2 - (\pi + \nu_1)$ und $\varphi = 2\pi - [\nu_2 - (\pi + \nu_1)] = (\nu_1 - \nu_2) + 3\pi$. Hier ist $\varphi > \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$, die Differenz $\nu_1 - \nu_2$ ist daher negativ. Von dieser Art sind überhaupt nur die Fälle 5, 6 und 12 der Fig. 37.

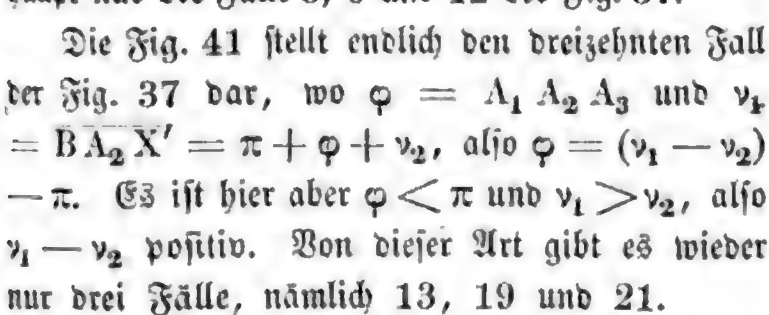


Fig. 41.

Die Fig. 41 stellt endlich den dreizehnten Fall der Fig. 37 dar, wo $\varphi = A_1 A_2 A_3$ und $\nu_1 = \overline{B A_2 X'} = \pi + \varphi + \nu_2$, also $\varphi = (\nu_1 - \nu_2) - \pi$. Es ist hier aber $\varphi < \pi$ und $\nu_1 > \nu_2$, also $\nu_1 - \nu_2$ positiv. Von dieser Art gibt es wieder nur drei Fälle, nämlich 13, 19 und 21.

Da nun die ersten beiden hier betrachteten Fälle sich zwar im Vorzeichen des Werthes von $\nu_1 - \nu_2$ unterscheiden, φ aber für beide nach derselben Formel berechnet werden kann, so mögen sie in einen einzigen Fall zusammengefaßt werden, für den die Formel:

1) $$\varphi = (\nu_1 - \nu_2) + \pi$$

gültig bleibt, die also dann 18 Fälle der Fig. 37 umfaßt. Außer diesen sind drei Fälle, in welchen φ durch die Formel:

2) $$\varphi = (\nu_1 - \nu_2) + 3\pi$$

und drei, in welchen φ durch die Formel:

3) $$\varphi = (\nu_1 - \nu_2) - \pi$$

ausgedrückt wird. Von diesen drei Formeln gilt:

die erste, wenn $\varphi < \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$
und wenn $\varphi > \pi$ und $\nu_1 > \nu_2$;

die zweite, wenn $\varphi > \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$;
die dritte, wenn $\varphi < \pi$ und $\nu_1 > \nu_2$.

§. 46. Bezieht man die Formeln (1 bis 3) auf geschlossene Figuren, wie in der Folge hauptsächlich geschehen wird, so erhält man, bei der einmal eingeführten Ordnung, wonach wir die Schenkel der Winkel als ersten und zweiten auf einander folgen lassen, und in welcher wir auch die einzelnen Theile der Linienzüge und geschlossenen Figuren aufzählen, für die Winkel φ (nämlich φ_1, φ_2, φ_3 u. s. w.) je zweier auf einander folgender Geraden die äußern Winkel der Figuren, d. h. die Ergänzungen der Polygonwinkel zu 360° oder 2π. Da es aber für die Praxis viel bequemer ist, die Polygonwinkel selbst in die Formel zu verflechten, so wollen wir in allen drei Formeln jetzt noch statt φ lieber $2\pi - \omega$ setzen, wo dann ω der Polygonwinkel sein wird. Dadurch erhält man:

$$\text{I.} \quad \omega = (\nu_2 - \nu_1) + \pi.$$
$$\text{II.} \quad \omega = (\nu_2 - \nu_1) - \pi.$$
$$\text{III.} \quad \omega = (\nu_2 - \nu_1) + 3\pi.$$

Und von diesen drei Formeln gilt

die erste, wenn $\omega > \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$
und wenn $\omega < \pi$ und $\nu_1 > \nu_2$;
die zweite, wenn $\omega < \pi$ und $\nu_1 < \nu_2$;
die dritte, wenn $\omega > \pi$ und $\nu_1 > \nu_2$.

Sollte nicht der Polygonwinkel, sondern der Neigungswinkel ν_2, d. h. von beiden vorkommenden Neigungswinkeln der der spätern Linie zugehörige, der gesuchte Winkel sein, so würde man den obigen Gleichungen folgende Form geben:

$$1) \quad \nu_2 = \omega + \nu_1 - \pi.$$
$$2) \quad \nu_2 = \omega + \nu_1 + \pi.$$
$$3) \quad \nu_2 = \omega + \nu_1 - 3\pi.$$

Von diesen Formeln gilt wieder die erste in 18 Fällen, jede der andern in drei Fällen, welche alle im §. 45 näher bezeichnet sind.

Heißen nun die innern Winkel eines Polygons der Reihe nach von einem als ersten angenommenen Eckpunkte rechts herum fortschreitend ω_1, ω_2, ω_3 ..... ω_n, so nämlich, daß ω_1 gebildet ist von der ersten und zweiten Seite, ω_2 von der zweiten und dritten, ω_n von der nten und ersten, wenn es ein geschlossenes Polygon ist, insofern dann die $(n+1)$ste Seite wieder mit der ersten zusammenfällt; dagegen von der nten und $(n+1)$sten, wenn es ein offener Linienzug ist: heißen dann ebenso die Seiten von der ersten an s_1, s_2, s_3 ...... s_n, ihre Neigungswinkel zur Abscissenachse bezieblich ν_1, ν_2, ν_3 .... ν_n; so hat man zur Bestimmung der spätern Neigungswinkel aus den ihnen vorangehenden die allgemeinen Formeln:

$$1 \cdot 1) \quad \nu_n = \omega_{n-1} + \nu_{n-1} - \pi, \quad \text{wenn} \begin{cases} \omega_{n-1} > \pi \text{ und } \nu_{n-1} < \nu_n, \\ \omega_{n-1} < \pi \text{ und } \nu_{n-1} > \nu_n, \end{cases}$$

$$2 \cdot 2) \quad \nu_n = \omega_{n-1} + \nu_{n-1} + \pi, \quad \text{wenn } \omega_{n-1} < \pi \text{ und } \nu_{n-1} < \nu_n,$$

$$3 \cdot 3) \quad \nu_n = \omega_{n-1} + \nu_{n-1} - 3\pi \quad \text{wenn } \omega_{n-1} > \pi \text{ und } \nu_{n-1} < \nu_n,$$

d. h. der Neigungswinkel einer beliebigen Seite eines offenen Linienzugs oder geschlossenen Polygons wird gefunden, wenn man den Polygonwinkel, welchen diese Seite mit der nächst vorhergehenden macht, zum Neigungswinkel dieser vorangehenden Seite addirt und entweder von der Summe 180° subtrahirt, wenn die Summe > 180° ist, oder 180° dazu addirt, wenn die Summe < 180° ist, endlich von der Summe 540° subtrahirt, wenn nach der Subtraction der 180° noch über 360° bleiben.

Um dem Anfänger, diese Rechnungen völlig klar zu machen, möge hier noch die Berechnung eines Dreiecks folgen. Es sei für das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 42):

$x_1 = 24. \qquad y_1 = 5{,}2.$

$x_2 = 4{,}5. \qquad y_2 = 12.$

$x_3 = 13. \qquad y_3 = 20{,}4.$

Aus den gegebenen Coordinaten der Eckpunkte die Seiten und Winkel des Dreiecks zu bestimmen.

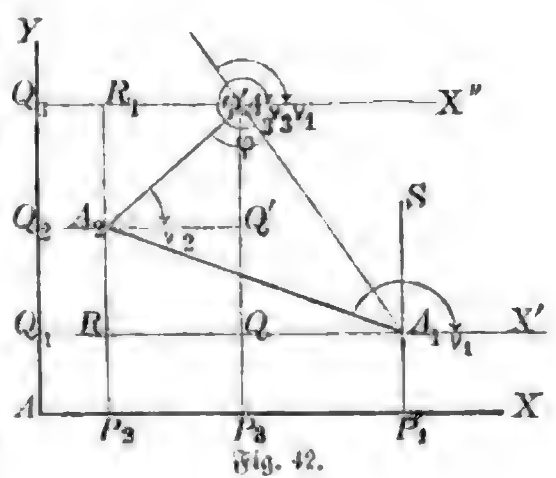


Fig. 42.

I. Berechnung der Neigungswinkel.

Es ist $A_2 A_1 R = \pi - \nu_1; \qquad \operatorname{tg} A_2 A_1 R = -\operatorname{tg} \nu_1.$

$A_1 A_3 X'' = 2\pi - \nu_3; \quad \operatorname{tg} A_1 A_3 X'' = -\operatorname{tg} \nu_3.$

$$-\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{A_2 R}{A_1 R} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{6{,}8}{19{,}5}.$$

$$\operatorname{tg} \nu_2 = \frac{A_3 Q'}{A_2 Q'} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{8{,}4}{8{,}5}.$$

$$-\operatorname{tg} \nu_3 = \operatorname{cotg} A_1 A_3 Q = \frac{A_3 Q}{A_1 Q} = \frac{y_3 - y_1}{x_1 - x_3} = \frac{15{,}2}{11}.$$

log 6,8	= 0,8325089	π =	179° 59′ 60″
log 19,5	= 1,2900346 (—)	ν_1' =	19 13 28,5
log tg ν_1	= 9,5424743 (—)	ν_1 =	160 46 31,5
log 8,4	= 0,9242793		
log 8,5	= 0,9294189	ν_2 =	44° 39′ 39″,5.
log tg ν_2	= 9,9948604		
log 15,2	= 1,1818436 (—)	2π =	359° 59′ 60″
log 11	= 1,0413927	ν_3' =	54 6 26,4
log tg ν_3	= 10,1404509 (—)	ν_3 =	305 53 33,6.

II. Berechnung der Dreieckswinkel.

Alle zu berechnenden Polygonwinkel (ω_1, ω_2, ω_3) sind $< \pi$, weil sie einem Dreiecke angehören; dabei ist $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$ und $\nu_3 > \nu_1$; also geschieht die Berechnung

von ω_1 nach Formel 1. $\omega_1 = (\nu_2 - \nu_1) + \pi = (\pi + \nu_2) - \nu_1$

" ω_2 " " 2. $\omega_2 = (\nu_3 - \nu_2) - \pi$

" ω_3 " " 1. $\omega_3 = (\nu_1 - \nu_3) + \pi = (\pi + \nu_1) - \nu_3$.

$\pi =$	179°	59′	60″
$\nu_2 =$	44	39	39,5
	224	39	39,5
$\nu_1 =$	160	46	31,5
$\omega_1 =$	63	53	8.

$\nu_3 =$	305°	53′	33″,6
$\nu_2 =$	44	39	39,5
	261	13	54,1
$\pi =$	180		
$\omega_2 =$	81	13	54,1.

$\pi =$	180		
$\nu_1 =$	160	46	31,5
	340	46	31,5
$\nu_3 =$	305	53	33,6
$\omega_3 =$	34	52	57,9.

$\omega_1 =$	63°	53′	8″
$\omega_2 =$	81	13	54,1
$\omega_3 =$	34	52	57,9
$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 =$	180	0	0.

III. Berechnung der Seiten.

$$A_2 R = A_1 A_2 \cdot \sin A_2 A_1 R = A_1 A_2 \cdot \sin(\pi - \nu_1)$$

$$y_2 - y_1 = A_1 A_2 \cdot \sin \nu_1$$

$$A_1 A_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sin \nu_1} = \frac{6,8}{\sin \nu_1}$$

$\log 6,8 = 0,8325089$
$\log \sin \nu_1 = 9,5174337$
$\log A_1 A_2 = 1,3150752$
$A_1 A_2 = 20,65738.$

$$A_3 Q' = A_2 A_3 \cdot \sin A_3 A_2 Q' = A_2 A_3 \cdot \sin \nu_2 \cdot$$

$$y_3 - y_2 = A_2 A_3 \cdot \sin \nu_2$$

$$A_2 A_3 = \frac{y_3 - y_2}{\sin \nu_2} = \frac{8,4}{\sin \nu_2}.$$

$\log 8,4 = 0,9242793$
$\log \sin \nu_2 = 9,8468999$
$\log A_2 A_3 = 1,0773794$
$A_2 A_3 = 11,95032.$

$$A_3 Q = A_3 A_1 \cdot \sin A_3 A_1 Q = A_3 A_1 \cdot \sin A_1 A_3 X''$$

$$y_3 - y_1 = A_3 A_1 \cdot \sin(2\pi - \nu_3) = - A_3 A_1 \cdot \sin \nu_3$$

$$A_3 A_1 = \frac{y_1 - y_3}{\sin \nu_3} = \frac{15,2}{- \sin \nu_3}.$$

$\log 15,2 = 1,1818436$
$\log \sin \nu_3 = 9,9085475$
$\log A_3 A_1 = 1,2732961$
$A_3 A_1 = 18,76273.$

Es ist nicht zu übersehen, daß, da ν_3 ein Winkel im vierten Quadranten ist, $\sin \nu_3$ negativ, also $-\sin \nu_3$ wieder positiv ist.

§. 47. Projicirt man eine beliebige Gerade MN oder $M_1 N_1$ (Fig. 43), deren Länge $= s$, und deren Neigungswinkel zur Abscissenachse $= \nu$ ist, auf die Abscissenachse AX, so ist die Projection p, je nach der Lage ihrer Endpunkte zur Ordinatenachse:

$$p = \pm (x_2 - x_1),$$

wenn x_1, x_2 die Abscissenwerthe der Endpunkte sind, und zwar gilt das obere oder $+$ Zeichen für die Lage MN, das untere oder $-$ Zeichen für $M_1 N_1$, vorausgesetzt, daß die Abscisse x_1 den Punkten M und M_1, x_2 den Punkten N und N_1 zukomme. Dieselbe Projection ist aber auch:

Fig. 43.

$$p = s \cdot \cos \nu,$$

und zwar ist, wenn $x_2 > x_1$, also $x_2 - x_1$ positiv ist, ν ein Winkel im ersten oder vierten Quadranten, also dann auch $\cos \nu$ positiv; ist dagegen $x_2 < x_1$, also $x_2 - x_1$ negativ, so ist ν ein Winkel im zweiten oder dritten Quadranten, wo $\cos \nu$ negativ ist. Demnach ist allemal:

$$x_2 - x_1 = s \cdot \cos \nu,$$

oder:

$$1) \quad x_2 = x_1 + s \cdot \cos \nu.$$

Sind y_1, y_2 die Coordinatenwerthe der Endpunkte M, N oder M_1, N_1 derselben Geraden, und man projicirt die Gerade auf die Ordinatenachse, so findet man ebenso für alle Lagen der Geraden s:

$$2) \quad y_2 = y_1 + s \cdot \sin \nu.$$

Nimmt man aber den Neigungswinkel der Geraden MN nicht in M, und den von $M_1 N_1$ nicht am Punkte M_1, wie bisher vorausgesetzt worden, sondern beziehlich in N und N_1, so ist, wenn dieser letztere ν' heißt:

$$\nu' = \nu \pm \pi,$$

also:

$$\cos \nu' = -\cos \nu,$$

und

$$\sin \nu' = -\sin \nu.$$

Die Projectionen einer Geraden auf die Achsen behalten bei der Vertauschung des Anfangspunktes der Geraden (nicht zu verwechseln mit dem Anfangspunkte der Achsen) zwar dieselbe absolute Größe, nehmen aber entgegengesetzte Werthe an, d. h. wenn die mit dem Winkel ν berechnete Projection positiv ist, so ist die mit ν' berechnete negativ und umgekehrt. Bei jeder beliebigen Geraden ist der Neigungswinkel an dem der Ordinatenachse zunächst gelegenen Punkte entweder ein Winkel im ersten oder im vierten Quadranten, der an dem von der Ordinatenachse entferntern Punkte ein Winkel im zweiten oder dritten Quadranten. Zieht man den Wechsel des Anfangspunktes mit in Betracht, so stellen die Figuren 44 und 45 die einzig möglichen Lagen der Geraden vor;

denn nimmt man M als Anfangs-, N als Endpunkt der Geraden, so stellt Fig. 44 die Lage AB_2, Fig. 45 die Lage AB_4 der Fig. 31 vor; und nimmt man N als Anfangs-, M als Endpunkt, so stellt die Fig. 44 die Lage AB_6, Fig. 45 die Lage AB_8 der Fig. 31 vor. Construirt man an beiden End-

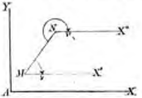


Fig. 44.

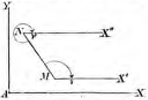


Fig. 45.

punkten die Neigungswinkel ν und ν', so leuchtet die Richtigkeit der Behauptung augenblicklich ein. Es folgt hieraus noch, daß der Cosinus des Neigungswinkels an dem der Ordinatenachse nähern Punkte allemal positiv, der Cosinus des Neigungswinkels an dem von der Ordinatenachse entferntern Punkte allemal negativ ist.

§. 48. Man denke sich einen zusammenhängenden Linienzug $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$ (Fig. 46), in welchem die Punkte $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$ durch ihre Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2 \ldots\ldots x_n, y_n$ gegeben sind, und wo die Längen der einzelnen Geraden $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4 \ldots\ldots A_{n-1} A_n$ beziehlich durch s_1, s_2, $s_3 \ldots\ldots s_n$ bezeichnet werden mögen, so wie ihre Neigungswinkel zur Abscissenachse durch $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots\ldots \nu_n$.

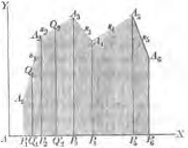


Fig. 46.

Dann ist nach §. 47:

$$x_2 = x_1 + s_1 \cos \nu_1$$
$$x_3 = x_2 + s_2 \cos \nu_2 = x_1 + s_1 \cos \nu_1 + s_2 \cos \nu_2.$$
$$x_4 = x_3 + s_3 \cos \nu_3 = x_1 + s_1 \cos \nu_1 + s_2 \cos \nu_2 + s_3 \cos \nu_3.$$
. . . .
$$x_{n+1} = x_n + s_n \cdot \cos \nu_n$$

1) $x_{n+1} = x_1 + s_1 \cos \nu_1 + s_2 \cos \nu_2 + s_3 \cos \nu_3 + \ldots\ldots + s_n \cos \nu_n.$

Gerade ebenso gewinnt man die andere Gleichung:

2) $y_{n+1} = y_1 + s_1 \sin \nu_1 + s_2 \sin \nu_2 + s_3 \sin \nu_3 + \ldots\ldots + s_n \sin \nu_n.$

In Worten: die Abscisse irgend eines Eckpunktes eines zusammenhängenden Linienzugs ist gleich der Summe, die man bekommt, wenn man die Projectionen aller jenem Punkte vorangehenden Geraden auf die Abscissenachse addirt

und noch um die Abscisse des ersten Punkts vermehrt; und die Ordinate eines Eckpunktes des zusammenhängenden Linienzugs ist gleich der Summe aus der Ordinate des ersten Punktes und den Projectionen aller jenem Punkte vorangehenden Geraden auf die Ordinatenachse.

Bei einem geschlossenen Polygon trifft der letzte Eckpunkt mit dem ersten zusammen, also ist:

$$x_{n+1} = x_1 \quad \text{und} \quad y_{n+1} = y_1,$$

und diese Ausdrücke heben sich in den Gleichungen (1) und (2) links und rechts gegenseitig weg, so daß dann folgt:

3) $s_1 \cos \nu_1 + s_2 \cos \nu_2 + s_3 \cos \nu_3 + \ldots\ldots + s_n \cos \nu_n = 0$

4) $s_1 \sin \nu_1 + s_2 \sin \nu_2 + s_3 \sin \nu_3 + \ldots\ldots + s_n \sin \nu_n = 0.$

Die Summe der Projectionen aller Seiten eines beliebigen Polygons auf die Abscissenachse ist gleich Null, und die Summe der Projectionen aller Seiten auf die Ordinatenachse ist ebenfalls gleich Null.

Mit Hülfe dieser Sätze möge nun noch das Sechseck $A_1 A_2 \ldots\ldots A_6$ (Fig. 47) berechnet werden. Es sei gegeben:

$s_1 = 18,4 \quad \omega_1 = 108° \; 12' \; 20''$
$s_2 = 12,6 \quad \omega_2 = \;\; 36 \;\; 7 \;\; 10$
$s_3 = 11,9 \quad \omega_3 = 298 \;\; 18 \;\; 30$
$s_4 = \;\; 8,3 \quad \omega_4 = 144 \;\; 20 \;\; 55,95$
$s_5 = 21,2 \quad \omega_5 = \;\; 37 \;\; 18 \;\; 54,8$
$s_6 = 28,8 \quad \omega_6 = \;\; 95 \;\; 42 \;\; 9,25.$

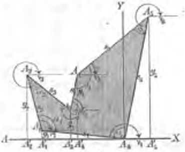


Fig. 47.

Es werde eine Achse AX zu Grunde gelegt, welche durch den Eckpunkt A_6 geht und mit s_1 den Winkel $\nu_0 = 7°\ 15'$ macht, so daß die Achse außerhalb der Figur fällt; die darauf rechtwinklige Ordinatenachse A_6 Y gehe ebenfalls durch den Eckpunkt A_6, so daß A_6 Anfangspunkt der Coordinaten ist. Man soll die auf diese Achsen bezogenen Coordinaten aller Eckpunkte finden.

I. Berechnung der Neigungswinkel.

$$\nu_0 = 7° \; 15' \; 0''$$
$$\nu_1 = \pi - \nu_0 = 172° \; 45' \; 0''.$$

Bestimmung von ω_n (§. 46)	Vergleichung von ν_n mit ν_{n+1}	ν_{n+1} bestimmt sich nach Formel
$\omega_1 < \pi$	$\nu_1 > \nu_2$	ν_2 nach (1)
$\omega_2 < \pi$	$\nu_2 > \nu_3$	ν_3 „ (2)
$\omega_3 > \pi$	$\nu_3 > \nu_4$	ν_4 „ (3)
$\omega_4 < \pi$	$\nu_4 > \nu_5$	ν_5 „ (1)
$\omega_5 < \pi$	$\nu_5 < \nu_6$	ν_6 „ (2)

Digitized by Google

ω_1	=	108°	12′	20″	zugehörige spitze Winkel.		
ν_1	=	172	45	0			
		280	57	20			
π	=	180	0	0			
ν_2	=	100	57	20	79°	2′	40″
ω_2	=	36	7	10			
		137	4	30			
π	=	180	0	0			
ν_3	=	317	4	30	42	55	30
ω_3	=	298	18	30			
		615	23	0			
3π	=	540	0	0			
ν_4	=	75	23	0			
ω_4	=	144	20	55,95			
		219	43	55,95			
π	=	180	0	0			
ν_5	=	39	43	55,95			
ω_5	=	37	18	54,8			
		77	2	50,75			
π	=	180	0	0			
ν_6	=	257	2	50,75	77	2	50,75

II. Berechnung der Coordinaten.

Der erste Punkt der Linienverbindung ist A_6, und $x_6 = 0$, $y_6 = 0$, daher folgende Formeln zu Grunde liegen:

$$x_1 = s_1 \cos \nu_1 \qquad y_1 = s_1 \sin \nu_1$$
$$x_2 = x_1 + s_2 \cos \nu_2 \qquad y_2 = y_1 + s_2 \sin \nu_2$$
$$x_3 = x_2 + s_3 \cos \nu_3 \qquad y_3 = y_2 + s_3 \sin \nu_3$$
$$x_4 = x_3 + s_4 \cos \nu_4 \qquad y_4 = y_3 + s_4 \sin \nu_4$$
$$x_5 = x_4 + s_5 \cos \nu_5 \qquad y_5 = y_4 + s_5 \sin \nu_5$$

und zur Probe kann dann noch berechnet werden:

$$x_6 = x_5 + s_6 \cos \nu_6 \qquad y_6 = y_5 + s_6 \sin \nu_6,$$

welche beide gleich Null werden müssen.

Logarithmen der Seiten.

$\log s_1 = 1{,}2648178$
$\log s_2 = 1{,}1003705$
$\log s_3 = 1{,}0755470$
$\log s_4 = 0{,}9190781$
$\log s_5 = 1{,}3263359$
$\log s_6 = 1{,}4593925.$

Logarithmen der Winkelfunctionen.

$\log\cos\nu_1$	$= 9{,}9965138\ (-)$	$\log\sin\nu_1$	$= 9{,}1010558$
$\log\cos\nu_2$	$= 9{,}2788621\ (-)$	$\log\sin\nu_2$	$= 9{,}9920119$
$\log\cos\nu_3$	$= 9{,}8646569$	$\log\sin\nu_3$	$= 9{,}8331729\ (-)$
$\log\cos\nu_4$	$= 9{,}4020048$	$\log\sin\nu_4$	$= 9{,}9857119$
$\log\cos\nu_5$	$= 9{,}8859491$	$\log\sin\nu_5$	$= 9{,}8056369$
$\log\cos\nu_6$	$= 9{,}3505278\ (-)$	$\log\sin\nu_6$	$= 9{,}9888068\ (-)$.

$\log s_1$	$= 1{,}2648178$	$\log s_1$	$= 1{,}2648178$
$\log\cos\nu_1$	$= 9{,}9965138\ (-)$	$\log\sin\nu_1$	$= 9{,}1010558$
$\log x_1$	$= 1{,}2613316\ (-)$	$\log y_1$	$= 0{,}3658736$
x_1	$= -\ 18{,}25289.$	y_1	$= 2{,}322061.$
$\log s_2$	$= 1{,}1003705$	$\log s_2$	$= 1{,}1003705$
$\log\cos\nu_2$	$= 9{,}2788621\ (-)$	$\log\sin\nu_2$	$= 9{,}9920119$
$\log(s_2\cos\nu_2)$	$= 0{,}3792326\ (-)$	$\log(s_2\sin\nu_2)$	$= 1{,}0923824$
$s_2\cos\nu_2$	$= -\ 2{,}394598$	$s_2\sin\nu_2$	$= 12{,}37036$
x_1	$= -\ 18{,}25289$	y_1	$= 2{,}322061$
x_2	$= -\ 20{,}647488.$	y_2	$= 14{,}692421.$
$\log s_3$	$= 1{,}0755470$	$\log s_3$	$= 1{,}0755470$
$\log\cos\nu_3$	$= 9{,}8646569$	$\log\sin\nu_3$	$= 9{,}8331729\ (-)$
$\log(s_3\cos\nu_3)$	$= 0{,}9402039$	$\log(s_3\sin\nu_3)$	$= 0{,}9087199\ (-)$
$s_3\cos\nu_3$	$= 8{,}713726$	$s_3\sin\nu_3$	$= -\ 8{,}104382$
x_2	$= -\ 20{,}647488$	y_2	$= 14{,}692421$
x_3	$= -\ 11{,}933762.$	y_3	$= 6{,}588039.$
$\log s_4$	$= 0{,}9190781$	$\log s_4$	$= 0{,}9190781$
$\log\cos\nu_4$	$= 9{,}4020048$	$\log\sin\nu_4$	$= 9{,}9857119$
$\log(s_4\cos\nu_4)$	$= 0{,}3210829$	$\log(s_4\sin\nu_4)$	$= 0{,}9047900$
$s_4\cos\nu_4$	$= 2{,}094512$	$s_4\sin\nu_4$	$= 8{,}031375$
x_3	$= -\ 11{,}933762$	y_3	$= 6{,}588039$
x_4	$= -\ 9{,}839250.$	y_4	$= 14{,}619414.$
$\log s_5$	$= 1{,}3263359$	$\log s_5$	$= 1{,}3263359$
$\log\cos\nu_5$	$= 9{,}8859491$	$\log\sin\nu_5$	$= 9{,}8056369$
$\log(s_5\cos\nu_5)$	$= 1{,}2122850$	$\log(s_5\sin\nu_5)$	$= 1{,}1319728$
$s_5\cos\nu_5$	$= 16{,}30366$	$s_5\sin\nu_5$	$= 13{,}55105$
x_4	$= -\ 9{,}83925$	y_4	$= 14{,}619414$
x_5	$= 6{,}46441.$	y_5	$= 28{,}170464.$

$\log s_6$	$= 1{,}4593925$	$\log s_6$	$= 1{,}4593925$
$\log\cos\nu_6$	$= 9{,}3505278\,(-)$	$\log\sin\nu_6$	$= 9{,}9888068\,(-)$
$\log(s_6\cos\nu_6)$	$= 0{,}8099203\,(-)$	$\log(s_6\sin\nu_6)$	$= 1{,}4481993\,(-)$
$s_6\cos\nu_6$	$= -\,6{,}455357$	$s_6\sin\nu_6$	$= -\,28{,}06721$
x_5	$= 6{,}464410$	y_5	$= 28{,}170464$
Fehler	$= 0{,}009053.$	Fehler	$= 0{,}103254.$

§. 49. Es sei wieder $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ (Fig. 46) ein zusammenhängender Linienzug, gegeben durch die rechtwinkeligen Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2 \ldots\ldots x_n, y_n$ seiner Eckpunkte $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$; es sei die Bezeichnung der Seiten und Neigungswinkel dieselbe wie bisher. Man soll den Inhalt der durch den Linienzug $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$, durch die Ordinaten des ersten und letzten Punktes $A_1 P_1$ und $A_n P_n$ desselben und durch die Abscissenachse gebildeten Figur $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n P_n P_1 A_1$ bestimmen.

Man fälle von sämmtlichen Eckpunkten die Ordinaten $A_1 P_1$, $A_2 P_2 \ldots\ldots A_n P_n$. Je zwei auf einander folgende dieser Ordinaten, z. B. y_1 und y_2, bilden mit der dazwischenliegenden Geraden ($A_1 A_2$) des Linienzuges und ihrer Projection ($P_1 P_2$) auf die Abscissenachse ein Trapez ($A_1 A_2 P_2 P_1$); der Inhalt solchen Trapezes wird gefunden, wenn man die Mittellinie ($Q_1 Q_1'$) mit der Höhe ($P_1 P_2$) des Trapezes multiplicirt, d. h. es ist für das erste Trapez:

$$A_1 A_2 P_2 P_1 = Q_1 Q_1' \cdot P_1 P_2.$$

$Q_1 Q_1'$ ist aber die Ordinate des Halbirungspunktes von $A_1 A_2$, folglich:

$$Q_1 Q_1' = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

und die Höhe $P_1 P_2$ ist die Projection der Seite $A_1 A_2$ oder s_1 auf die Abscissenachse; ist der Neigungswinkel von $A_1 A_2$ gleich ν_1, so ist:

$$P_1 P_2 = s_1 \cdot \cos\nu_1.$$

Heißt dann J_1 der Inhalt dieses ersten Trapezes, so ist:

$$J_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_1 \cos\nu_1.$$

Ebenso findet man bei analoger Bezeichnung:

$$J_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_2 \cos\nu_2$$

$$J_3 = \frac{y_3 + y_4}{2} \cdot s_3 \cos\nu_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich für das letzte Trapez:

$$J_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot s_n \cdot \cos\nu_n.$$

Die Summe aller dieser Trapeze ist dann der Inhalt der Figur $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n P_n P_1 A_1$, wenn nur nicht einzelne Theile des Linienzugs eine solche Lage haben, daß das einer Geraden $A_k A_{k+1}$ zugehörige Trapez theilweise über das einer andern Geraden des Linienzugs zugehörige übergreift, weil dann dieselbe

Fläche doppelt gerechnet würde. Wenn diese Bedingung erfüllt ist und J den Inhalt der ganzen Figur bezeichnet, so ist allemal:

$$J = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_1 \cos \nu_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_2 \cos \nu_2 + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} s_n \cos \nu_n .$$

Für alle andern Fälle, wo ein Trapez über ein oder mehrere benachbarte übergreift, möge Fig. 48 als Beispiel dienen; es soll an ihr gezeigt werden, wie diese Fälle auf den ursprünglichen und einfachsten Fall zurückgeführt werden. Der Inhalt der Figur $A_1 A_2 \ldots. A_8 P_8 P_1$ zerfällt in die drei Theile:

$$P_1 A_1 A_2 A_3 P_3 , \quad P_7 A_7 A_8 P_8$$
und $P_4 A_4 A_5 A_6 P_6$,

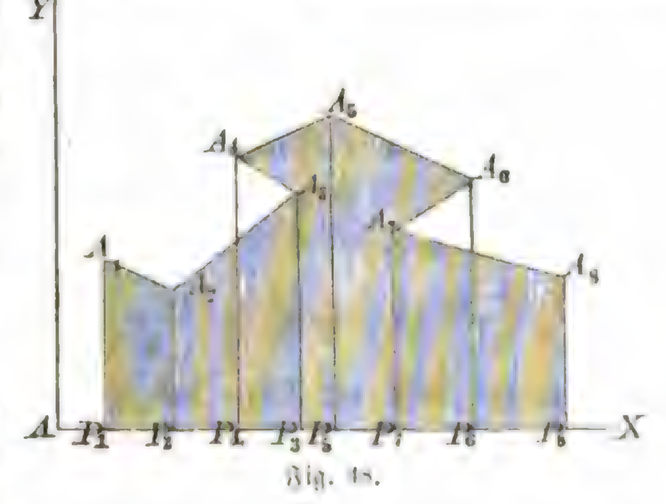


Fig. 48.

von denen die beiden ersten von der Art der Fig. 46 sind, also nach der eben gefundenen Formel ohne weiteres berechnet werden können, der letzte aber, da seine Projection über die der andern Theile übergreift, nicht ebenso zu berechnen ist. Es ist nämlich bei diesem dritten Theile nur der Inhalt der Figur $P_3 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 P_7$ zu berechnen, und dieser ist offenbar:

$$= P_4 A_4 A_5 A_6 P_6 \;-\; P_4 A_4 A_3 P_3 \;-\; P_7 A_7 A_6 P_6 ,$$

die wir der Reihe nach kurz mit J′, J″, J‴ bezeichnen wollen. Nun ist nach dem Vorigen:

$$J' = \frac{y_4 + y_5}{2} \cdot s_4 \cos \nu_4 + \frac{y_5 + y_6}{2} \cdot s_5 \cdot \cos \nu_5 ;$$

$$J'' = \frac{y_3 + y_4}{2} \cdot s_3 \cos \nu_3 ,$$

$$J''' = \frac{y_6 + y_7}{2} s_6 \cos \nu_6 ,$$

also ist denn der Inhalt der Figur $P_3 A_3 \ldots . A_7 P_7 = J' - J'' - J'''$, wenn man für J′, J″, J‴ beziehlich die eben genannten Ausdrücke gesetzt denkt.

Allein, weil hier A_4 der Ordinatenachse näher liegt als A_3, A_7 näher als A_6, so sind nach §. 47 in den beiden letzten Ausdrücken die Neigungswinkel der Linien $A_3 A_4$ und $A_6 A_7$ nicht in ihren Anfangspunkten A_3 und A_6, sondern in ihren Endpunkten A_4 und A_7 genommen, also um 180° von den wirklichen Neigungswinkeln verschieden gefunden; statt ν hat man also $\nu \pm \pi$ gefunden, deren cos das von cos ν entgegengesetzte Vorzeichen hat; J″ und J‴ sind also die entgegengesetzten (negativen) Werthe der gesuchten Inhalte, während J′ der positive Werth ist, da A_4 der Ordinatenachse näher liegt als A_6. Die Figur $P_3 A_3 \ldots . A_7 P_7$ ist diesem nach

Digitized by Google

$$= J' - (-J'') - (-J''')$$
$$= J' + J'' + J'''.$$

Setzt man statt J', J'', J''' die oben schon gefundenen Werthe ein, so erhält man für den Inhalt der Fig. 48 allgemein:

$$J = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_1 \cos \nu_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_2 \cos \nu_2 + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot s_n \cdot \cos \nu_n.$$

§. 50. Der Inhalt eines beliebigen geschlossenen Polygons ist, wenn man durchweg die bisherige Bezeichnung beibehält, wobei nur zu bemerken, daß der $(n+1)$ste Eckpunkt mit dem ersten zusammenfällt, also $\nu_{n+1} = \nu_1$, $y_{n+1} = y_1$ u. s. w.:

$$J = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_1 \cos \nu_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_2 \cos \nu_2 + \ldots + \frac{y_n + y_1}{2} \cdot s_n \cos \nu_n,$$

wenn n die Zahl der Ecken des Polygons ist.

Es sei $A_1 P_1$ (Fig. 49) die Ordinate des der Ordinatenachse zunächst liegenden Eckpunktes, $A_5 P_5$ die Ordinate des von der Ordinatenachse entferntesten Eckpunktes, so ist:

$$J = P_1 A_1 A_2 \ldots A_5 P_5 - P_1 A_1 A_8 \ldots A_5 P_5,$$

was kurz durch: $J = J' - J''$

bezeichnet werden mag. Nun ist aber nach §. 49:

$$J' = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_1 \cos \nu_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_2 \cos \nu_2 + \ldots + \frac{y_4 + y_5}{2} \cdot s_4 \cos \nu_4;$$

$$J'' = \frac{y_5 + y_6}{2} \cdot s_5 \cos \nu_5 + \frac{y_6 + y_7}{2} \cdot s_6 \cos \nu_6 + \ldots + \frac{y_8 + y_1}{2} \cdot s_8 \cos \nu_8.$$

Fig. 49.

Da aber in diesem letzten Ausdrucke für J'' wieder die spätern Punkte der Ordinatenachse näher liegen als die frühern, so erhält man so den negativen Werth von J'', und da der positive subtrahirt werden soll, so muß der negative addirt werden, d. h. es ist der Werth von J in der That dem in der Behauptung enthaltenen Ausdrucke gleich.

Ganz in derselben Weise läßt sich der Inhalt eines Polygons durch die Projectionen seiner Seiten auf die Ordinatenachse ausdrücken. Um die betreffende Formel zu finden, möge uns die Figur 42 dienen. Hier ist der Inhalt:

$$J = A_1 Q_1 Q_3 A_3 - A_1 Q_1 Q_2 A_2 - A_2 Q_2 Q_3 A_3,$$

welches kurz durch $J = J_1 - J_2 - J_3$

ausgedrückt sein mag.

Nun ist: $J_1 = \frac{x_3 + x_1}{2} \cdot Q_1 Q_3$;

$$Q_1 Q_3 = Q A_3 = A_1 A_3 \cdot \cos A_1 A_3 Q = A_1 A_3 \cdot \cos(\nu_3 - {}^3/_2\pi)$$
$$= - A_1 A_3 \cdot \sin \nu_3.$$

Setzt man $A_1 A_2 = s_1$, $A_2 A_3 = s_2$ und $A_3 A_1 = s_3$, so ist:

$$J_1 = - \frac{x_3 + x_1}{2} \cdot s_3 \cdot \sin \nu_3$$

$$J_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot Q_1 Q_2$$

$$Q_1 Q_2 = A_2 R = A_1 A_2 \cos A_1 A_2 R = s_1 \cos A_2 A_1 S = s_1 \cos(\nu_1 - {}^1/_2\pi)$$
$$= s_1 \cdot \sin \nu_1.$$

$$J_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot s_1 \cdot \sin \nu_1$$

$$J_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} \cdot Q_2 Q_3$$

$$Q_2 Q_3 = A_2 R' = A_2 A_3 \cdot \cos A_3 A_2 R'$$
$$= s_2 \cdot \cos({}^1/_2\pi - \nu_2)$$
$$= s_2 \cdot \sin \nu_2$$

$$J_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} \cdot s_2 \cdot \sin \nu_2.$$

Folglich:

$$J = - \frac{x_3 + x_1}{2} \cdot s_3 \cdot \sin \nu_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} s_1 \cdot \sin \nu_1 - \frac{x_2 + x_3}{2} s_2 \cdot \sin \nu_2,$$

d. h. wegen der veränderten Lage der Linien s_1, s_2, s_3 zur Ordinatenachse erhält man alle Glieder des Aggregats negativ, und zwar entweder weil die sin der Neigungswinkel negative Werthe annehmen, oder weil die Glieder an sich subtractiv in Rechnung kommen. Die allgemeine Formel ist also:

$$- J = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot s_1 \sin \nu_1 + \frac{x_2 + x_3}{2} \cdot s_2 \sin \nu_2 + \frac{x_3 + x_4}{2} s_3 \sin \nu_3$$
$$+ \ldots + \frac{x_n + x_1}{2} \cdot s_n \sin \nu_n.$$

Um dem Anfänger die praktische Verwendung auch dieser Formeln zu zeigen, möge hier noch der Inhalt des Sechsecks (Fig. 47) berechnet werden, indem man die im §. 48 bereits gefundenen Coordinaten zu Grunde legt. Danach ist:

		Logarithmen.
$y_1 =$	2,322061	
$y_2 =$	14,692421	
	17,014482	
2)		
$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) =$	8,507241	0,9298398
$y_2 =$	14,692421	
$y_3 =$	6,588039	
	21,280460	
2)		
$\frac{1}{2}(y_2 + y_3) =$	10,640230	1,0269509
$y_3 =$	6,588039	
$y_4 =$	14,619414	
	21,207453	
2)		
$\frac{1}{2}(y_3 + y_4) =$	10,603726	1,0254585
$y_4 =$	14,619414	
$y_5 =$	28,170464	
	42,789878	
2)		
$\frac{1}{2}(y_4 + y_5) =$	21,394939	1,3303111
$y_5 =$	28,170464	
$y_6 =$	0	
	28,170464	
2)		
$\frac{1}{2}(y_5 + y_6) =$	14,085232	1,1487641
$y_6 =$	0	
$y_1 =$	2,322061	
	2,322061	
2)		
$\frac{1}{2}(y_6 + y_1) =$	1,161030	0,0648434
	92,71600	20,37384
	22,20968	90,92522
	348,81571	21,19215
	463,74134	132,49121
	132,49121	
$J =$	331,25013	

$\log \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 0,9298398$
$\log s_2 = 1,1003705$ *)
$\log \cos \nu_2 = 9,2788626\ (-)$
$1,3090729\ (-)$
$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot s_2 \cos \nu_2 = -20,37384.$

$\log \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = 1,0269509$
$\log s_3 = 1,0755470$
$\log \cos \nu_3 = 9,8646569$
$1,9671548$
$\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \cdot s_3 \cos \nu_3 = 92,71600.$

$\log \frac{1}{2}(y_3 + y_4) = 1,0254585$
$\log s_4 = 0,9190781$
$\log \cos \nu_4 = 9,4020048$
$1,3465414$
$\frac{1}{2}(y_3 + y_4) \cdot s_4 \cos \nu_4 = 22,20963.$

$\log \frac{1}{2}(y_4 + y_5) = 1,3303111$
$\log s_5 = 1,3263359$
$\log \cos \nu_5 = 9,8859491$
$2,5425961$
$\frac{1}{2}(y_4 + y_5) \cdot s_5 \cos \nu_5 = 348,81571.$

$\log \frac{1}{2}(y_5 + y_6) = 1,1487641$
$\log s_6 = 1,4593925$
$\log \cos \nu_6 = 9,3505278\ (-)$
$1,9586844\ (-)$
$\frac{1}{2}(y_5 + y_6) \cdot s_6 \cos \nu_6 = -90,92522.$

$\log \frac{1}{2}(y_6 + y_1) = 0,0648434$
$\log s_1 = 1,2648178$
$\log \cos \nu_1 = 9,9965138\ (-)$
$1,3261750\ (-)$
$\frac{1}{2}(y_6 + y_1) \cdot s_1 \cos \nu_1 = -21,19215.$

---

*) Wegen der Lage des Anfangspunktes A_6 und der danach gewählten Bezeichnung der Seiten und Neigungswinkel in Fig. 47 gestaltet sich die Formel für den Inhalt hier so:

$$J = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot s_2 \cos \nu_2 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot s_3 \cos \nu_3 + \ldots + \frac{y_6 + y_1}{2} \cdot s_1 \cos \nu_1 .$$

§. 51. Wir setzen hier zwar eine völlige Bekanntschaft mit den trigonometrischen Formeln voraus, unterlassen aber doch nicht, zu bemerken, daß die vorgetragenen Lehren die Grundlage für sämmtliche trigonometrische Dreiecksformeln enthalten, und da sie sich hieraus mit der größten Leichtigkeit entwickeln lassen, so mag auch noch die Herleitung der wichtigsten folgen.

Legt man das Dreieck ABC Fig. 50 zu Grunde, setzt BC = a, AC = b, AB = c, und nennt α, β, γ die den Seiten a, b, c beziehlich gegenüberliegenden Winkel, nimmt dann ein rechtwinkeliges Achsensystem OX, OY an, so daß die Achse OX mit der Seite c parallel zu liegen kommt, und A weiter von der Ordinatenachse absteht als B, so ist hier:

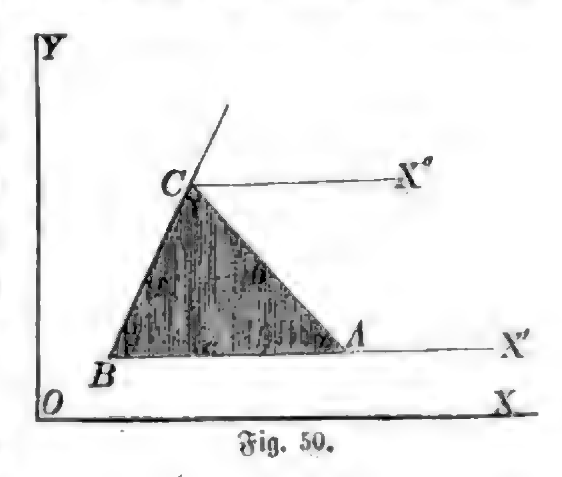


Fig. 50.

$$\nu_1 = \pi,\ \nu_2 = \beta,\ \nu_3 = 2\pi - \alpha,$$

weil CX'' ⫲ BA, also W. CAX'' = α. Es ist aber auch W. CAX' = $\beta + \gamma$, also $\nu_1 = \alpha + \beta + \gamma$, woraus, wenn es nicht sonst schon bekannt wäre, unabhängig vom bekannten Dreieckssatze geschlossen werden könnte, daß $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Bezieht man dann die Formeln §. 48 (3) (4) auf diese Figur, so ist noch:

$$s_1 = c,\quad s_2 = a,\quad s_3 = b,$$

und jene Formeln gehen zunächst über in:

$$1)\quad -c + a\cos\beta + b\cos\alpha = 0;$$
$$2)\quad a\cdot\sin\beta - b\cdot\sin\alpha = 0,$$

woraus leicht die bekannten Formen:

$$1.\ \begin{cases} \text{I.}\ \ c = a\cos\beta + b\cos\alpha, \\ \text{II.}\ \ a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha \end{cases}$$ abgeleitet werden.

Legt man dann die Abscissenachse OX parallel mit der Seite b, so wird $s_1 = b$, $s_2 = a$, $s_3 = c$, $\nu_1 = \pi$, $\nu_2 = \gamma$, $\nu_3 = 2\pi - \alpha$, und die Formeln §. 48 (3) (4) geben nun:

$$2.\ \begin{cases} \text{I.}\ \ b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ \text{II.}\ \ a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha. \end{cases}$$

Legt man endlich die Abscissenachse OX parallel mit a, so wird $s_1 = a$, $s_2 = c$, $s_3 = b$, $\nu_1 = \pi$, $\nu_2 = \beta$, $\nu_3 = 2\pi - \gamma$, und dieselben Formeln geben:

$$3.\ \begin{cases} \text{I.}\ \ a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ \text{II.}\ \ b\cdot\sin\gamma = c\sin\beta. \end{cases}$$

Aus $\quad a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha$

und $\quad b\cdot\sin\gamma = c\sin\beta$

folgt: $\quad (a + b)\sin\gamma = c(\sin\alpha + \sin\beta)$,

und: $\quad (a - b)\sin\gamma = c(\sin\alpha - \sin\beta)$.

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)},$$

und dividirt man hier wieder Zähler und Nenner durch $2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)$ $\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$, so ergibt sich:

$$\text{III.}\quad 1)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha-\beta)}.$$

Durch die andern zwei noch möglichen Combinationen der Formeln (II) erhält man noch:

$$2)\ \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha+\gamma)}{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha-\gamma)}.$$

$$3)\ \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\beta+\gamma)}{\operatorname{tg}{}^1/_2(\beta-\gamma)}.$$

Multiplicirt man jede der Gleichungen (I) mit dem Buchstaben, der in ihr isolirt erscheint, subtrahirt dann je eins dieser Producte von der Summe der beiden andern und ordnet, so folgt:

$$\text{IV.}\ \begin{cases} 1)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha, \\ 2)\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta, \\ 3)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen des §. 50 lassen sich auch die besondern Formeln ableiten, nach welchen der Inhalt eines Dreiecks gefunden wird. Es ist nämlich, wenn wieder AB (Fig. 50) der Abscissenachse parallel ist, nach der ersten Gleichung, da $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = a\cdot\sin\beta$:

$$\begin{aligned} J &= {}^1/_2\, a^2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta + {}^1/_2\, ab\sin\beta\cos\alpha \\ &= {}^1/_2\, a\cdot\sin\beta\cdot(a\cos\beta + b\cos\alpha) \\ &= {}^1/_2\, a\cdot\sin\beta\cdot c \quad (\text{I. } 1) \end{aligned}$$

$$\text{V.}\quad J = {}^1/_2\, ac\cdot\sin\beta.$$

Nach der zweiten Gleichung des §. 50 ist:

$$\begin{aligned} -J &= {}^1/_2\, a^2\sin\beta\cos\beta - {}^1/_2\, ab\cos\beta\sin\alpha - {}^1/_2\, bc\cdot\sin\alpha \\ &= {}^1/_2\, a\cdot\cos\beta\,(a\sin\beta - b\sin\alpha) - {}^1/_2\, bc\sin\alpha; \end{aligned}$$

$a\cdot\sin\beta = b\sin\alpha$ (II. 1), also:

$$J = {}^1/_2\, bc\cdot\sin\alpha,$$

was übrigens mit (V) auf eins hinausläuft.

Dies mag genügen, um den Zusammenhang unserer Untersuchungen mit den gewöhnlichen Dreiecksformeln zu zeigen.

F. Auflösung der Dreiecke durch Reihen.

§. 52. Die für die Berechnung der Dreiecke in den Lehrbüchern der Trigonometrie aufgestellten Formeln sind zwar theoretisch für alle denkbaren Fälle

gültig; der praktischen Ausführung der Rechnung stellen sich aber in einzelnen Fällen Schwierigkeiten entgegen, welche ihren Grund nicht sowol in den Formeln, als vielmehr in den uns zur Berechnung gebotenen Hülfsmitteln, den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln haben. Statt weitläufiger Erörterungen möge uns ein Beispiel hiervon überzeugen.

Es seien zu einem Dreiecke gegeben: $c = 3000$; $\alpha = 0° \, 0' \, 50''$; $\beta = 0° \, 1' \, 8''$; man soll daraus die Seiten a und b finden. Nach gewöhnlichem Verfahren würde man die Rechnung nach den Formeln:

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

führen, nämlich:

log c =	3,4771213	log c =	3,4771213
log sin α =	6,3845449	log sin β =	6,5180838
E · log sin (α + β) =	3,2425431	E · log sin (α + β) =	3,2425431
log a =	3,1042093.	log b =	3,2377482.
a =	1271,1864.	b =	1728,8136.

Berechnet man aber hieraus die Größe a + b, so findet man:

$$a + b = 3000,$$

d. h. die Summe zweier Seiten eines Dreiecks genau so groß als die dritte, was nimmermehr richtig sein kann. Da die Winkel α und β nur klein sind, so wird zwar auch a + b nicht viel von c verschieden sein; aber allemal muß doch $a + b > c$ sein. Nun wird hier dieser Unterschied erst in den spätern Decimalen sichtbar werden, welche die Tafeln gar nicht mehr angeben, da sie über sieben Stellen hinaus nicht aufzuschlagen gestatten. Es sind in obenstehender Rechnung zwar acht Stellen bestimmt, indem man die Proportionaltheile zur Bestimmung von drei Stellen benutzt hat, was eigentlich nicht statthaft ist, da die dritte nicht mehr zuverlässig ist. Lassen wir aber die achte Stelle aus beiden Resultaten für die Seiten a und b fort, so bekommen wir für a + b gar nur 2999,999, so daß die Summe sogar kleiner würde als die dritte Seite c.

Wenn nun auch die Fälle, wo man es mit so kleinen Winkeln zu thun hat, gerade nicht sehr häufig sind, so ist es doch wichtig genug, daß man, wenn der Fall einmal da ist, ein Resultat finden könne, das wenigstens nicht mathematischen Gesetzen widerspreche. Ein in solchen Fällen anwendbares Verfahren zu finden ist der Zweck der folgenden Erörterungen.

§. 53. Sollen aus einer Seite eines Dreiecks und zwei Winkeln die beiden fehlenden Seiten bestimmt werden, so hat man dafür allemal die Formeln:

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Man verwandle hierin nun die Winkel in Bogenmaß, indem man $\frac{\alpha}{\omega}$ statt α,

$\frac{\beta}{\omega}$ statt β setzt, nachdem man die Winkel α, β in Secunden ausgedrückt hat; dann entwickele man $\sin\frac{\alpha}{\omega}$, $\sin\frac{\beta}{\omega}$ und $\sin\frac{\alpha+\beta}{\omega}$ nach §. 25 in Reihen, indem man setzt:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) = \frac{\alpha}{\omega} - {}^1/_6\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^3, \quad \sin\left(\frac{\beta}{\omega}\right) = \frac{\beta}{\omega} - {}^1/_6\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^3,$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{\omega}\right) = \frac{\alpha+\beta}{\omega} - {}^1/_6\left(\frac{\alpha+\beta}{\omega}\right)^3,$$

während man die übrigen Glieder dieser Reihen, da sie nur höhere Potenzen der jedenfalls nur sehr kleinen Zahlenwerthe $\frac{\alpha}{\omega}$ u. s. w. enthalten, unbedenklich vernachlässigen kann. Um jedoch in der Rechnung möglichste Einfachheit zu erzielen, wollen wir einstweilen das ω nicht schreiben und erst im Endresultate einführen; dies schadet durchaus nicht, da wir uns vorstellen können, daß α und β schon Bogen bedeuten; man könnte auch statt α und β beziehlich α', β' setzen und $\alpha' = \frac{\alpha}{\omega}$, $\beta' = \frac{\beta}{\omega}$ sich denken. Wir werden aber geradezu α und β stehen lassen und uns $\frac{\alpha}{\omega}$ und $\frac{\beta}{\omega}$ darunter denken und am Schlusse der Rechnung dafür setzen. Man erhält so:

$$1)\quad a = \frac{c\cdot(\alpha - {}^1/_6\,\alpha^3)}{(\alpha+\beta) - {}^1/_6\,(\alpha+\beta)^3} = \frac{c\,\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{1 - {}^1/_6\,\alpha^2}{1 - {}^1/_6\,(\alpha+\beta)^2}\right).$$

Dividirt man nun auf gewöhnliche Weise $1 - {}^1/_6\,\alpha^2$ durch $1 - {}^1/_6\,(\alpha+\beta)^2$, nachdem für letzteres $1 - {}^1/_6\,\alpha^2 - {}^1/_3\,\alpha\beta - {}^1/_6\,\beta^2$ gesetzt worden, und läßt nach dem dritten Gliede alle übrigen Glieder des Quotienten fort, was ohne Nachtheil geschehen kann, weil sie nur höhere Potenzen der ohnehin schon sehr kleinen Größen α und β (eigentlich $\frac{\alpha}{\omega}$ und $\frac{\beta}{\omega}$) enthalten, so findet man:

$$\frac{1 - {}^1/_6\,\alpha^2}{1 - {}^1/_6\,\alpha^2 - {}^1/_3\,\alpha\beta - {}^1/_6\,\beta^2} = 1 + {}^1/_3\,\alpha\beta + {}^1/_6\,\beta^2 = 1 + \frac{2\alpha\beta + \beta^2}{6};$$

und setzt man dies in den Ausdruck in (1) ein, so bekommt man:

$$2)\quad a = \frac{c\,\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 + \frac{2\,\alpha\beta + \beta^2}{6}\right).$$

Ganz ebenso erhält man:

$$3)\quad b = \frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\left(1 + \frac{2\,\alpha\beta + \alpha^2}{6}\right).$$

In beiden Formeln muß jedoch vor ihrer Anwendung auf numerische Rechnungen $\frac{\alpha}{\omega}$ statt α, und $\frac{\beta}{\omega}$ statt β gesetzt werden, um die in Secunden ausgedrückten Winkel in Bogen für den Radius 1 zu verwandeln. Berechnet man dann noch den Ausdruck $a + b - c$, so findet man dafür:

$$\frac{c\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{c\beta}{\alpha+\beta} + \frac{c\alpha^2\beta + c\alpha\beta^2}{3(\alpha+\beta)} + \frac{c\alpha\beta^2 + c\alpha^2\beta}{6(\alpha+\beta)} - \frac{c(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta},$$

oder 4) $$a + b - c = \tfrac{1}{2}\, c\alpha\beta.$$

Dieser Formel kann man sich zur Prüfung der Rechnung bedienen; auch hier müssen α und β in Bogen verwandelt werden. Rücksichtlich dieser Verwandlung in Bogen ist noch zu bemerken, daß in den Formeln (2) und (3) in dem Quotienten vor der Klammer ω sich wegheben würde, daher ganz fortbleiben kann, daß aber in den Quotienten $\frac{2\alpha\beta+\beta^2}{6}$ und $\frac{2\alpha\beta+\alpha^2}{6}$ der Nenner noch den Factor ω^2 bekommen muß.

Um zu zeigen, welche Vortheile dieses Verfahren vor der gewöhnlichen Rechnung hat, mag das in §. 52 nach gewöhnlicher Weise berechnete Zahlenbeispiel hier nach den eben entwickelten Formeln berechnet werden. Es ist also

$$c = 3000,\ \alpha = 50'',\ \beta = 68'',\ \alpha+\beta = 118''.$$

$$\frac{c\alpha}{\alpha+\beta} = 3000 \cdot \frac{50}{118} = 1271{,}18644.$$

$$2\alpha\beta = 6800 \qquad \omega = 206264{,}8$$

$$\frac{2\alpha\beta}{6} = 1133{,}333\ldots. \qquad \log\omega = 5{,}3144251$$

$$\log 1133{,}33\ldots. = 3{,}0543576 \qquad \log\omega^2 = 10{,}6288502$$

$$\log 1271{,}1864 = 3{,}1042092 \qquad \mathrm{E}\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498 - 1.$$

$$\mathrm{E}\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498 - 1^{*})$$

$$\log\left(\frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\alpha\beta}{6\omega^2}\right) = 0{,}5297166 - 5.$$

$$\frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\alpha\beta}{6\omega^2} = 0{,}0000338623.$$

$$\beta = 68'';\ \beta^2 = 4624;\ \frac{\beta^2}{6} = 770{,}66\ldots.$$

$$\log 770{,}66\ldots. = 2{,}8868665$$

$$\log 1271{,}1864 = 3{,}1042092$$

$$\mathrm{E}\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498 - 1$$

$$\log\left(\frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^2}{6\omega^2}\right) = 0{,}3622255 - 5$$

$$\frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^2}{6\omega^2} = 0{,}0000230263.$$

$$a = \frac{c\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\alpha\beta}{6\omega^2} + \frac{c\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^2}{6\omega^2}.$$

---

*) Eigentlich — 11; aber da man gewohnt ist, bei der dekadischen Ergänzung 10 abzuziehen, wird dies genügen.

$$\frac{c\,\alpha}{\alpha+\beta} = 1271{,}18644$$

$$\frac{c\,\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\,\alpha\beta}{6\,\omega^2} = 0{,}0000338623$$

$$\frac{c\,\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^2}{6\,\omega^2} = 0{,}0000230263$$

$$a = 1271{,}1864968886$$

$$\frac{c\,\beta}{\alpha+\beta} = 3000\cdot\frac{68}{118} = 1728{,}81356.$$

$$\frac{2\,\alpha\beta}{6} = 1133{,}33\ldots.$$

$$\log 1133{,}33\ldots. = 3{,}0543576$$
$$\log 1728{,}813\ldots = 3{,}2377481$$
$$E\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498-1$$

$$\log\left(\frac{c\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\,\alpha\beta}{6\,\omega^2}\right) = 0{,}6632555-5$$

$$\frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\,\alpha\beta}{6\,\omega^2} = 0{,}00004605274.$$

$$\alpha^2 = 2500;\quad \frac{\alpha^2}{6} = 416{,}66\ldots.$$

$$\log 416{,}66\ldots. = 2{,}6197886$$
$$\log 1728{,}81356 = 3{,}2377481$$
$$E\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498-1$$

$$\log\left(\frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{6\,\omega^2}\right) = 0{,}2286865-5.$$

$$\frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{6\,\omega^2} = 0{,}00001693115.$$

$$b = \frac{c\,\beta}{\alpha+\beta} + \frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\,\alpha\beta}{6\,\omega^2} + \frac{c\,\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{6\,\omega^2}.$$

$$\frac{c\,\beta}{\alpha+\beta} = 1728{,}81356$$

$$\frac{c\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{2\,\alpha\beta}{6\,\omega^2} = 0{,}00004605274$$

$$\frac{c\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{6\,\omega^2} = 0{,}00001693115$$

$$b = 1728{,}81362298389$$
$$a = 1271{,}1864968886$$
$$a+b = 3000{,}00011987249$$
$$c = 3000$$
$$a+b-c = 0{,}000119872.$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\cdot 50 \cdot 68 = 1700$$
$$\log c = 3{,}4771213$$
$$\log 1700 = 3{,}2304489$$
$$E\cdot\log\omega^2 = 0{,}3711498 - 1$$
$$\log\left(\tfrac{1}{2}c\frac{\alpha\beta}{\omega^2}\right) = 0{,}0787200 - 4$$
$$\tfrac{1}{2}c\frac{\alpha\beta}{\omega^2} = 0{,}000119872 = a + b - c.$$

§. 54. Es seien die Seiten a, b und der davon eingeschlossene Winkel γ gegeben, und zwar sei $\gamma = \pi - \psi$ und ψ ein sehr kleiner Winkel. Dann ist:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\psi \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\,(1 - \tfrac{1}{2}\psi^2) \quad (\text{§. 25}) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab - ab\psi^2 \\ &= (a+b)^2 - ab\cdot\psi^2 \end{aligned}$$
$$c = a + b - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\psi^2}{a+b} \quad (\text{§. 18}).$$

Nun ist

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} = \frac{a\,(\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3)}{a + b - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\psi^2}{a+b}} = \frac{a\,(a+b)\,(\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3)}{(a+b)^2 - \tfrac{1}{2}ab\cdot\psi^2}$$
$$= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3}{1 - \frac{\tfrac{1}{2}ab\psi^2}{(a+b)^2}}.$$
$$\frac{\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3}{1 - \frac{\tfrac{1}{2}ab\cdot\psi^2}{(a+b)^2}} = \psi + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\psi^3}{(a+b)^2} - \tfrac{1}{6}\psi^3.$$

Also:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{a+b}\cdot\left(\psi + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\cdot\psi^3}{(a+b)^2} - \tfrac{1}{6}\psi^3\right) \\ &= \frac{a\psi}{a+b}\left(1 + \frac{3ab - (a+b)^2}{6\,(a+b)^2}\cdot\psi^2\right) \\ &= \frac{a\psi}{a+b}\cdot\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{6\,(a+b)^2}\cdot\psi^2\right) \end{aligned}$$
$$\alpha = \sin\alpha + \tfrac{1}{6}\sin\alpha^3 \quad (\text{§. 26}).$$

Für sin α den Werth aus dem vorigen Ausdruck setzend, erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a\psi}{a+b} + \frac{a\psi^3}{6\,(a+b)}\cdot\frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2} + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{a^3\psi^3}{(a+b)^3} \\ &= \frac{a\psi}{a+b} + \frac{ab\,(a-b)}{(a+b)^3}\cdot\frac{\psi^3}{6} \\ &= \frac{a\psi}{a+b}\cdot\left[1 + \frac{b\,(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\psi^2}{6}\right]. \end{aligned}$$

Um β zu finden hat man:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \pi \\ \gamma &= \pi - \psi \\ \hline \alpha + \beta + \pi - \psi &= \pi \\ \alpha + \beta &= \psi \\ \beta &= \psi - \alpha. \end{aligned}$$

Als Zahlenbeispiele wähle ich hier das von Legendre über denselben Gegenstand berechnete; da er sich jedoch der Centesimaltheilung der Winkel bedient, so habe ich die Winkel in die Sexagesimaltheilung umgerechnet. Es sei also: $a = 1000$, $b = 2400$, $\gamma = 179^\circ\, 23'\, 16'',8$, also $\psi = 36'\, 43'',2 = 2603''2$. Will man sich vor der Rechnung die Formel für c so umgestalten, daß statt des Winkels ψ der Bogen für den Radius 1 darin vorkommt, so erhält man:

$$c = a + b - \frac{\tfrac{1}{2}\, a\, b}{a + b} \cdot \left(\frac{\psi}{\omega}\right)^2.$$

Ebenso erhält man:

$$\alpha = \frac{a\,\psi}{a + b}\left[1 + \frac{b\,(a - b)}{6\,(a + b)^2} \cdot \left(\frac{\psi}{\omega}\right)^2\right].$$

Man erhält sodann folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} c &= 3400 - \frac{\tfrac{1}{2} \cdot 2400000}{3400} \cdot \left(\frac{2603{,}2}{\omega}\right)^2 \\ &= 3400 - 0{,}056217 = 3399{,}943783. \end{aligned}$$

Nimmt man zur Berechnung von α vorläufig das erste Glied:

$$\alpha = \frac{a\,\psi}{a + b}$$

(wo wegen der Einfachheit der Formel ω wegbleiben kann, weil man den Bogen doch sogleich wieder in den Winkel umsetzen würde), so erhält man:

$$\alpha = \frac{1000 \cdot 2603{,}2}{3400} = 765'',647 = 12'\, 45'',647.$$

$$\beta = \psi - \alpha = 23'\, 57'',553.$$

Rechnet man aber nach der vollständigen Formel, so erhält man, weil $a - b = -1400$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 765'',647 \cdot \left[1 - \frac{2400 \cdot 1400}{6 \cdot 3400^2} \cdot \left(\frac{2603{,}2}{\omega}\right)^2\right] \\ &= 765'',641. \end{aligned}$$

Da rechts innerhalb der eckigen Klammer Bogen enthalten sind, der Factor $765'',647$ aber bereits einen Winkel ausdrückt, so muß man die Klammer für sich berechnen, erhält als Werth der Klammer 0,999992284, das, mit 765,647 multiplicirt, die oben aufgeführte Zahl gibt.

Zweites Kapitel.

Aus der Physik.

A. Aus der Optik.

§. 55. Wenn man einen fernen Punkt a (Fig. 51) mit einem Auge A betrachtet, so läßt sich ein undurchsichtiger Körper in eine solche Lage c bringen, daß jener Punkt dem Auge nicht länger sichtbar bleibt. Ermittelt man dann den Ort des Körpers, so findet sich, daß er sich in der vom Auge A zum gesehenen Punkte a gehenden geraden Linie Aa befindet. Der Punkt a bleibt unsichtbar, wie man auch den Körper c verkleinern mag, wenn er nur in der geraden Linie Aa bleibt. Rückt das Auge A in derselben geraden Linie Aa vorwärts nach A′, oder rückwärts nach A″, so bleibt a unsichtbar wie vorher; rückt es aber seitwärts nach A‴, so daß die Gerade A‴a neben c vorbeigeht, so wird a wieder sichtbar. Hieraus schließt man: das Licht verbreitet sich in geraden Linien. Diejenigen geraden Linien, in welchen sich das Licht von einem Punkte zum andern fortbewegt, heißen Lichtstrahlen. Die Lehre von der geradlinigen Verbreitung des Lichts heißt Optik.

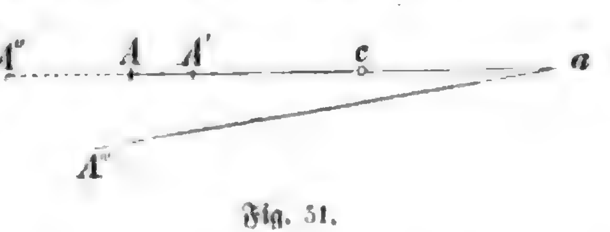


Fig. 51.

Umgekehrt: bringt man das Auge A in eine solche Lage, daß ihm ein Punkt c einen andern Punkt a verdeckt oder unsichtbar macht, so liegt das Auge A in der durch die Punkte c und a bestimmten geraden Linie, der Punkt a in der durch das Auge A und den Punkt c, c in der durch A und a bestimmten Geraden.

Dieser Satz liefert ein Mittel, einen Punkt in der durch zwei andere Punkte bestimmten Geraden zu finden; man sucht so lange, bis der dem Auge nächste Punkt dem Auge beide andern verdeckt. Dieses Geschäft heißt das Visiren. Jeder der drei Punkte kann der gesuchte sein. Soll das Auge die Stelle des gesuchten Punktes einnehmen, so verlängert man durch das Einvisiren des Auges die Gerade ca in der Richtung zum Beobachter hin; ist a der gesuchte Punkt, so verlängert man die durch A und c gegebene Gerade in entgegengesetzter Richtung. Der mittelste Punkt c ist der gesuchte, wenn man nur einen Theil der durch A und a bestimmten Geraden für sich bezeichnen will.

Da wir gewohnt sind, die Gegenstände durch geradlinige Strahlen zu sehen, so suchen wir den gesehenen Gegenstand allemal in der Richtung, in welcher

die Strahlen von ihm in unser Auge gelangen. In allen den Fällen, wo das Licht sich unter keinen fremden Einflüssen befindet, gehen wir danach auch vollkommen richtig, irren uns aber allemal, sobald auf das Licht noch andere Kräfte wirken, welche seine geradlinige Verbreitung hindern. Wir werden weiterhin solche Beispiele kennen lernen.

§. 56. Sehen wir einen Körper ab = d (Fig. 52) vor unserm Auge in der Entfernung Ac = e, so sagen wir, der Körper werde unter dem Winkel aAb = φ gesehen und nennen diesen Winkel φ den Gesichtswinkel des Körpers für die Entfernung e. Der Winkel φ bestimmt sich durch die Formel:

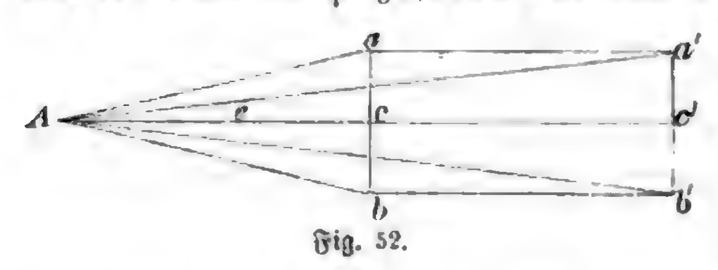


Fig. 52.

$$1)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{d}{2e},$$

weil, wenn Ac ein Loth auf ab, $ac = \tfrac{1}{2}d$ und $aAc = \tfrac{1}{2}\varphi$ ist. Rückt der Gegenstand weiter vom Auge weg, in die Entfernung $Ac' = e'$, so nimmt der Gesichtswinkel ab, wie die Construction sowol als die Formel (1) dies zeigen, wenn e größer gedacht wird. In der That bemerkt man denn auch, daß der Gegenstand, wenn er weiter vom Auge sich entfernt, von einer dahinter befindlichen Wand MN (Fig. 53) einen kleinern Theil $\alpha'\beta'$ verdeckt, als wenn er dem Auge näher ist, wo er sich als $\alpha\beta$ auf die Wand projicirt. Wenn also ein Gegenstand sich vom Auge entfernt, wird nicht blos sein Gesichtswinkel kleiner, sondern seine Größe nimmt scheinbar ab. Der Gesichtswinkel φ heißt daher selbst auch die scheinbare Größe des Gegenstandes.

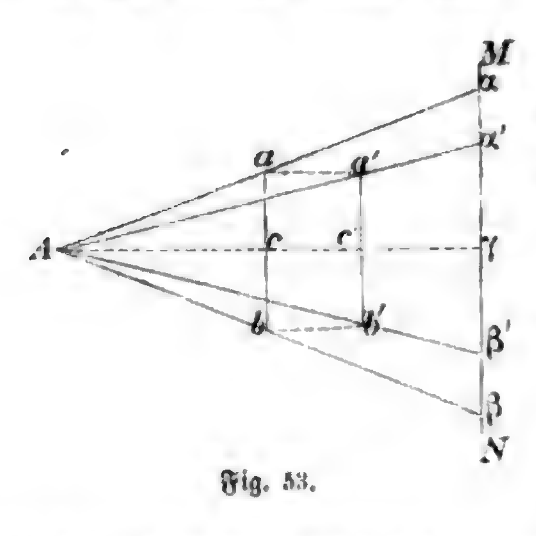


Fig. 53.

Aus der Formel (1) folgt sogleich noch:

$$2)\quad d = 2e \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$3)\quad e = \frac{d}{2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi},$$

d. h. jede der drei Größen d, e, φ läßt sich durch die beiden andern bestimmen.

Kommen Lichtstrahlen von einem unendlich weit entfernten Punkte, z. B. von der Sonne auf einen irdischen Gegenstand, so lassen sie sich als unter einander parallel ansehen. Denn in diesem Falle ist $e = \infty$, also auch $2e = \infty$, folglich $\frac{d}{2e} = \frac{d}{\infty} = 0$, also $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = 0$, d. h. $\tfrac{1}{2}\varphi = 0$, folglich auch $\varphi = 0$, oder die Strahlen sind parallel.

§. 57. Fällt von einem leuchtenden Punkte L (Fig. 54) Licht auf eine Fläche abcd, so wird diese, je nach der Intensität des Lichtes mehr oder

minder erleuchtet, d. h. sie bringt in unserm Auge einen Eindruck von größerer oder geringerer Helligkeit hervor. Stellt man die Fläche a' b' c' d' in die doppelte Entfernung vom leuchtenden Punkte L, so muß sie gerade viermal so groß sein, um dieselbe Menge von L ausgehender Lichtstrahlen aufzufangen; denn:

$$ab : a'b' = La : La' = 1 : 2$$

und $$abcd : a'b'c'd' = ab^2 : a'b'^2 = 1 : 4.$$

Wäre $$La : La' = 1 : e,$$

so wäre $$abcd : a'b'c'd' = 1 : e^2,$$

d. h. in der efachen Entfernung fängt eine e^2 Mal so große Fläche dieselben Strahlen auf, wie in der einfachen Entfernung die Flächeneinheit. Dieselbe Lichtmenge ist also dann auf eine e^2 Mal so große Fläche vertheilt, folglich jeder einzelne Theil e^2 Mal weniger erleuchtet. Heißt demnach L die Erleuchtung in der Entfernung E von der Lichtquelle, λ die Erleuchtung in der Entfernung ε, so ist:

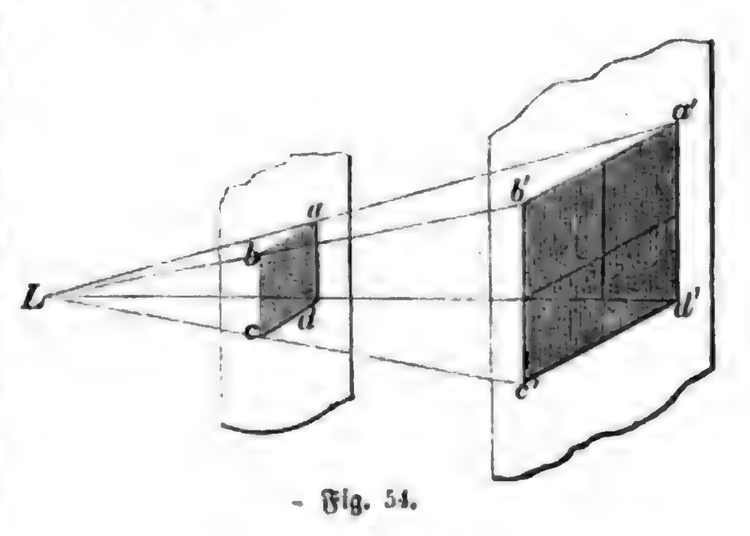


Fig. 54.

$$L : \lambda = \varepsilon^2 : E^2$$

oder $$L = \frac{\varepsilon^2}{E^2} \cdot \lambda,$$

d. h. die Erleuchtung verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle.

§. 58. Fallen parallele Lichtstrahlen S, S'.... (Fig. 55), die also von einer unendlich weit entfernten Quelle herkommen, auf die Fläche a b c d, und steht diese Fläche senkrecht gegen die Richtung der Strahlen, so wird ihr ein gewisser Grad der Erleuchtung zukommen, den wir mit L bezeichnen wollen.

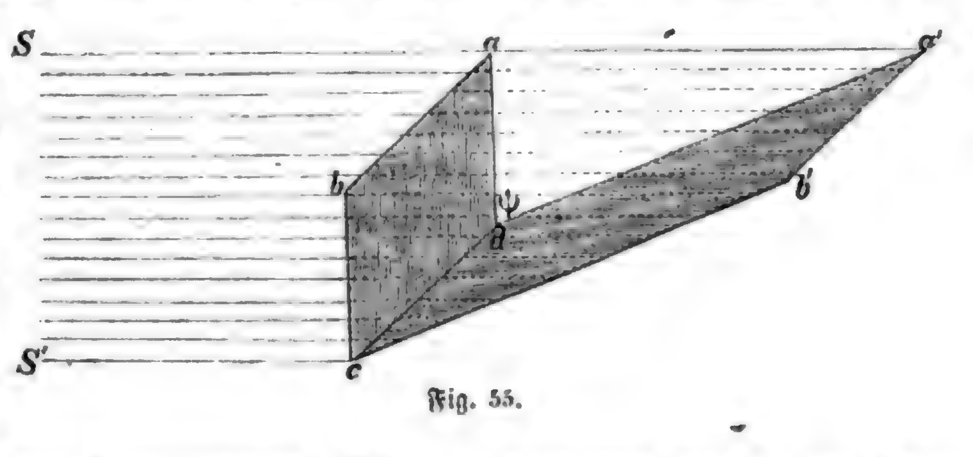


Fig. 55.

Legt man nun in das Strahlenbündel S S'.... eine andere Fläche an c d an, aber unter dem Winkel a d a' = ψ gegen a b c d geneigt und so groß, daß sie genau dieselbe Strahlenmenge auffängt, wie a b c d, so wird zwar die

Dimension cd für beide dieselbe sein, aber $a'd$ ist größer als ad, und es verhält sich:

$$ad : a'd = \cos\psi : 1,$$

also ist
$$a'b'cd = abcd \cdot \frac{1}{\cos\psi}.$$

Da nun die Erleuchtung durch dieselben Strahlen in demselben Verhältniß abnimmt, in welchem die erleuchtete Fläche wächst, so ist die Erleuchtung der Fläche $a'b'cd$:
$$\lambda = L \cdot \cos\psi.$$

Die Erleuchtung einer Fläche verhält sich wie der Cosinus ihres Neigungswinkels zu der gegen die Strahlen senkrechten Richtung, also wie der Sinus des Neigungswinkels der Fläche zu den Strahlen selbst. Senkrecht auffallende Strahlen erleuchten die Fläche am meisten.

B. Aus der Katoptrik.

§. 59. Es wird in der Physik dargethan, daß die materiellen Körper auf die Lichtstrahlen gewisse Wirkungen ausüben, die sie vermögen, ihre geradlinige Bewegung zu verlassen und aus der bis dahin befolgten Richtung abzulenken.

Trifft ein Lichtstrahl auf die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, der ihm also keinen Durchgang gestattet, so wird der Strahl gezwungen, einen andern Weg einzuschlagen. Diese Ablenkung eines Lichtstrahls heißt die Zurückwerfung oder Reflexion. Ist die Oberfläche des Körpers rauh, so wird der Strahl nach allen denkbaren Richtungen unregelmäßig zerstreut, er erleidet strahlende Zurückwerfung; ist aber die Oberfläche glatt polirt, so geschieht die Reflexion nach einer einzigen Richtung und heißt spiegelnde Zurückwerfung. Mit dieser haben wir es hier allein zu thun. Eine Fläche, welche die Lichtstrahlen spiegelnd zurückwirft, heißt ein Spiegel. Die Lehre von der Zurückwerfung der Lichtstrahlen heißt Katoptrik.

§. 60. Stellt MN (Fig. 56) den Durchschnitt einer reflectirenden Ebene mit einer Verticalebene vor, und fällt in dem Punkte A dieser Ebene ein Lichtstrahl SA ein, so heißt SA der einfallende Strahl, A der Einfallspunkt; wird dann der Strahl nach der Richtung AZ zurückgeworfen, so heißt AZ der zurückgeworfene Strahl; ein in A zur Ebene MN errichtetes Loth AQ heißt das Einfallsloth, SAQ der Einfallswinkel, QAZ der Reflexionswinkel. Die durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth bestimmte Ebene heißt die Einfallsebene, die durch den reflectirten Strahl und das Einfallsloth

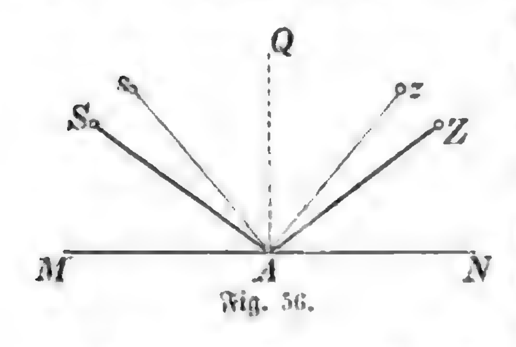


Fig. 56.

bestimmte Ebene die **Reflexionsebene**. Theorie und Erfahrung zeigen nun übereinstimmend, daß der Lichtstrahl folgende Gesetze befolgt:

1. der reflectirte Strahl liegt allemal in der durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth bestimmten Ebene;
2. der einfallende und reflectirte Strahl liegen auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes;
3. der Einfallswinkel ist dem Reflexionswinkel gleich.

Die nächste Folgerung aus diesem letztern Gesetze ist, daß die Winkel, welche der einfallende und reflectirte Strahl mit der Spiegelebene machen, und welche man die **Neigungswinkel** nennt, ebenfalls einander gleich sind. MAS = NAZ.

Fällt der Strahl SA senkrecht, also in der Richtung des Einfallslothes ein, so ist der Einfallswinkel = 0, also dann auch der Reflexionswinkel = 0, d. h. der reflectirte Strahl fällt auch mit dem Einfallslothe, also auch mit dem einfallenden Strahl zusammen. Man sagt dann: der Strahl wird **in sich selbst zurückgeworfen**.

Der Winkel, den der einfallende und reflectirte Strahl mit einander machen, ist stets **doppelt** so groß als der Einfalls- oder der Reflexionswinkel. Aendert daher der einfallende Strahl seine Richtung um eine bestimmte Größe, so ändert sich der Winkel beider Strahlen um das Doppelte. SAZ — sAz = 2 · SAs.

§. 61. Ist MN (Fig. 57) wieder eine reflectirende Ebene, LA ein auf dieselbe fallender Lichtstrahl, AP der reflectirte Strahl, und man verlängert PA über A hinaus, bis er mit dem von L auf MN gefällten Lothe in Y zusammentrifft; so ist, wenn AO das Einfallsloth ist,

	W. PAO = LAO
also	MAP = NAL;
aber	MAP = NAY
	NAL = NAY
	AQ = AQ
	AQL = AQY = R
	△ ALQ ≡ AYQ*)
also	QL = QY.

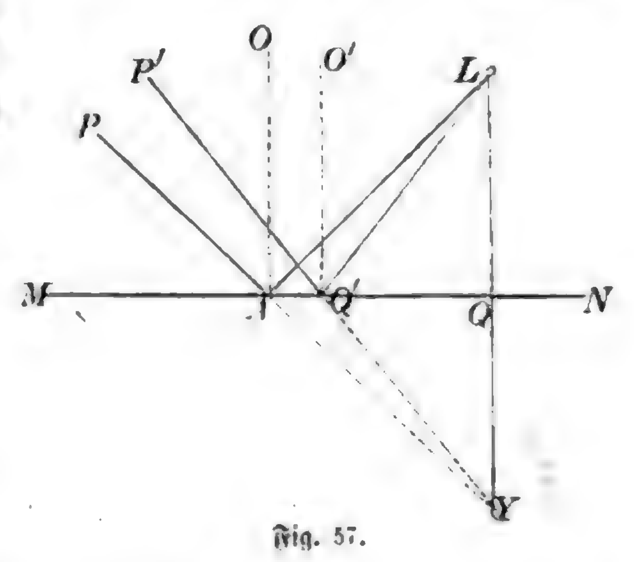


Fig. 57.

Fällt nun von L noch ein Strahl LQ′ auf MN, und ist Q′P′ der reflectirte Strahl davon, so wird dieser, rückwärts verlängert, das Loth LQ

*) △ ALQ ist dem △ AYQ **identisch**, d. h. congruent; statt des Zeichens ≌ bediene ich mich lieber dieses andern (≡).

in einem Punkte Y′ treffen. Wie vorhin, ist wieder L Q = Q Y′, also fällt Y′ mit Y zusammen. Wenn von einem leuchtenden Punkte mehrere Strahlen auf einen ebenen Spiegel fallen, so schneiden sich alle reflectirten Strahlen, rückwärts verlängert, in demselben Punkte, welcher in dem vom leuchtenden Punkte auf den Spiegel gefällten Lothe genau so weit hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor dem Spiegel.

§. 62. Befindet sich in der Gegend von P oder P′ ein Auge, das zwei oder mehrere der reflectirten Strahlen empfängt, so versetzt dasselbe den leuchtenden Punkt L in jede der Richtungen dieser rückwärts verlängerten Strahlen, also in den gemeinsamen Convergenzpunkt Y aller dieser reflectirten Strahlen. Das Auge wird den Eindruck haben, als wenn der leuchtende Punkt L in Y wäre; Y ist also ein Bild des Punktes L. Um also das in einem ebenen Spiegel erzeugte Bild Y eines leuchtenden Punktes L zu construiren, hat man nur nöthig, von dem Punkte L ein Loth L Q auf den Spiegel zu fällen, es zu verlängern und Q Y = L Q zu machen, so ist Y das Bild von L. Und will man von einem Gegenstande A B (Fig. 58) das durch einen ebenen Spiegel M N erzeugte Bild construiren, so construirt man auf die eben beschriebene Weise die Bilder von so vielen seiner Punkte, daß man daraus das Uebrige durch Zeichnung vollenden kann; man macht also A P = A′ P und B Q = B′ Q, zieht A′ B′, so ist dies das Bild von A B.

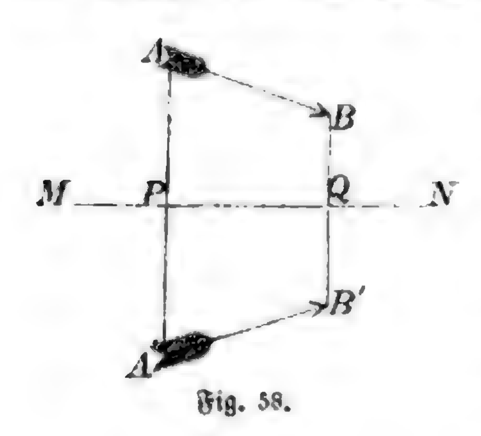


Fig. 58.

§. 63. Sind M N und P Q (Fig. 59) zwei ebene Spiegel, welche unter dem Winkel M O P = φ gegen einander geneigt sind, und man denkt sich eine Ebene, welche beide Spiegel rechtwinkelig schneidet, so daß M N, P Q ihre Durchschnitte mit dieser Ebene sind und O die Projection der gemeinschaftlichen Kante des Flächenwinkels beider Spiegel auf die Schnittebene ist, so kann ein Lichtstrahl L A in verschiedenen Lagen auf einen der beiden Spiegel fallen. Er kann entweder in der beide Spiegel rechtwinkelig schneidenden Ebene liegen oder nicht. Liegt der einfallende Strahl in einer zu beiden Spiegeln senkrechten Ebene, so wird er vom ersten Spiegel auch in dieser Ebene reflectirt (§. 60), fällt also in derselben Ebene auf den zweiten Spiegel und wird endlich von diesem wieder in derselben Ebene zurückgeworfen; der einfallende und der zweimal zurückgeworfene Strahl liegen also in derselben Ebene und müssen sich entweder

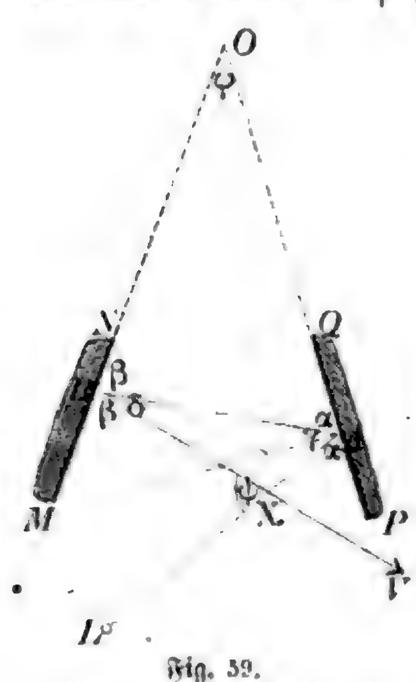


Fig. 59.

schneiden oder parallel sein. Fällt dagegen der Strahl so auf den ersten Spiegel, daß die durch diesen Strahl senkrecht zum Spiegel gelegte Ebene nicht zugleich auch auf dem zweiten Spiegel senkrecht steht, so wird die durch den reflectirten Strahl gedachte zum zweiten Spiegel senkrechte Ebene mit jener ersten nicht zusammenfallen; da aber der vom zweiten Spiegel reflectirte Strahl in dieser zweiten Ebene bleibt, so kommt er mit dem auffallenden gar nicht zusammen. Wir müssen also, damit der auffallende und der zweimal reflectirte Strahl einander wieder treffen, voraussetzen, daß der auffallende Strahl in der auf beiden Spiegeln senkrechten Ebene liege.

Fällt nun, unter dieser Voraussetzung, ein Strahl LA (Fig. 59) auf den ersten Spiegel PQ und bildet mit ihm den Neigungswinkel LAP $= \alpha$, so wird er auch wieder unter dem Winkel OAB $= \alpha$ zurückgeworfen, und der zurückgeworfene Strahl AB trifft den zweiten Spiegel unter dem Neigungswinkel OBA $= \beta$. Der Winkel OBA ist nun $\gtreqless 90^\circ$, je nachdem $\varphi + \alpha \lesseqgtr 90^\circ$ ist. Ist OBA $< 90^\circ$, so wird der Strahl von B aus wie in Fig. 59 nach der Oeffnung der Spiegel hin reflectirt und trifft LA in X, zwischen den Spiegeln oder ihren Verlängerungen. Ist OBA $= 90^\circ$, wie in Fig. 60, so wird AB in sich selbst zurückgeworfen und trifft LA in seinem Einfallspunkte A. Ist endlich OBA $> 90^\circ$, wie in Fig. 61, so wird AB in B nach der Seite von O hin zurückgeworfen und trifft die Verlängerung von LA außerhalb der Spiegel in X. Heißt nun im ersten Falle (Fig. 59) ψ der Winkel LXB, unter dem sich die beiden Strahlen LA, BV treffen, so ist:

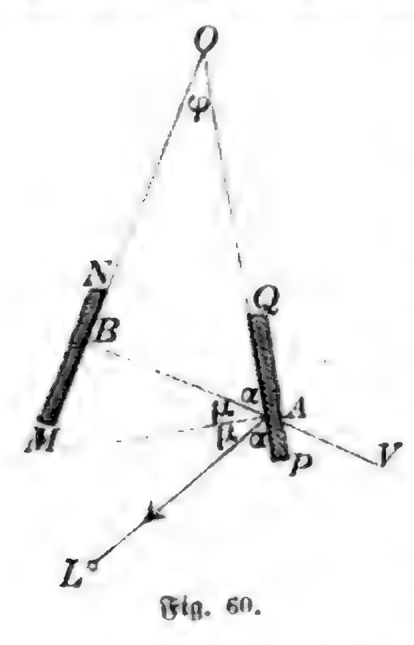


Fig. 60.

Fig. 61.

$$\psi = \gamma + \delta = (\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta)$$
$$= 2\pi - 2\alpha - 2\beta$$
$$= 2\pi - 2(\alpha + \beta)$$
$$\alpha + \beta = \pi - \varphi$$
$$\psi = 2\pi - 2(\pi - \varphi)$$
$$\psi = 2\varphi.$$

In Fig. 60 ist W. OBA $= 90^\circ$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha$$

$$\alpha + \mu = 90^\circ$$
$$\mu = 90^\circ - \alpha = \varphi.$$

LA trifft aber den Strahl BV unter dem Winkel $2\mu = 2\varphi$. — Im letzten Falle (Fig. 61) ist $\alpha = \mu$, also $BAX = 2\alpha$ und $BAP = \pi - \alpha$ Außenwinkel zum $\triangle ABO$; folglich:

$$\pi - \alpha = \pi - \beta + \varphi$$
$$\beta - \alpha = \varphi.$$

Im $\triangle ABX$ ist aber: $2\alpha + (\pi - 2\beta) + \psi = \pi$

$$2(\beta - \alpha) = \psi.$$

Folglich: $2\varphi = \psi.$

Wird demnach ein Lichtstrahl nacheinander so von zwei Spiegeln zurückgeworfen, daß die Ebene, in welcher sich die Strahlen befinden, zu beiden Spiegeln senkrecht steht, so ist der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem zweimal zurückgeworfenen macht, doppelt so groß als der Winkel, unter welchem die Spiegel gegen einander geneigt sind.

§. 64. Ist MN (Fig. 62) ein ebener Spiegel, auf den der Lichtstrahl LA auffällt, der nach der Richtung AV zurückgeworfen wird, und man dreht nun den Spiegel MN um eine Achse, die zu der von LA und dem zugehörigen Einfallslothe gebildeten Ebene senkrecht steht, so daß derselbe jetzt in die Lage M′N′ kommt, so wird derselbe Strahl LA jetzt nach AW reflectirt und es ist der Winkel $VAW = 2 \cdot MAM'$.

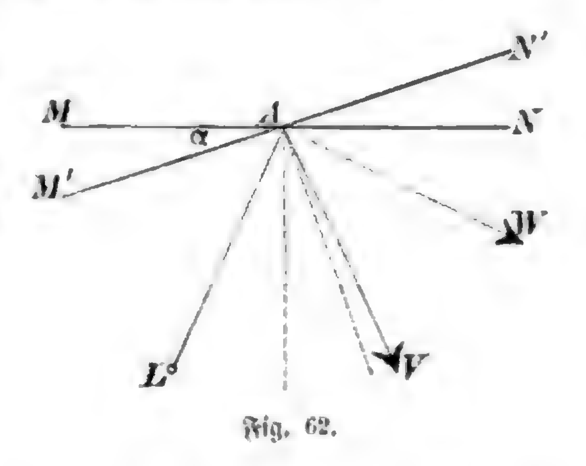


Fig. 62.

Es heiße der Winkel MAM′, um welchen der Spiegel gedreht worden, α, so ist:

$$\begin{aligned} VAW &= VAN - WAN \\ &= MAL - (LAM' - \alpha) \\ &= MAL - LAM' + \alpha \\ &= MAL - (MAL - \alpha) + \alpha \\ &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Wird ein Spiegel, auf den ein Strahl unter einem beliebigen Winkel auffällt, um eine zur Einfallsebene senkrechte Achse gedreht, so ist der Winkel, den die reflectirten Strahlen vor und nach der Drehung mit einander bilden, doppelt so groß als der Drehungswinkel des Spiegels.

C. Aus der Dioptrik.

§. 65. Trifft ein Lichtstrahl auf die Oberfläche eines durchsichtigen Körpers, der ihm also den Durchgang gestattet, so ändert der Strahl im Innern des Körpers seine Richtung. Diese Ablenkung des Lichtstrahls heißt die **Brechung** oder **Refraction**. Die Lehre von der Brechung der Lichtstrahlen heißt **Dioptrik**.

§. 66. Ist ABC (Fig. 63) ein durchsichtiger Körper, z. B. ein Stück weißes Glas, und fällt in E ein Lichtstrahl LE auf denselben, so geht derselbe nicht in der geraden Fortsetzung von LE nach M fort, sondern wird in dem Einfallspunkte E entweder nach der Richtung EN, oder nach der Richtung EO abgelenkt, d. h. der Strahl wird gebrochen. Errichtet man in E das Einfallsloth PQ, so heißt wieder LEP der Einfallswinkel, NEQ oder OEQ der Brechungswinkel, EN oder EO der gebrochene Strahl. Die durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl gelegte Ebene heißt, wie früher bei der Reflexion, die Einfallsebene, aber die durch den gebrochenen Strahl und das Einfallsloth bestimmte Ebene heißt die Brechungsebene. Die Lage des gebrochenen Strahls wird durch folgende Gesetze bestimmt:

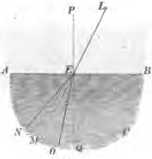


Fig. 63.

1. die Einfalls- und Brechungsebene fallen in eine und dieselbe Ebene zusammen;
2. bei demselben brechenden Mittel und verschiedenen Einfallswinkeln findet zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels ein unveränderliches (constantes) Verhältniß statt, welches das Brechungsverhältniß heißt. Ist also ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n : 1 das Brechungsverhältniß, so ist stets, welchen überhaupt nur möglichen Werth ε auch haben mag:
$$\sin \varepsilon : \sin \beta = n : 1.$$
Für Luft und gewöhnliches Glas hat n den Werth 1,5.
3. Sind die Mittel, durch welche der Lichtstrahl geht, von gleicher materieller Beschaffenheit, aber verschiedener Dichtigkeit, so nähert sich der Strahl im dichtern Mittel dem Einfallslothe, und man sagt: er werde zum Einfallslothe gebrochen; im dünnern Mittel entfernt sich der Strahl vom Einfallslothe, er wird vom Einfallslothe gebrochen.

Geht ein Strahl aus einem dichtern Mittel in ein dünneres über, so ist das Brechungsverhältniß ein echter Bruch, im entgegengesetzten Falle ein unechter.

Für einen senkrecht auffallenden Strahl ist $\varepsilon = 0^\circ$, also $\sin \varepsilon = 0$, und da:
$$\sin \varepsilon : \sin \beta = n : 1$$
oder
$$0 : \sin \beta = n : 1$$
so ist $\sin \beta = 0$, also auch $\beta = 0$. Ein senkrecht auffallender Strahl geht im neuen Mittel ungebrochen fort.

Digitized by Google

§. 67. Geht ein Strahl durch einen mit parallelen Flächen begrenzten Körper ABDC (Fig. 64) und tritt aus diesem wieder in das erste Mittel heraus, so ist er nach der zweimaligen Brechung bei seinem Austritte dem einfallenden Strahle wieder parallel. Ist LM der einfallende Strahl, PQ das Einfallsloth, und zieht man um den Einfallspunkt M einen Kreis mit dem beliebigen Radius MP = r, so ist ab der Sinus des Einfallswinkels, β der Brechungswinkel, cd sein Sinus, und es ist:

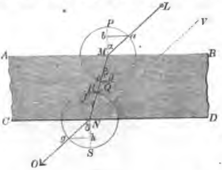


Fig. 64.

$$\sin \alpha : \sin \beta = ab : cd = n : 1.$$

Tritt nun der gebrochene Strahl MN auf die zweite, mit AB parallele Trennungsfläche CD des durchsichtigen Körpers, und beschreibt man mit NR = MP = r um N einen Kreis, errichtet das Einfallsloth RS, so ist γ der Einfallswinkel, ef sein Sinus, δ der Brechungswinkel, gh sein Sinus, und

$$\sin \gamma : \sin \delta = ef : gh = 1 : n;$$

dabei ist $\beta = \gamma$, also $\sin \beta = \sin \gamma$, folglich:

$$\sin \alpha : \sin \delta = n : n$$

d. h. $\alpha = \delta$ und $NO \# LM$, da $PQ \# RS$. Ein Auge in O sieht das Object L in der Richtung OV, welche mit ML parallel ist. Durch Planglässer sieht man daher alle Gegenstände in derselben Ordnung und Lage, wie ohne Glas, aber alle etwas aus der Stelle gerückt. Die Verrückung ist um so größer, je dicker das Glas.

§. 68. Wir sind nun in Stand gesetzt, den Gang der Lichtstrahlen in einem parallelen Planspiegel zu verfolgen. Unter einem parallelen Planspiegel versteht man eine Glasplatte, deren Flächen eben und mit einander parallel sind, und wovon die eine mit Zinnfolie belegt ist. Fig. 65 stelle einen solchen Spiegel vor. Vom leuchtenden Punkte L falle zunächst der Lichtstrahl LE auf die vordere, unbelegte Fläche AB dieses Spiegels. PQ sei das Einfallsloth. In E wird der Strahl LE zum Theil reflectirt, zum Theil geht er in das Glas über und wird gebrochen. Die Reflexion geschieht nach den Gesetzen §. 60, die Brechung nach §. 66; der reflectirte Theil geht nach EG fort und ein Auge in G erblickt den Punkt L in M, in der von L auf den Spiegel gefällten Senkrechten, so, daß La = aM. Der gebrochene Strahl gelangt nach F, an der belegten Hinterfläche des Spiegels und wird hier reflectirt; er trifft die Vorderfläche in H, wo er zum Theil wieder reflectirt,

Digitized by Google

zum Theil gebrochen wird; der reflectirte Strahl gelangt nach J, wo er eine nochmalige Reflexion erleidet, der gebrochene nach R. In derselben Weise setzt sich der Vorgang noch weiter fort, jedoch wird das Licht, wegen der wiederholten Theilungen in reflectirtes und gebrochenes, immer schwächer, so daß es zuletzt gar nicht mehr wahrnehmbar ist. Jeder aus dem Glase austretende Strahl, wie HR, KS u. s. w. gibt ein Bild in der Linie La..., nämlich N, O u. s. w., und diese Bilder haben gleiche Entfernung von einander, MN = NO, weil EH = HK und EM ⫲ HN ⫲ KO. Diese Bilder M, N, O.... sind übrigens nur zu sehen, wenn man von der Seite von B aus sehr schief auf den Spiegel sieht, weil sie sich bei jeder andern Lage des Auges decken. Je dünner das Glas, desto näher sind sich die Bilder, und desto näher muß sich das Auge am Glase befinden, um sie gesondert wahrzunehmen. Der Strahl EG wird von Glas reflectirt, FH von der Metallfläche, daher ist FH und selbst noch der gebrochene Theil HR desselben viel heller als EG. Dieser Unterschied in der Helligkeit dient zur Unterscheidung des reflectirten und gebrochenen Strahls.

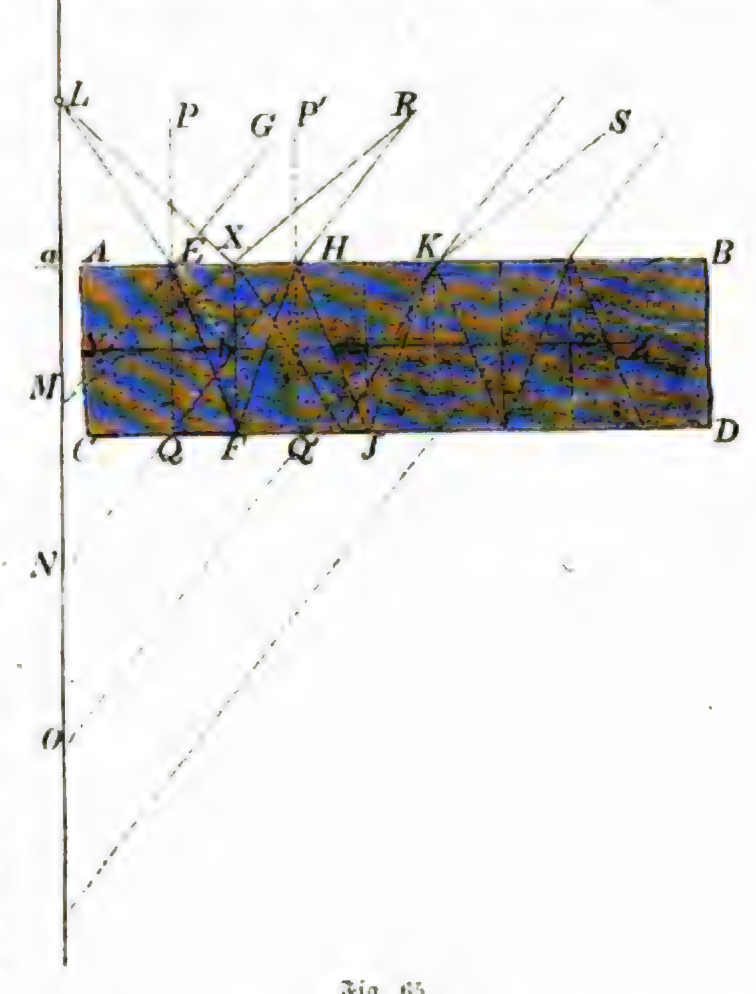


Fig. 65.

Verfolgt man noch einen Strahl LX, der von demselben leuchtenden Punkte L ausgeht, wie der erste, so wird dieser in X nach dem bekannten Gesetze reflectirt und trifft HR in R, während die Verlängerung durch das Glas hindurch nach M treffen muß. Das ist der Fall, wo auch der Punkt X liegen mag; der Punkt M (das Bild von L) wird daher allemal durch mehrere von L auf das Glas fallende und ins Auge gelangende Strahlen sichtbar, die sich in ihrer Verlängerung schneiden. Verlängert man LE und RH, bis sie sich in b treffen und zieht durch b YZ ⫲ AB, so wird W. LbY = RbZ, und der durch einmalige Reflexion (in b) und zweimalige Brechung (in E und H) ins Auge in R gelangende Strahl HR hat dieselbe Richtung, wie wenn LE blos in b durch eine mit AB parallele Ebene YZ reflectirt worden wäre.

Digitized by Google

§. 69. Bei einem **prismatischen** Spiegel ABCD (Fig. 66), dessen Ebenen in M zusammentreffen, wenn sie verlängert gedacht werden, und dort den Winkel φ bilden, sind die Einfallslothe PQ und P'Q' nicht parallel, sondern machen in P gleichfalls den Winkel φ mit einander; daher ist:

$$\text{W. } EGF > GEF, \text{ also } FGQ'' < FEQ;$$

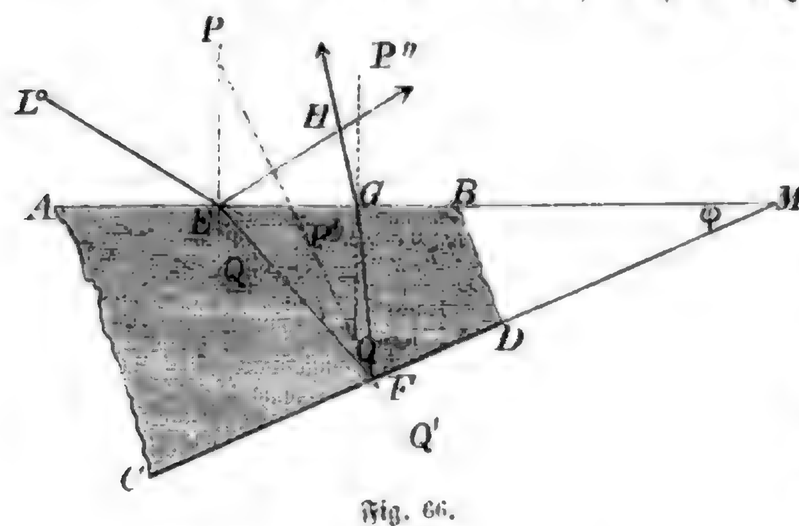


Fig. 66.

LEP = PEH, also sin PEH = n · sin FEQ und sin FGQ'' < sin FEQ, daher auch sin P''GH < n · sin FEQ < sin PEH und W. P''GH < PEH; also müssen sich EH und GH schneiden, sind also **nicht parallel**. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man annimmt, daß die eine Fläche eines Spiegels an einzelnen Stellen von der Ebene abweiche, weil eine solche Stelle dann ebenfalls mit der andern Fläche einen prismatischen Spiegel bildet.

Dies bietet ein Mittel dar, einen Spiegel auf **die Parallelität und Ebenheit seiner Flächen zu prüfen**. Legt man den Spiegel auf den Tisch und bringt ein künstliches Object so an, daß es sehr schiefe Strahlen darauf wirft, so wird man, bei schiefem Hineinsehen, die verschiedenen durch Reflexion und zweimalige Brechung entstandenen Bilder sehen; dreht man dann den Spiegel in seiner Ebene herum, so müssen diese Bilder, bei vollkommener Parallelität und Ebenheit der Flächen, ihre gegenseitige Lage während des Drehens unverändert beibehalten, was bei einem Mangel jener Eigenschaften nicht der Fall sein kann. Wählt man als Object einen sehr entfernten Gegenstand, z. B. einen Stern, so wird man, selbst durch ein Fernrohr, die verschiedenen Bilder nicht getrennt zu erblicken vermögen, wenn der Spiegel so gefertigt ist, daß die Strahlen parallel mit einander von ihm ins Auge gelangen; sobald aber die Strahlen **nicht** unter einander parallel vom Spiegel ausgehen, wird man durch ein Fernrohr die verschiedenen Bilder getrennt sehen, und es wird die Begrenzung des Bildes undeutlich werden. Ein Spiegel, der diese beiden Proben besteht, ist ohne allen Zweifel eben, und seine Flächen sind auch parallel.

§. 70. Heißt, wie bisher, ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n : 1 das Brechungsverhältniß, so ist:

$$\sin \varepsilon = n \cdot \sin \beta.$$

Tritt nun der Strahl aus Luft in Glas über, und hat ε seinen größten Werth

von 90°, so daß $\sin \varepsilon = 1$, so muß auch $\sin \beta$, also dann auch β selbst seinen größten Werth bekommen. Für Glas ist $n = 1{,}5$ und

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \cdot \sin \varepsilon = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}666 \ldots.$$

weil eben $\sin \varepsilon = 1$. Hiernach ist:

$$\beta = 41^\circ\, 48'.$$

Dies ist also der größte Brechungswinkel, der im Glase entstehen kann, wenn der Strahl aus der Luft kommt. Tritt umgekehrt ein Strahl unter dem Winkel von 41° 48′ aus dem Glase in die Luft, so macht er einen Brechungswinkel $= 90^\circ$; war der Einfallswinkel im Glase kleiner, so ist auch der Brechungswinkel in der Luft kleiner; war aber der Einfallswinkel im Glase größer als 41° 48′, so kann der Brechungswinkel in der Luft doch nicht größer werden, weil:

$$\sin \varepsilon = {}^3/_2 \cdot \sin \beta$$

d. h.

$$\sin \varepsilon = {}^3/_2 \cdot {}^2/_3 = 1.$$

Also $\varepsilon = 90^\circ$. Aber auch aus geometrischen Gründen ist es unmöglich, daß der Strahl einen größern Winkel bilde als 90°, weil er dann gar nicht in die Luft käme, also wieder keine Brechung stattfände. Der Einfallswinkel von 41° 48′ bildet also eine Grenze für den Uebergang des Strahls in die Luft; er heißt daher auch der **Grenzwinkel** für die Brechung im Glase. Die Erfahrung lehrt nun, daß, sobald der Grenzwinkel überschritten wird, der Strahl, statt gebrochen zu werden, im Glase nach dem ordentlichen Reflexionsgesetze zurückgeworfen wird. Da diese Reflexion mit weniger Lichtverlust von statten geht, als jede andere, so heißt sie die **Totalreflexion**. Die Totalreflexion tritt allemal ein, sobald ein Strahl im dichtern Mittel unter einem größern Winkel auf die Trennungsfläche der Mittel auffällt, als der Grenzwinkel für diese beiden Mittel ist. Der Grenzwinkel ist aber allemal der, dessen Sinus $= \frac{1}{n}$, unter n das Brechungsverhältniß verstanden.

§. 71. Fällt ein Lichtstrahl LD (Fig. 67) auf die Trennungsfläche AB zweier durchsichtiger Mittel, z. B. zweier ungleich dichter Luftschichten, und befindet sich der leuchtende Körper, von dem der Strahl ausgeht, im dünnern Mittel (in der Figur über AB), so wird derselbe im zweiten, dichtern Mittel zum Einfallslothe QR gebrochen, so daß, nach Maßgabe des Brechungsverhältnisses der beiden Mittel der Brechungswinkel β kleiner wird als der Einfallswinkel ε, weil allemal:

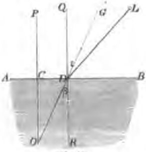


Fig. 67.

$$\sin \beta = n \cdot \sin \varepsilon,$$

und n hier ein echter Bruch sein muß. Befindet sich dann in der Richtung

Digitized by Google

des gebrochenen Strahls ein Auge in O, das den Strahl empfängt, so verlegt es den leuchtenden Punkt L in die Richtung OD, in welcher es das Licht empfängt, nach G. Stellt nun OCP die durch das Auge O gelegte Verticale vor, so ist P das Zenith für den Ort O, und G liegt näher am Zenith, also weiter vom Horizonte als L. Die Gegenstände, deren Strahlen schief gegen AB ins Auge gelangen, werden also durch die Brechung erhöht. Von einem im Zenithe P befindlichen Gegenstande fallen die Strahlen, welche das Auge O erreichen, senkrecht auf AB, gelangen also ungebrochen nach O, und verändern deshalb auch ihre scheinbare Höhe über dem Horizonte nicht.

§. 72. Bewegt sich ein Lichtstrahl in einem Mittel, das stetig an Dichtigkeit zunimmt, wie dies bei der atmosphärischen Luft von oben nach unten der Fall ist, so kann man sich zunächst das Mittel durch unter sich parallele Trennungsflächen AB, CD, EF, GH, JK u. s. w. (Fig. 68) in dünne Schichten getheilt denken. Nimmt man dann an, daß die Dichtigkeit des Mittels innerhalb einer solchen dünnen Schicht sich nicht verändere, so kann man leicht, wenn man die Einfallslothe zieht, den Gang des Strahls LMNOPQ verfolgen; er bildet hier eine gebrochene Linie. Aendert aber das Mittel seine Dichtigkeit stetig, so müssen die einzelnen Schichten unendlich dünn sein und die gebrochene Linie muß in seine stetig gekrümmte Curve übergehen.

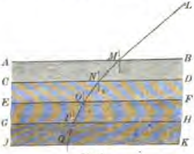


Fig. 68.

Stellt ABCD (Fig. 69) die atmosphärische Luft vor, AB an ihrer obern Grenze, wo sie sehr dünn ist, CD an der Oberfläche der Erde, und ist LM ein darauf fallender Lichtstrahl, so wird dieser in der Curve MN die Erde erreichen, und ein Auge in N wird den Punkt L in die Richtung der in N an NM gelegten Tangente NV verlegen, also höher sehen als er wirklich ist. Diese Veränderung in der gesehenen Lage eines Körpers heißt die astronomische Strahlenbrechung, wenn das Licht von Himmelskörpern herkommt, dagegen die irdische oder terrestrische Strahlenbrechung, wenn das Licht von irdischen Körpern kommt. Bei Höhenbestimmungen kommt

Fig. 69.

Digitized by Google

natürlich diese letzte in Betracht und muß die gemessene Höhe eines Berges u. s. w. danach corrigirt werden.

§. 73. Es stelle MNO (Fig. 70) den Durchschnitt eines dreiseitigen Glasprismas vor. In der Ebene des Schnittes falle ein Strahl LA auf die eine Seite desselben, DG sei das in A errichtete Einfallsloth, ε der Einfallswinkel, so bestimmt sich die Lage des gebrochenen Strahls durch die Gleichung:

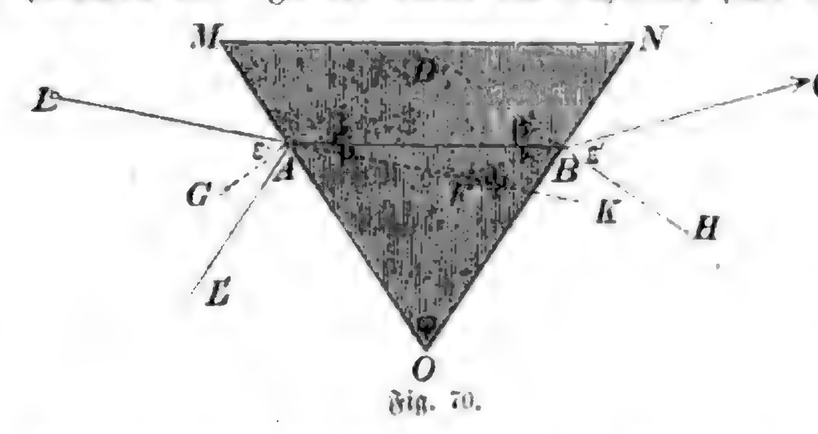


Fig. 70.

$$\sin\beta = \frac{1}{n} \cdot \sin\varepsilon.$$

Der gebrochene Strahl treffe nun in B auf die zweite Fläche des Prismas, wo er mit dem Einfallslothe DH den Winkel β' bildet, und der Brechungswinkel CBH $= \varepsilon'$ durch die Gleichung:

$$\sin\varepsilon' = n \cdot \sin\beta'$$

sich bestimmt. Das Viereck AOBD ist ein Kreisviereck, weil es bei A und B rechte Winkel hat; daher ist W. β = DOB, und W. β' = AOD, also, wenn W. AOB $= \varphi$ gesetzt wird,

$$\beta + \beta' = \varphi$$
$$\beta' = \varphi - \beta$$
$$\sin\varepsilon' = n \cdot \sin(\varphi - \beta).$$

Verlängert man den einfallenden und auch den zweimal gebrochenen Strahl, bis sie sich in F treffen, so bezeichnet der Winkel BFK $= \psi$ die Größe der Ablenkung, welche der Strahl durch die zweimalige Brechung erfahren hat, und es ist: $\psi = \mu + \nu = (\varepsilon - \beta) + (\varepsilon' - \beta')$,
oder $\psi = \varepsilon + \varepsilon' - \varphi$.

Der Winkel MON oder φ, durch dessen Schenkelflächen der Strahl geht, heißt der **brechende Winkel** des Prismas.

§. 74. Es interessirt nun besonders, die Fälle zu bestimmen, wann die Brechung im Prisma unmöglich wird und in die totale Reflexion übergeht. Dies ist allemal der Fall, wenn $\varepsilon' \geqq 90^\circ$ werden müßte. Da nun $\sin\beta = \frac{1}{n} \cdot \sin\varepsilon'$, so findet die totale Reflexion statt, wenn $\sin\beta' = \frac{1}{n}$, also β' die Größe des Grenzwinkels für Glas hat. Nennen wir diesen Grenzwinkel ω (er beträgt bekanntlich $41^\circ\ 48'$), so findet also die totale Reflexion statt, wenn $\beta' \geqq \omega$; und weil $\beta = \varphi - \beta'$, so tritt sie ein, wenn $\beta \leqq \varphi - \omega$. Setzt man nun $\varphi = \omega$, so tritt die totale Reflexion allemal ein, wenn $\beta = 0$, oder $\beta < 0$, d. h. negativ ist. Im ersten Falle ist der einfallende Strahl

LA senkrecht zur Fläche des Prismas; im andern Falle müßte, wegen $\sin \varepsilon = n \sin \beta$, auch ε negativ sein, d. h. LA in dem Winkel GAO liegen, wie L′A; es ist auch für ein negatives β' in der That:

$$\omega = \beta' - \beta,$$

also, da ω immer positiv, $\beta' > \omega$, also keine Brechung möglich.

Bei den Meßinstrumenten kommen insbesondere gleichschenkelig rechtwinkelige Prismen in Anwendung, bei denen also, da der Strahl in der Regel auf eine Kathete fällt und von da zur Hypotenusenfläche übergeht, $\varphi = 45°$ ist. Betrachten wir die bemerkenswerthesten Fälle, die hierbei eintreten.

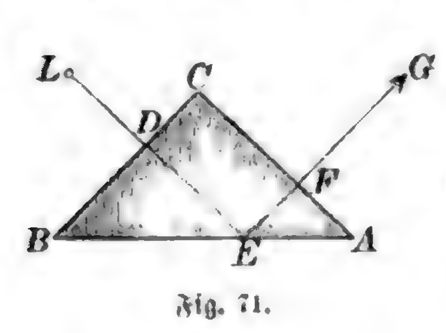


Fig. 71.

1) Fällt ein Strahl LD (Fig. 71) senkrecht auf eine Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkeligen Prismas ABC, so geht er ungebrochen zur Hypotenuse, trifft diese in E unter dem Winkel von 45°, der also den Grenzwinkel ω übertrifft; der Strahl wird demnach reflectirt, trifft in F senkrecht die andere Kathete und geht ungebrochen nach G fort, indem er mit dem einfallenden Strahl LD einen rechten Winkel bildet.

2) Fällt ein Strahl LD (Fig. 72 und 73) schief auf die eine Kathetenfläche und man zieht im Einfallspunkte D das Einfallsloth PQ, so bildet PD mit der Kathete AB zwei rechte Nebenwinkel ADP und BDP; jener liegt dem brechenden Winkel A des Prismas an, dieser nicht. Wegen ihrer entgegengesetzten Lage kann man also die Einfallswinkel LDP oder ε als positive und negative Winkel unterscheiden, wobei es indeß gleichgültig ist, welchem von beiden man die eine oder andere Eigenschaft beilege. Es möge also der Einfallswinkel LDP in Fig. 72, wo der einfallende Strahl in dem dem brechenden Winkel des Prismas anliegenden rechten Winkel ADP liegt, der positive heißen, so ist dann der Winkel LDP in Fig. 73 ein negativer Einfallswinkel.

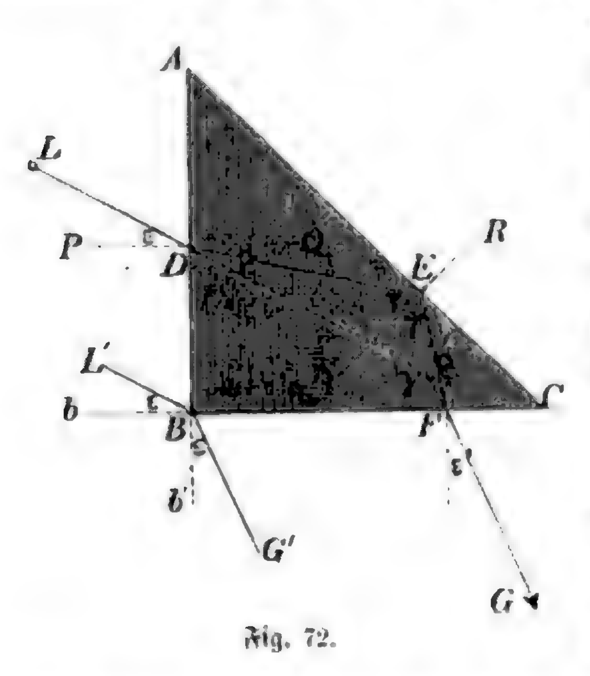


Fig. 72.

3) Heißt nun im ersten Falle, bei positivem Einfallswinkel, wie in der Fig. 72, ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, γ der Einfallswinkel DES auf der Hypotenuse, so ist:

$$\gamma = 45° + \beta.$$

Der Strahl DE wird also in E unter allen Umständen reflectirt, gelangt unter dem Einfallswinkel β' nach F, und da, wie leicht zu sehen, wieder

$$\gamma = 45° + \beta',$$

Digitized by Google

so ist $\beta' = \beta$, also kann der Strahl hier aus dem Glase austreten. Da nun:

$$\sin \varepsilon' = n \cdot \sin \beta'$$

und

$$\sin \varepsilon = n \cdot \sin \beta,$$

so ist auch $\varepsilon' = \varepsilon$, d. h. der Strahl tritt unter demselben Winkel aus dem Prisma aus, unter dem er auf dasselbe in D einfiel.

Verlängert man in B die Katheten AB und CB, so wird W. $bBb' = 90^\circ$, und zieht man dann $BL' \mathrel{+\!\!\!=} DL$, $BG' \mathrel{+\!\!\!=} FG$, so wird $L'Bb = G'Bb' = \varepsilon = \varepsilon'$, also auch W. $L'BG'$, unter welchem sich der einfallende Strahl LD und der austretende FG schneiden, $= 90^\circ + 2\varepsilon$. Nennt man ψ den Winkel $L'BG'$ oder LYG, so ist demnach:

$$\psi = 90^\circ + 2\varepsilon.$$

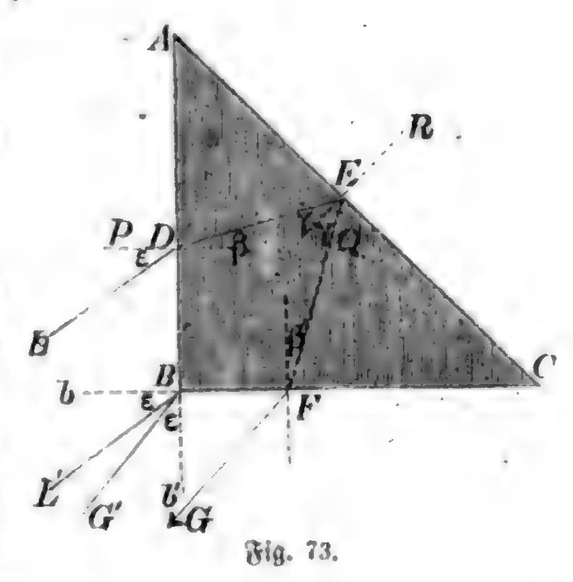


Fig. 73.

4) Heißen, bei negativem Einfallswinkel (Fig. 73), dieselben Winkel ebenso wie im vorigen Falle, so ist:

$$\gamma = 45^\circ - \beta.$$

Da der Grenzwinkel $\omega = 41^\circ\ 48'$, so ist $\gamma \gtreqless \omega$, so oft $\beta \lesseqgtr 3^\circ\ 12'$. Da nun $\sin \varepsilon = \frac{3}{2} \cdot \sin \beta$, also für $\beta = 3^\circ\ 12'$, $\varepsilon = 4^\circ\ 48'$, so tritt totale Reflexion ein, so oft $\varepsilon \lesseqgtr 4^\circ\ 48'$. In diesem Falle ist aber wieder $\gamma = 45^\circ - \beta'$, also abermals $\beta' = \beta$, folglich auch $\varepsilon' = \varepsilon$.

Verlängert man wieder AB und CB und zieht $BL' \mathrel{+\!\!\!=} DL$, $BG' \mathrel{+\!\!\!=} FG$, so ist, wenn ψ wieder den Winkel bezeichnet, den LD mit GF macht,

$$\psi = 90^\circ - 2\varepsilon.$$

Da aber ε diesmal als negativer Winkel in Rechnung gebracht werden muß, so reducirt sich diese Formel auf die vorige: $\psi = 90^\circ + 2\varepsilon$, wenn man nur den Einfallswinkel ε positiv oder negativ nimmt, je nachdem der Strahl LD in dem Winkel ADP oder BDP liegt.

§. 75. Ein von zwei sphärischen oder von einer ebenen und einer sphärischen Fläche begrenzter Glaskörper heißt eine **Glaslinse**. Die sphärische Fläche kann entweder **erhaben** (convex) oder **hohl** (concav) sein. Sind beide Flächen convex, so heißt die Linse **biconvex**; sind beide Flächen concav, so heißt die Linse **biconcav**; ist die eine Fläche eben (plan), so heißt die Linse **planconvex** oder **planconcav**, je nachdem die andere convex oder concav ist. Eine Linse, deren eine Fläche convex, die andere concav ist, heißt **concavconvex**, oder ein **Meniscus**, wenn der Radius der convexen Fläche kleiner ist als der Radius der concaven; im entgegengesetzten Falle heißt die Linse **convexconcav**. Die Figuren 74 bis 79 stellen die Durchschnitte aller sechs Linsenarten mit einer durch die Mittelpunkte der sphärischen Flächen

gelegten Ebene vor. Fig 74 ist der Durchschnitt der biconvexen Linse, Fig. 75 der des Meniscus, Fig. 76 der der planconvexen Linse; Fig. 77 der Durchschnitt der biconcaven, Fig. 78 der der planconcaven, Fig. 79 der der convexconcaven Linse. Man sieht schon aus der Zeichnung, daß die convexen Linsen (Fig. 74 bis 76) am Rande dünner sind als in der Mitte, dagegen die concaven (Fig. 77 bis 79) am Rande dicker als in der Mitte. Die Mittelpunkte der sphärischen Flächen, welche natürlich außerhalb des Körpers der Linse liegen, heißen geometrische Mittelpunkte. Die Linsen mit einer planen Fläche haben nur einen Mittelpunkt, der andere liegt in unendlicher Ferne, insofern man eine Ebene als eine Kugelfläche von unendlich großem Radius ansehen kann. Die durch die geometrischen Mittelpunkte einer Linse gedachte Gerade heißt die Achse der Linse; bei der Linse mit einer planen Fläche ist die Achse ein durch den Mittelpunkt der sphärischen Fläche auf die ebene Begrenzungsfläche gefälltes Loth. Der in der Achse genommene Abstand der Linsenflächen, MN, heißt die Dicke der Linse, der Durchmesser LL′ des Kreisrandes die

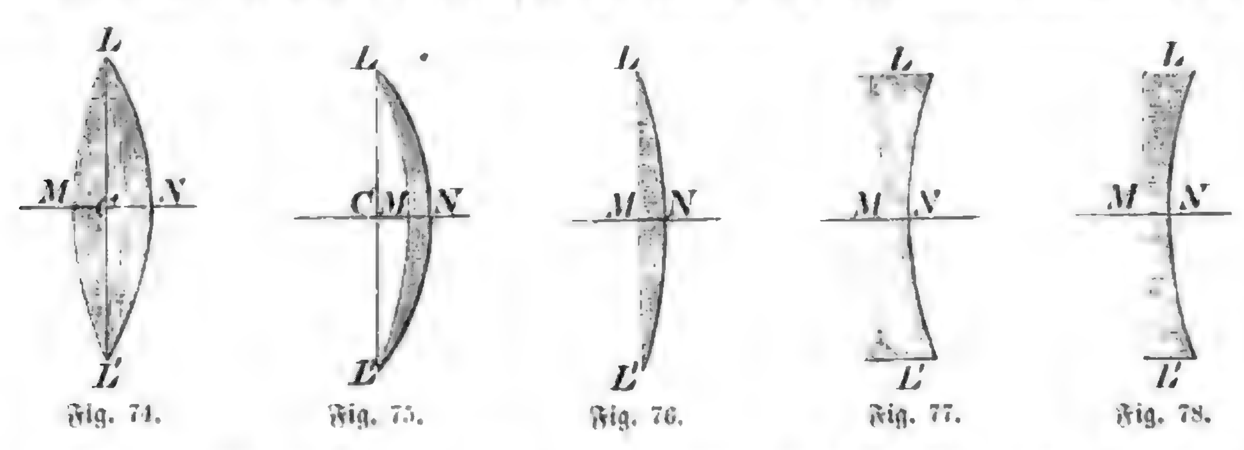


Fig. 74. Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77. Fig. 78.

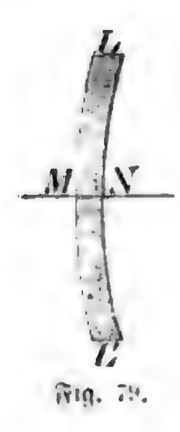


Fig. 79.

Oeffnung der Linse, die Hälfte dieses Durchmessers, LC, die halbe Oeffnung. Diejenige Seite einer Linse, auf welche das Licht fällt, heißt die Vorderfläche, die andere die Hinterfläche. In jeder der beiden Linsenflächen läßt sich ein Punkt denken, der von allen Punkten des Randes gleich weit entfernt ist; er heißt schlechtweg der Mittelpunkt der betreffenden Linsenfläche und ist wohl vom geometrischen Mittelpunkte zu unterscheiden. Wenn die Mittelpunkte beider Flächen in der Achse liegen, so heißt die Linse richtig centrirt.

Da ein Kugelradius, der nach irgend einem Punkte der Kugeloberfläche geführt wird, auf der an diesen Punkt gelegten Berührungsebene, also auch auf den nächsten Elementen der Kugelfläche senkrecht steht, so bildet der irgend einem Punkte einer sphärischen Linsenfläche zugehörige Kugelradius das Einfallsloth für jeden auf diesen Punkt treffenden Lichtstrahl.

§. 76. Durch den Linsendurchschnitt DE (Fig. 80) ziehe man die Gerade HK, welche die Achse in dem Punkte J, die Seitenflächen in den Punkten

Digitized by Google

F und G schneidet; es seien dann C, C_1 die geometrischen Mittelpunkte der Linse, CF, C_1G die nach den Punkten F, G gezogenen Radien, die nach V und W verlängert werden mögen. Setzt man den Winkel HFV = WGK = ε, so stellt HK einen ohne Brechung durch die Linse gehenden Lichtstrahl vor, und weil HFV = WGK angenommen worden, so ist $\triangle CFJ \sim C_1GJ$, also:

$$CF : C_1G = CJ : C_1J.$$

Setzt man CF = r, $C_1G = \rho$, MJ = x, ML = d, so verwandelt sich diese Proportion in:

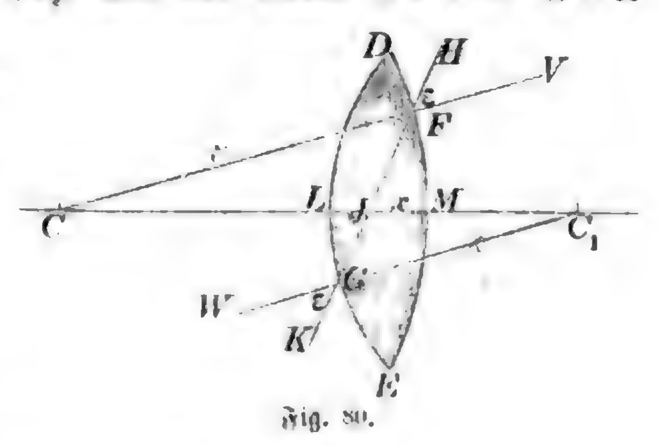


Fig. 80.

$$r : \rho = (r - x) : (\rho - (d - x)),$$

woraus man:

$$x = \frac{rd}{r + \rho}$$

findet. Also schneidet ein Strahl, der ungebrochen durch die Linse geht, die Achse in einem Punkte J, der von der Vorderfläche der Linse um die gefundene Größe x entfernt ist. Ein solcher Punkt der Achse, durch welchen alle Strahlen ungebrochen durchgehen, heißt der optische Mittelpunkt der Linse.

Ist r = ρ, so wird $x = \frac{1}{2}d$, d. h. bei einer gleichseitigen biconvexen Linse liegt der optische Mittelpunkt in der Mitte der Linse.

Bei einem Meniscus kehren beide Linsenflächen ihre Convexität nach derselben Seite hin, oder, ihre geometrischen Mittelpunkte liegen beide auf derselben Seite der Linse. Soll daher dieselbe Formel auch hier noch zur Bestimmung des optischen Mittelpunkts gelten, so muß man den Radius der concaven Fläche negativ setzen; ist dieser r, so hat man:

$$x = \frac{-rd}{-r + \rho} = \frac{rd}{r - \rho},$$

wo, weil, der Erklärung des Meniscus zufolge, r > ρ, also der Nenner und somit nun der ganze Ausdruck positiv ist. Dasselbe Resultat liefert die directe Behandlung dieses Falles. Wir nehmen Fig. 81 zu Hülfe und erhalten:

$$W.\ CFH = WGK.$$

$$\triangle CFJ \sim C_1GJ;$$

$$CF : C_1G = CJ : C_1J;$$

oder, da

$$ML = d,\ MJ = x:$$

$$r : \rho = r + x : \rho + x - d$$

$$x = \frac{rd}{r - \rho}.$$

Ist bei der biconvexen Linse r > ρ, so ist r + ρ < 2r und:

$$\frac{r}{r + \rho} > \frac{r}{2r} > \frac{1}{2}, \quad \text{folglich: } x, \text{ d. h. } \frac{rd}{r + \rho} > \frac{1}{2}d.$$

Bei der ungleichseitigen biconvexen Linse liegt der optische Mittelpunkt näher an der stärker gekrümmten Fläche.

Für den Meniscus ist $r > r - \rho$, also:

$$\frac{r}{r-\rho} > 1,$$

folglich: x oder $\frac{rd}{r-\rho} > d.$

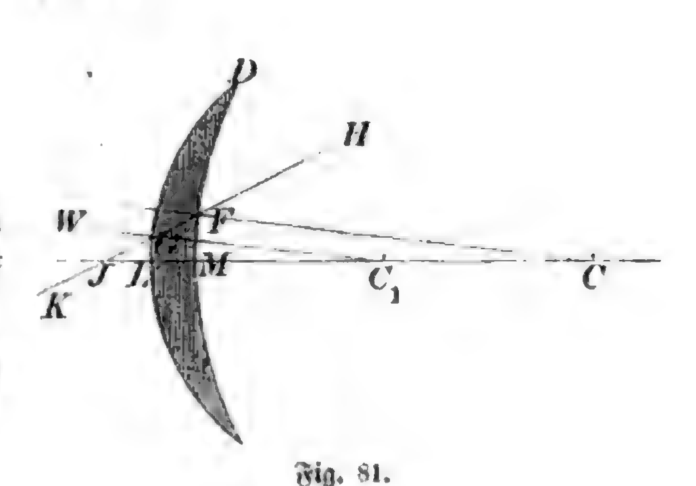


Fig. 81.

Der optische Mittelpunkt liegt beim Meniscus außerhalb der Linse, auf der Seite der convexen Fläche.

Für die planconvexe Linse ist $r = \infty$, also:

$$x \text{ oder } \frac{rd}{r+\rho} = d.$$

Der optische Mittelpunkt der planconvexen Linse liegt im Durchschnitt der convexen Fläche mit der Achse, was übrigens auch aus der directen Behandlung des Falles leicht folgt, denn CF wird, weil $CM = \infty$, jetzt der Achse parallel; damit also wieder $CF \# C_1G$ werde, wie dies wegen der Gleichheit der Winkel ε in allen Fällen sein muß, muß C_1G in der Achse liegen, also G in L, folglich HK durch L gehen.

Bei der biconcaven Linse sind beide Radien negativ zu nehmen, daher man wieder

$$x = \frac{rd}{r+\rho} \text{ bekommt.}$$

§. 77. Es sei MN (Fig. 82) der Durchschnitt einer biconvexen sphärischen Linse, C der geometrische Mittelpunkt der Fläche MON, D der der Fläche MPN, AC die Achse, A ein leuchtender Punkt in derselben. Aus A falle der Strahl AB auf die Linse, CBK sei das Einfallsloth für den Punkt B, so wird, wenn ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel ist, AB nach der Formel:

$$\sin\varepsilon = n \cdot \sin\beta$$

gebrochen werden; der Strahl nimmt die Richtung BE an, welche, verlängert, die Achse in F schneidet. In E tritt der Strahl wieder in die Luft und wird also nach der Formel

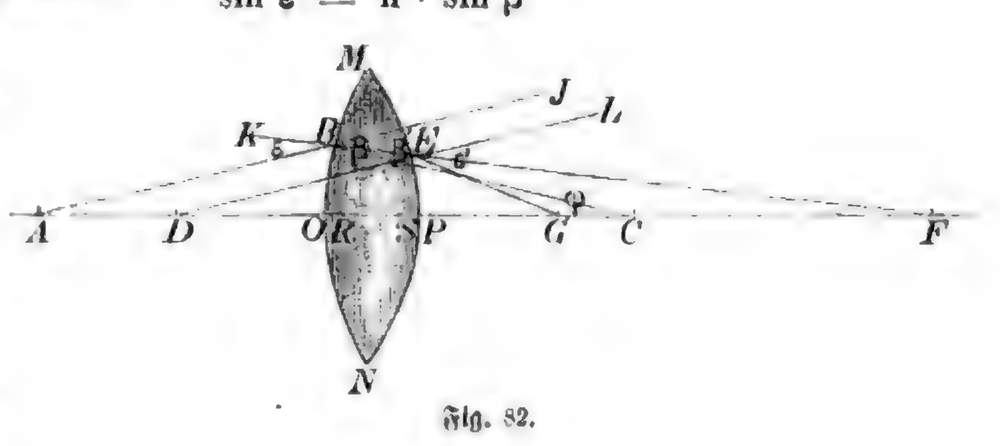


Fig. 82.

$$\sin\varepsilon' = n \cdot \sin\beta'$$

gebrochen, so daß er nach dieser zweiten Brechung die Achse in G trifft. Um die Lage dieses Punktes G zu finden, setze man $CO = r$, $DP = \rho$, $AB = a$, und das Brechungsverhältniß von Luft in Glas, wie bereits geschehen, $= n:1$. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß der Strahl AB das Glas so nahe an der Achse treffe, daß der Winkel BAO nur sehr klein werde; dann werden auch die Einfalls- und Brechungswinkel dieses Strahls ε, β, ε', β' sehr klein werden, und bei sehr kleinen Winkeln verhalten sich die Sinus nahe genau wie die Winkel selbst; dann verhalten sich aber die Seiten der Dreiecke auch wie die ihnen gegenüberliegenden Winkel (statt daß sie sich allgemein wie die Sinus dieser Winkel verhalten). Unter dieser Voraussetzung ist dann ferner $AB = AO = a$, und im Dreieck ABC:

$$W.\ ABC : \varphi = a + r : a,$$

oder

$$W.\ CBJ : \varphi = a + r : a$$

$$W.\ CBJ = \frac{a + r}{a} \cdot \varphi.$$

Bei der Brechung in B ist:

$$W.\ CBF = \frac{1}{n} \cdot CBJ = \frac{a + r}{a} \cdot \frac{\varphi}{n}.$$

Da ferner: $BF : BC = W.\ BCF : W.\ BFC$,

wenn die Winkel so klein sind, daß sie sich wie ihre Sinus verhalten, und weil: $\sin BCF = \sin \varphi$,

und $$W.\ BFC = BCO - CBF = \varphi - \frac{a + r}{a} \cdot \frac{\varphi}{n},$$

so hat man: $$BF : BC = \varphi : \varphi - \frac{a + r}{a} \cdot \frac{\varphi}{n}.$$

Setzt man nun $OF = BF = g$, so ist, da $BC = r$,

$$g = \frac{a r}{a - \frac{1}{n}(a + r)},$$

also: $$1)\quad \frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left(\frac{n - 1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Der gebrochene Strahl BF tritt bei E auf die zweite Fläche der Linse und wird bei seinem Uebergange in die Luft zum zweiten Male gebrochen. Man ziehe das Einfallsloth DEL, so wird BE nach dem Gesetze:

$$\sin \varepsilon' = n \cdot \sin \beta'$$

gebrochen, und die Lage des Punktes G in der Achse muß sich aus der von F gerade so bestimmen lassen, wie die von F aus der von A bestimmt wurde. Setzt man daher $GE = GP = f$, und in der Gleichung (1) g statt a, $\frac{1}{n}$ statt n, ρ statt r und $-f$ statt g, so erhält man:

$$2)\quad \frac{1}{f} = \frac{n}{g} + \frac{n-1}{\rho},$$

und statt $\frac{1}{g}$ seinen Werth aus (1) setzend:

$$3)\quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{a}.$$

$$4)\quad \frac{1}{f} + \frac{1}{a} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

$$5)\quad f = \frac{a\,r\,\rho}{(n-1)\,a\,(r+\rho) - r\rho}.$$

Für $a = \infty$ fällt AB parallel mit der Achse auf, es wird $\frac{1}{a} = 0$ und der Quotient $\frac{1}{a}$ verschwindet also aus der Gleichung (3); für diesen Fall ist daher:

$$6)\quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

$$7)\quad f = \frac{r\rho}{(n-1)(r+\rho)}.$$

Alle Strahlen, welche der Achse parallel einfallen, schneiden folglich die Achse nach ihrem Durchgang durch die Linse in demselben Punkte. In Fig. 83 stellen SA, S'A'.... ebenso viele mit der Achse parallele Strahlen vor, die durch die erste Brechung beziehlich nach B, B'...., nach der zweiten Brechung aber alle nach dem Punkte F gelangen. Der Punkt F, in welchem alle parallelen Strahlen, nach der zweimaligen Brechung in einer convexen Linse, vereinigt werden, heißt der **Brennpunkt** der Linse. Die Entfernung von der Linse heißt die **Brennweite**. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, da man beliebig jede ihrer Flächen zur Vorder- oder Hinterfläche machen kann. Spricht man vom **vordern** Brennpunkte einer convexen Linse, so versteht man darunter denjenigen Punkt der Achse, welcher zum Brennpunkte wird, wenn man die Linse umkehrt. Wir bezeichnen künftig die Brennweite mit F, so daß dann:

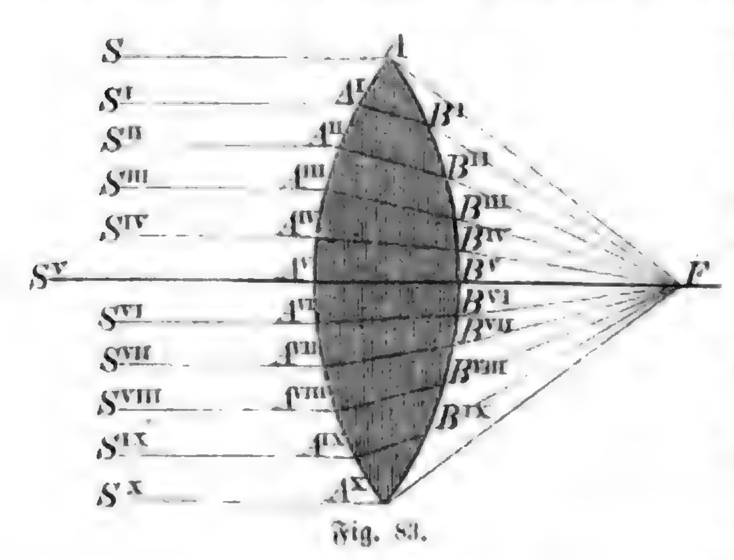


Fig. 83.

$$8)\quad F = \frac{r\rho}{(n-1)(r+\rho)}.$$

$$9)\quad \frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Aus (4) folgt wieder:

$$10)\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a},$$

oder

$$11)\quad \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{a}.$$

Für planconvexe Linsen ist $\rho = \infty$, also $\frac{1}{\rho} = 0$, folglich:

$$12)\quad \frac{1}{F} = (n-1)\cdot\frac{1}{r};$$

und für den Meniscus ist ρ negativ, also:

$$13)\quad \frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right),$$

wo $\rho > r$, also $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ und $\frac{1}{F}$ positiv bleibt.

Bei einem biconcaven Glase sind beide Krümmungsradien negativ; setzt man also in (9) $-r$ statt r und $-\rho$ statt ρ, so haben r und ρ wieder positive Werthe und es folgt:

$$14)\quad \frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right);$$

da $n > 1$, so ist $\frac{1}{F}$, also dann auch F selbst negativ, d. h. der Brennpunkt liegt vor dem Glase, was man dadurch ausdrückt, daß man sagt, das Glas habe einen imaginären Brennpunkt.

Für die planconcave Linse folgt aus (12), wenn man $-r$ statt r setzt:

$$15)\quad \frac{1}{F} = -(n-1)\cdot\frac{1}{r}.$$

Bei der convexconcaven Linse ist ρ negativ und kleiner als r, also $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{r}$, folglich:

$$16)\quad \frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right).$$

Die Brennweite ist also bei allen concaven Gläsern negativ, der Brennpunkt imaginär. Im Brennpunkte einer convexen Linse wird das gebrochene Licht wirklich gesammelt; bei der concaven Linse aber wird jeder mit der Achse parallele Strahl nach der Brechung divergent, trifft die Achse gar nicht und hat eine solche Richtung, daß, wenn man ihn rückwärts verlängert, er da die Achse in dem imaginären Brennpunkte schneidet.

Da nach (11) bei jeder convexen Linse

$$17)\quad \frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f},$$

so folgt, daß a ebenso von f abhängt, wie f von a, d. h. befindet sich in einem Falle der leuchtende Punkt da, wo in einem andern der Durchschnitt

mit der Achse nach der Brechung ist, so findet dieser Durchschnitt da statt, wo im letzten Falle der leuchtende Punkt war. Und, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Formel (11) für concave Linsen entwickelt, gilt dasselbe Gesetz auch für diese.

§. 78. Durch die vorigen Sätze ist man in Stand gesetzt, jeden beliebigen auf eine convexe Linse fallenden Lichtstrahl nach seiner Brechung zu verfolgen. Von jedem leuchtenden Punkte gehen nämlich unzählige Strahlen aus; ein Bündel, in der Gestalt eines Kegels, trifft die Linse, wird durch diese gebrochen und nach der Brechung wieder in einem Punkte vereinigt, weil nach §. 77, 10, alle von demselben Punkte ausgehenden Strahlen dieselbe Vereinigungsweite haben, d. h. die Achse gleich weit von der Linse treffen. Da, wo Strahlen, welche von demselben Punkte ausgehen, sich nach der Brechung treffen, entsteht ein Bild dieses Punktes. Sämmtliche von demselben Punkte ausgehende Strahlen treffen sich aber da, wo zwei derselben sich schneiden, und da bieten sich zwei dar, welche besonders leicht zu verfolgen sind: 1) der durch den optischen Mittelpunkt gehende, welcher ein Hauptstrahl heißt und ungebrochen bleibt; 2) der mit der Achse parallele Strahl, welcher nach dem Brennpunkte hinter der Linse gebrochen wird. In Fig. 84 sei A der leuchtende Punkt, F der Punkt der Achse, in welchem sich alle mit der Achse parallelen Strahlen vereinigen, der Brennpunkt, AO der Hauptstrahl, so ist der Convergenzpunkt M das Bild von A. Dieser Punkt läßt sich aber auch durch Rechnung finden. Es ist nämlich, weil $AB \mathrel{\#} OF$, $\triangle ABM \sim OFM$, also:

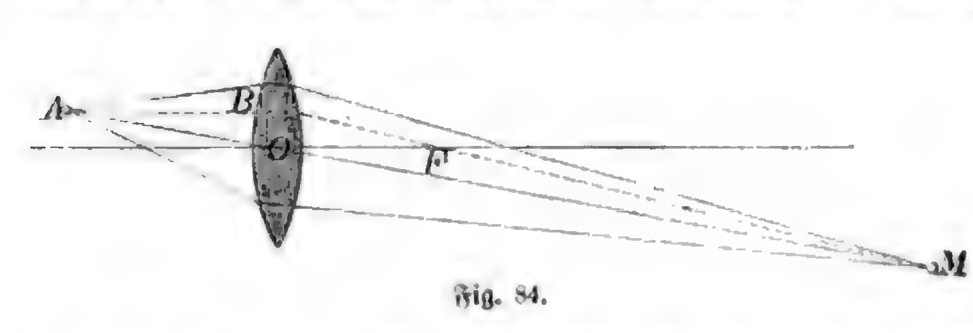


Fig. 84.

$$AB : AM = OF : OM,$$

oder:

$$a : f + a = F : f,$$

wenn man die Dicke der Linse vernachlässigt und $AO = AB$ setzt, was beides allemal gestattet ist, sofern die Dimensionen der Linse gegen die Entfernungen verschwinden. Also ist dann:

$$af = fF + aF.$$

$$f = \frac{aF}{a - F},$$

oder:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f},$$

also nach §. 77, 4:

$$\frac{1}{F} = (n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Ein mit der Achse paralleler Strahl wird also gerade so gebrochen, wie diejenigen Strahlen, die von leuchtenden Punkten in der Achse herkommen, und es bleibt nur noch übrig, zu untersuchen, ob auch wirklich alle Strahlen, die nicht aus der Achse kommen, sich mit dem parallelen Strahle AB nach der Brechung in einem Punkte vereinigen. Es sei also A (Fig. 85) ein leuchtender Punkt außerhalb der Achse, AB ein nicht mit der Achse paralleler Strahl, der in B die Linse trifft; er schneide die Achse nach der Brechung in E und treffe den Hauptstrahl AO in M. Man verlängere BA rückwärts bis zum Durchschnitt mit der Achse in H und setze $OH = q$, $OE = q'$, so entsprechen sich die Punkte H und E in der Weise, daß, wenn in einem derselben sich ein leuchtender Punkt befindet, im andern sein Bild sein muß;

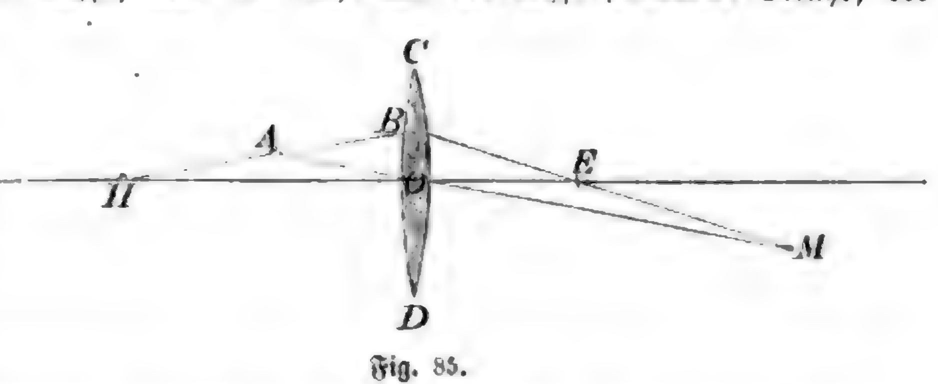


Fig. 85.

also ist:
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}.$$

Nun wird das Dreieck HBE von der Transversale AM durchschnitten, daher findet der Lehrsatz §. 21, 3, statt; demnach ist:
$$OE \cdot AH \cdot BM = AB \cdot OH \cdot EM,$$
oder:
$$q' \cdot (q - a) \cdot f = a \cdot q \cdot (f - q').$$
$$af\,(q + q') = qq' \cdot (a + f).$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}.$$
Nun war
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{F},$$
also ist:
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f},$$
d. h. alle Strahlen, welche von Punkten außerhalb der Achse herkommen und in beliebigen, nicht weit von der Achse abstehenden Richtungen auf die Linse fallen, vereinigen sich in demselben Punkte, wo der Parallel- und der Hauptstrahl auch zusammentreffen; also ist das durch die letzte Gleichung ausgedrückte Gesetz ganz allgemein für alle auf eine convexe Linse fallenden Strahlen gültig.

§. 79. Es wird nun leicht sein, die Größe und Lage des durch sphärische Linsen erzeugten Bildes zu bestimmen. Es sei zu diesem Zwecke (Fig. 86) $LN = b$ die Größe des Gegenstandes, Nn die Achse der Linse CD, LM ein Parallelstrahl, LO ein Hauptstrahl, so entsteht das Bild ln, dessen Größe

wir $= \beta$ setzen; dann ist, weil LN und ln rechtwinkelig zur Achse, also zu einander parallel angenommen sind, $\triangle LNO \sim lnO$, also:

$$LN : ln = NO : nO,$$

oder:

$$b : \beta = a : f,$$

also

$$\beta = b \cdot \frac{f}{a} = b \cdot \frac{F}{a - F}.$$

Die Entfernung des Bildes vom Glase wird bestimmt durch die Formel:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

oder:

$$f = \frac{aF}{a - F}.$$

Ob das Bild vor oder hinter der Linse erscheine, bestimmt sich durch das Vorzeichen von f, wobei zu bemerken, daß von vornherein angenommen worden, daß einem Bilde hinter dem Glase ein positives f entspreche. Ist also F positiv (wie bei jeder convexen Linse) und $a > F$, so erscheint das Bild hinter der Linse; ist dagegen zwar F positiv, aber $a < F$, so wird f negativ und das Bild erscheint vor der Linse. Ist ferner F negativ, wie bei einem concaven Glase, und $= -\varphi$, so ist:

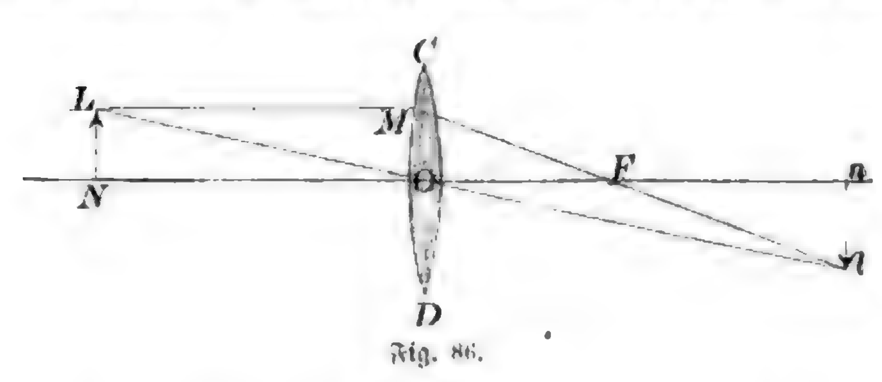


Fig. 86.

$$f = \frac{-a\varphi}{a + \varphi},$$

also der Ausdruck allemal negativ und das Bild vor der Linse.

Die Lage des Bildes zur Achse bestimmt sich durch die Formel für β, insofern die Rechnung so angelegt ist, daß ein positives β auf ein Bild deutet, das auf der dem Gegenstande entgegengesetzten Seite der Achse liegt. Für ein positives F, das $> a$, liegt daher das Bild mit dem Gegenstande auf derselben Seite der Achse, und wenn bei derselben Linse $a > F$, so liegt das Bild auf der dem Gegenstande entgegengesetzten Seite.

§. 80. In den vorigen Erörterungen haben wir stets vorausgesetzt, daß die Strahlen nahe an der Achse auf die Linse fallen, und haben zu diesem Zwecke gewisse Ausdrücke für andere gesetzt (z. B. das Verhältniß der Winkel für das ihrer Sinus), damit eben alle von der Achse weit abliegende Strahlen ein für allemal von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben, weil in der That die Erfahrung beweist, daß die am Rande auf eine sphärische Linse auffallenden Strahlen, auch wenn sie mit den nahe an der Achse auffallenden aus einem

Punkte kommen, stärker gebrochen werden als diese, wie z. B. Fig. 87, wo L b, L b′ die Randstrahlen, L a, L a′ die Centralstrahlen vorstellen, und wo erstere sich nach der Brechung in B′, letztere in B vereinigen, so daß, wenn nur a, a′ der Achse sehr nahe liegen, B′ der nächste, B der entfernteste Schnittpunkt sein wird, und die innerhalb der Zone a b auffallenden Strahlen ihre Schnittpunkte zwischen B und B′ haben werden, wie e f, c′ f; c, d stellen zwei der Punkte vor, in welchen sich die äußersten dieser Strahlen gegenseitig

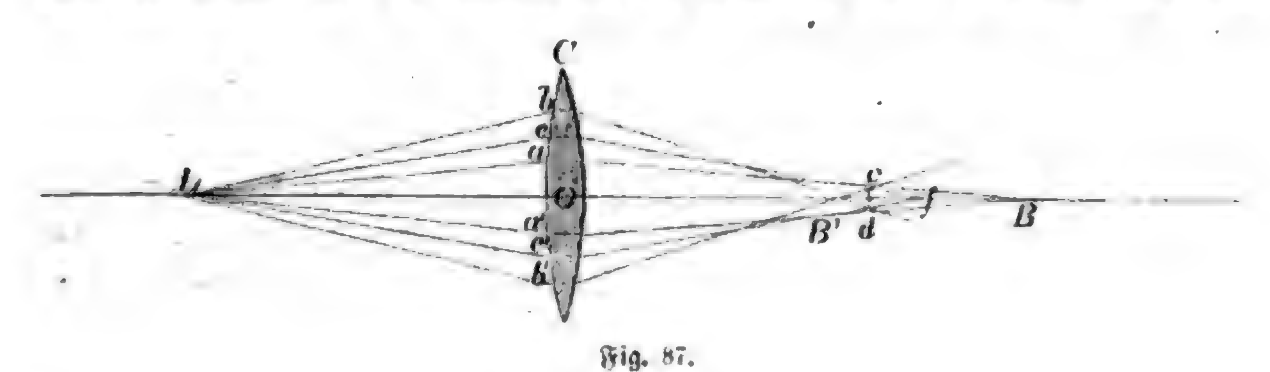


Fig. 87.

schneiden, c d den Durchmesser desjenigen Kreises, innerhalb dessen alle Schnittpunkte dieser Strahlen liegen; dieser Kreis stellt demnach das Bild des leuchtenden Punktes L vor; ein anderer kleiner Kreis wird das Bild eines andern Punktes vorstellen und somit das Bild eines Gegenstandes aus lauter kleinen Kreisen bestehen, wodurch dasselbe undeutlich wird. Man nennt diese Erscheinung die sphärische Abweichung, weil sie ihren Grund in der kugelförmigen Gestalt der Linsenflächen hat; jener Kreis mit dem Durchmesser c d heißt der Abweichungskreis.

§. 81. Wir haben angenommen, daß die Strahlen so kleine Winkel mit der Achse machen, daß man das Verhältniß der Winkel für das ihrer Sinus setzen könne, also z. B., während $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$, d. h.:

$$\sin\alpha : \sin 2\alpha = 1 : 2\cos\alpha,$$

das Verhältniß $1 : 2$ statt $1 : 2\cos\alpha$ gesetzt; die Sinus nehmen also langsamer zu als die Winkel selbst, weil $\cos\alpha$ immer ein echter Bruch, also $2\cos\alpha$ kleiner als 2 ist. Die Randstrahlen haben größere Einfallswinkel als die Centralstrahlen. Ließe man nun für jene das Verhältniß $\varepsilon : \beta = n : 1$ statt $\sin\varepsilon : \sin\beta = n : 1$ noch gelten, so nähmen also die Brechungswinkel in einem größern Verhältniß zu, als es in der Wirklichkeit der Fall ist; dann aber schnitten die Randstrahlen die Achse in demselben Punkte mit den Centralstrahlen; also müssen in der Wirklichkeit bei einer convexen Linse die Randstrahlen die Achse näher am Glase treffen als die Centralstrahlen. Damit also auch die Randstrahlen mit den Centralstrahlen zusammenträfen, müßten die Linsen eine von der sphärischen verschiedene Gestalt haben, die Mitte der Linse müßte mehr, oder der Rand weniger gekrümmt sein; die Rechnung weist

die richtige Form einer abweichungsfreien Linse nach, worauf wir indessen hier nicht weiter eingehen wollen, da sie doch praktisch unausführbar sind.

Um in den dioptrischen Instrumenten die durch die sphärische Abweichung veranlaßte Undeutlichkeit zu heben, setzt man kreisförmige Messingplättchen ein, die in der Mitte durchbohrt sind und blos die Centralstrahlen durchlassen, die Randstrahlen aber zurückhalten; diese Plättchen heißen Blendungen. Der Durchmesser der Blendungsöffnung muß weniger als ein Drittel der Brennweite betragen.

Bei einer biconvexen Linse ist die Abweichung geringer, wenn die stärker gekrümmte Fläche dem Objecte zugewendet ist und das Bild sich hinter der Linse befindet; entsteht ein Bild vor der Linse, so ist die Abweichung am geringsten, wenn die stärker gekrümmte Fläche dem Auge zugekehrt ist. Die Form der Linse ist am besten, wenn, für das Brechungsverhältniß $^3/_2 : 1$, der Radius der Vorderfläche sich zum Radius der Hinterfläche wie 2 : 11 verhält. Die planconvexe Linse gibt die kleinste Abweichung, wenn die ebene Fläche dem Bilde zugekehrt ist. Durch Zusammenstellung zweier Linsen von entsprechenden Krümmungshalbmessern kann man die sphärische Abweichung ganz heben.

Wir müssen uns begnügen, über die sphärische Abweichung nur diese nicht ausreichend begründeten Andeutungen zu geben; eine vollständige Theorie dieses Gegenstandes würde uns zu weit führen; für den nächsten Zweck dürfte indeß das Mitgetheilte genügen.

§. 82. Die Brechung der Lichtstrahlen wird noch von einer andern Modification derselben begleitet. In einem nach Süden gelegenen Zimmer verdunkle man alle Fenster durch dicht schließende Laden; in eine dieser Laden mache man eine kreisrunde Oeffnung, durch welche sich ein Spiegel an der Außenseite der Lade anbringen läßt, so eingerichtet, daß derselbe nach dem Stande der Sonne in verschiedene Lagen gebracht werden kann, wozu nur nöthig ist, daß er sich um eine gegen die Lade senkrechte Achse drehen und in jeder ihm dadurch gegebenen Lage noch unter verschiedenen Winkeln gegen die Lade neigen lasse. Man stelle dann diesen Spiegel so, daß das von der Sonne darauf fallende Licht horizontal durch die Oeffnung in der Lade ins Zimmer falle. Die Oeffnung in der Lade decke man nun durch eine Metallplatte zu, in deren Mitte sich nur ein ganz kleines, kreisförmiges Loch befindet, so tritt ein dünner horizontaler Lichtstrahl L D (Fig. 88) ins dunkle Zimmer. Man fange diesen Strahl durch eine Fläche A C eines dreiseitigen Glasprismas, wovon A B C ein gegen die Kanten senkrechter Durchschnitt ist, auf und verfolge den Strahl im dunkeln Zimmer. Man wird sehen, daß derselbe, wie schon bekannt, auf jeder der Glasflächen, die er trifft, gebrochen, daß er aber zugleich auch in ein fächerförmiges Bündel farbiger Strahlen zerstreut

wird, deren äußerste DEG, DFH sind, die um so weiter aus einander gehen, je weiter sie sich vom Prisma entfernen. Fängt man sie in etwa 16 Fuß vom Prisma durch eine weiße Tafel MN auf, welche senkrecht gegen die mittlern Strahlen des Bündels gestellt wird, so bilden sie ein längliches Bild GH, das seitwärts durch gerade Linien, oben und unten durch Kreisbogen begrenzt ist, und in welchem von oben nach unten die Farben in der Ordnung: Violett, Indigo, Blau, Grün, Gelb, Orange, Roth, auf einander folgen. Diese Erscheinung heißt die Farbenzerstreuung. Die durch das Prisma erhaltene Figur heißt das Newton'sche Farbenspectrum.

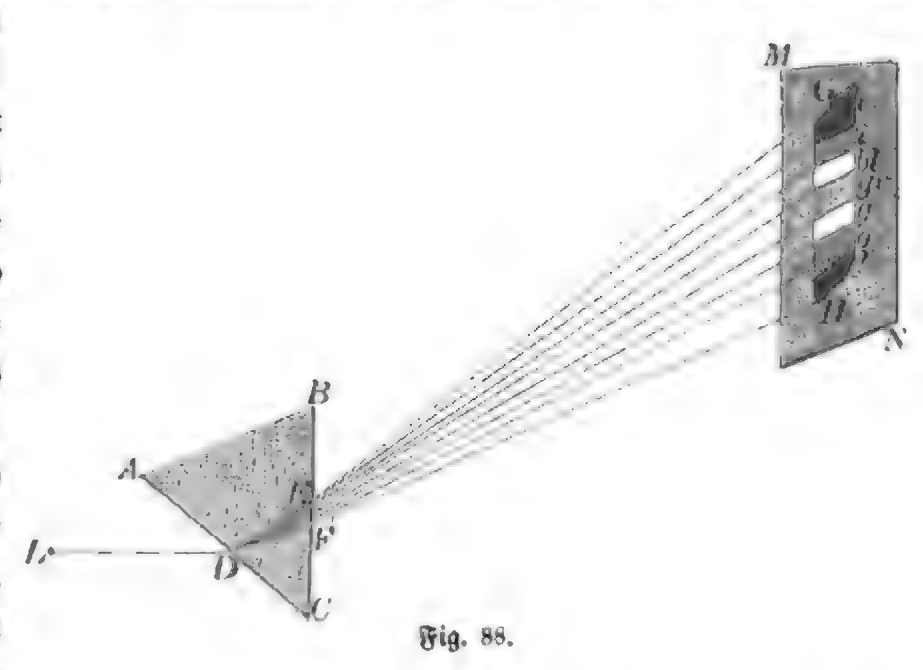


Fig. 88.

Das weiße Licht wird also durch die Brechung in farbiges Licht zerlegt; dabei hat das Violett die größte, das Roth die geringste Brechbarkeit, weil jenes am meisten, dieses am wenigsten abgelenkt wird; die andern Farben haben eine mittlere Brechbarkeit. Fällt also von dem Punkte L (Fig. 89) aus ein dünner Strahl LM auf das Prisma ABC, und man bietet diesem Strahle bei E, nach seinem Durchgange durch das Prisma eine weiße Fläche YZ dar, so bildet sich bei v der Punkt L violett, bei r roth ab, und zwischen v und r liegen noch ein indigoblaues, ein hellblaues, ein grünes, ein gelbes und ein orangefarbiges Bild des Punktes L. Aber diese Bilder sind, weil sie theilweise in einander übergreifen, undeutlich begrenzt und verwaschen. Empfängt also ein Auge bei E diese farbigen Strahlen, so sieht es nach den Richtungen vv′, rr′.... ebenso viele Bilder in umgekehrter Ordnung.

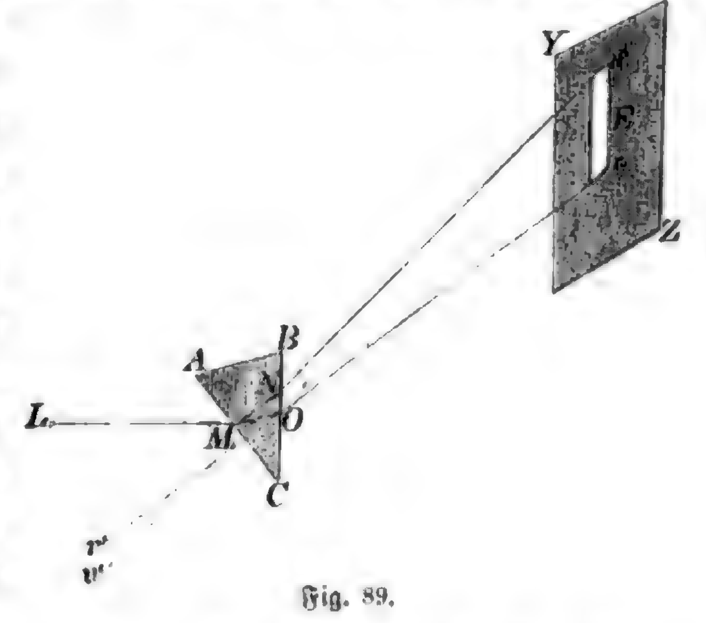


Fig. 89.

§. 83. Aehnliches geschieht nun auch bei den Linsen. Fallen Strahlen LM, LN auf die Linse AB (Fig. 90), so wird LM in ein farbiges Bündel

zerstreut, dessen äußerste Strahlen M r, M v sind, wo der rothe M r weniger gebrochen ist als der violette M v; ebenso wird L N zerstreut. Die violetten Strahlen von allem auffallenden weißen Lichte haben ihren Vereinigungspunkt zunächst dem Glase in v, die rothen am weitesten vom Glase in r, und die andern Farben ihrer Ordnung nach zwischen v und r; alle farbigen Strahlen müssen daher entweder vor oder nach ihrem Durchschnitt mit der Achse sich gegenseitig innerhalb des Kreises vom Durchmesser m n treffen. Dieser Kreis heißt der Abweichungskreis, und die Abweichung der Vereinigungsweiten von der, wie sie sein würde, wenn das Licht einfarbig bliebe und keine Zerstreuung erlitte, die Farbenabweichung oder chromatische Abweichung.

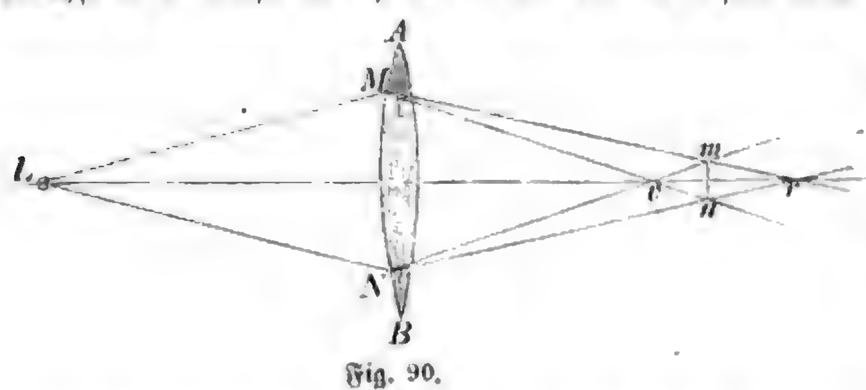


Fig. 90.

§. 84. Diese Farbenabweichung veranlaßt bei den Linsen eine noch störendere Undeutlichkeit der Bilder als die Kugelabweichung. Es ist daher seit der Erfindung der Fernröhre das Bestreben der Physiker und Mechaniker gewesen, diese wichtigen Instrumente von einem so störenden Fehler zu befreien, was ihnen auch in so hohem Grade gelungen ist, daß die Farbenabweichung als gehoben angesehen werden kann. Man setzt zu diesem Zwecke eine biconvexe Linse A A (Fig. 91) aus einer Glasart (Crownglas) mit einer biconcaven B B

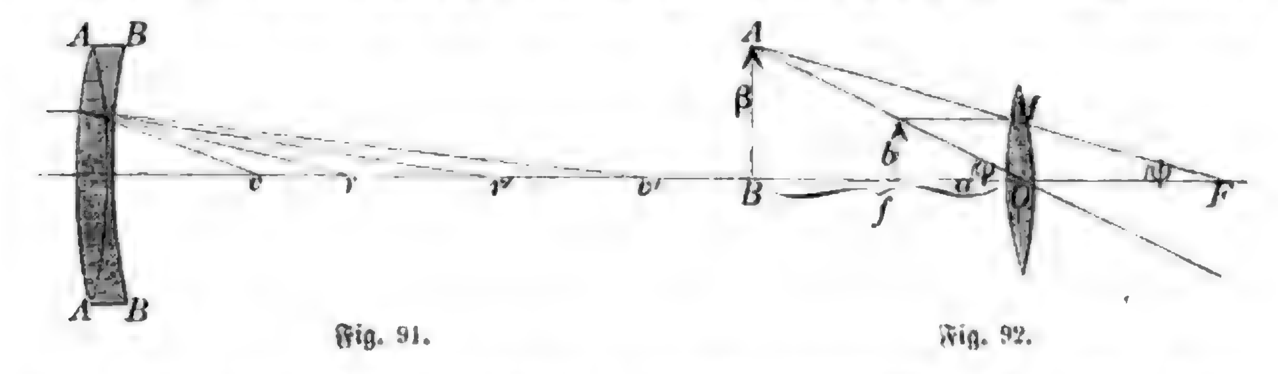


Fig. 91. Fig. 92.

aus einer andern Glasart, nämlich Flintglas, zusammen. Diese letzte Glasart unterscheidet sich von jener durch einen Gehalt an Bleioxyd, welches das Brechungsvermögen nicht bedeutend verändert, aber das Farbenzerstreuungsvermögen stark vergrößert. Man bewirkt dadurch, daß die Vereinigungsweiten der äußersten farbigen Strahlen des zerstreuten Lichtes fast in einen Punkt zusammenfallen, ohne daß die Brechung aufgehoben würde. Streng genommen kann man zwar durch dieses Mittel nur zwei Farben zusammenbringen; richtet man aber, was immer möglich ist, die Linsen so ein, daß die indigoblauen und die orangefarbigen Strahlen vereinigt werden, so erscheinen die

Bilder, welche eine solche Linse gibt, für die meisten Fälle hinreichend farbenfrei. Die übrigbleibenden Farben könnten mit den ersten zugleich weggebracht werden, wenn in beiden Glasarten alle farbigen Strahlen nach demselben Verhältniß zerstreut würden, oder wenn es überhaupt zwei Substanzen gäbe, aus welchen sich Linsen anfertigen ließen, und welche mit der genannten Eigenschaft begabt wären. Da dies nicht der Fall ist, so muß man sich mit dem bis jetzt erzielten Grade der Reinheit der Bilder begnügen. Wir werden bei den dioptrischen Instrumenten sehen, daß die über den Gegenstand gewonnene Kenntniß, richtig ausgebeutet, alles zu leisten vermag, was man in dieser Beziehung nur wünschen kann. Eine Linse, welche Bilder ohne merkliche Farben gibt, heißt achromatisch. Dieselbe Linse, durch welche die Farbenzerstreuung auf ein Minimum gebracht wird, dient zugleich auch zur Aufhebung der Kugelabweichung.

§. 85. Aus Linsen, wie wir sie im Vorigen kennen gelernt, setzt man nun alle Arten dioptrischer Instrumente zusammen. In der Geodäsie kommen zwei Arten derselben in Anwendung: 1) solche, die dazu dienen, kleine aber nahe liegende Gegenstände vergrößert darzustellen; 2) solche, die entfernte Gegenstände vergrößern. Zu den ersten gehören alle Arten Mikroskope, von denen wir hier jedoch nur die einfachen, oder sogenannten Lupen zu betrachten brauchen, da sie allein bei Meßinstrumenten vorkommen und dazu dienen, feine Theilungen sicherer und bequemer abzulesen.

§. 86. Die Lupe ist eine convexe Glaslinse von kurzer Brennweite. Wird der Gegenstand, welchen man durch die Lupe vergrößert sehen will, in eine solche Entfernung a vom Glase gebracht, daß a kleiner ist als die Brennweite F der Linse, so wird die Entfernung f des Bildes nach der Formel:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

berechnet; sie liefert $\frac{1}{f}$, also auch f negativ; das Bild entsteht daher vor dem Glase. Man wird also, um unter den einzelnen Buchstaben nur absolute Werthe zu verstehen, setzen müssen:

$$1) \quad -\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

oder:

$$2) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{F} + \frac{1}{f},$$

d. h.

$$3) \quad a = \frac{fF}{F + f}.$$

Damit aber das vergrößerte Bild deutlich wahrgenommen werde, muß es sich in einer bestimmten Entfernung vom Auge befinden, welche man die Weite des deutlichen Sehens nennt; sie beträgt beim normalen Auge etwa 8 Zoll,

bei einem weitsichtigen etwas mehr, bei einem kurzsichtigen etwas weniger. Befindet sich beim Beobachten das Auge dicht hinter der Linse, und darf die Dicke der Linse als verschwindend klein angenommen werden, so muß der absolute Werth von f etwa 8 Zoll betragen.

Heißt b die Größe (der Durchmesser) des Gegenstandes, β die des Bildes, so ist:

$$\frac{\beta}{b} = \frac{f}{a} = \frac{F + f}{F} = 1 + \frac{f}{F}.$$

Befindet sich also das Auge im optischen Mittelpunkte der Lupe, so beträgt die Vergrößerung eins mehr als der Quotient aus der Weite des deutlichen Sehens durch die Brennweite dividirt.

Befindet sich (Fig. 92) das Auge in der Brennweite F hinter dem Glase, und ist W. AOB = φ, W. AFO = ψ, so ist:

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{\beta}{f} \text{ und tg } \psi = \frac{\beta}{F + f}.$$

Da aber die Winkel φ und ψ sehr klein sind, so verhalten sie sich wie ihre Tangenten, also:

$$\varphi : \psi = F + f : f = 1 + \frac{f}{F} : \frac{f}{F}.$$

Demnach ist die Vergrößerung für ein Auge in der Brennweite hinter dem Glase $= \frac{f}{F}$, d. h. gleich dem Quotienten aus der Weite des deutlichen Sehens dividirt durch die Brennweite. So z. B. vergrößert eine Linse von ½ Zoll Brennweite in der ersten Lage des Auges $1 + \frac{8}{1/2} = 17$, in der zweiten $\frac{8}{1/2} = 16$ Mal. Die Brennweite einer convexen Linse findet man aber leicht dadurch, daß man das Bild eines weit entfernten Gegenstandes hinter derselben aufsucht, und da, wo dieses am deutlichsten erscheint, seine Entfernung vom Glase mißt. Um die Kugelabweichung zu heben, setzt man die Lupen auch wol aus zwei planconvexen Linsen, die sich mit ihren ebenen Flächen berühren, zusammen; zwischen beiden Linsen wird eine Blendung angebracht, welche die Randstrahlen zurückhält.

Die Lupen, welche zum Ablesen von Theilungen bestimmt sind, bedürfen keiner starken Vergrößerung, auch keines großen Gesichtsfeldes; dagegen sollen sie, außer der Vergrößerung des Bildes, auch noch bewirken, daß das Auge in einer zur Ebene der Theilung senkrechten Geraden zu sehen gezwungen werde; man faßt sie daher in ein kleines Rohr, in welchem zwei Blendungen angebracht sind. Dadurch wird die sogenannte Parallaxe verhindert, d. h. das Sehen des Objects in einer falschen Lage, wie dies eine schiefe Sehlinie nothwendig mit sich bringen müßte. Man bringt die Linse am einen Ende der Röhre an, und beide Blendungen nach derselben Seite der Linse, so daß

das Auge seinen Platz vor der zweiten Blendung a (Fig. 93) erhält, welche ungefähr um die Brennweite von der Linse absteht. Das Rohr, dessen Aeußeres Fig. 94 zeigt, wird an einem Arm befestigt, der zuweilen ein Gelenk bekommt und mit dem andern Ende an dem Instrumente, an welchem eine Theilung mittels der Lupe abgelesen werden soll, befestigt ist. Die Lupe kann dann über jeden beliebigen Theil der Theilung fortbewegt werden.

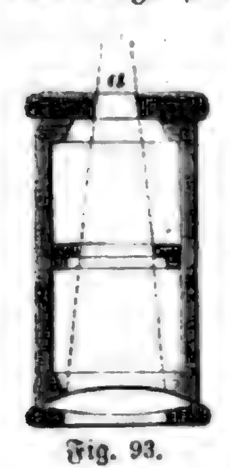


Fig. 93.

Fig. 94.

§. 87. Zu den Mitteln der Vergrößerung entfernter Gegenstände gehören die Fernröhre. Wiewol es verschiedene Arten dieser Instrumente gibt, bedient man sich in der Geodäsie lediglich des astronomischen Fernrohrs, weshalb denn hier auch nur von diesem die Rede sein wird.

Das astronomische Fernrohr besteht, in seiner einfachsten Gestalt, aus einer convexen Linse, welche dem Gegenstande, und einer ebenfalls convexen Linse, welche dem Auge des Beobachters zugekehrt ist. Jene heißt das Objectiv, diese das Ocular. Jede dieser Linsen ist in Messing gefaßt und die Fassung in ein zur Vermeidung störender Reflexionen inwendig geschwärztes Rohr eingeschraubt; das kleinere, das Ocular enthaltende Rohr wird in das andere, größere Rohr eingeschoben und kann in diesem mit einiger Reibung entweder aus freier Hand oder mittels Trieb und Triebstange (d. h. eines gezahnten Rades und einer ebenfalls gezahnten Stange) ein- und ausgeschoben werden, so daß das Ocular dem Objectiv entweder mehr genähert oder weiter davon entfernt wird; die Lage beider Röhren muß aber eine solche sein, welche die Achsen beider in ein und dieselbe gerade Linie bringt; sind dann noch die Gläser richtig centrirt und in die richtige Lage im Rohre gebracht, so fallen auch die Achsen beider Gläser in dieselbe Gerade, welche zugleich die Rohrachse ist.

§. 88. Es stelle L L′ (Fig. 95) ein entferntes Object vor, A B das Objectiv, C D das Ocular des Fernrohrs, XO die gemeinsame Achse beider Gläser, F den Brennpunkt des Objectivs, F_1 den des Oculars, so wird im Brennpunkte F des Objectivs ein verkleinertes und umgekehrtes Bild $L_1 L_1'$ von A B entstehen; gibt man dann dem Ocular eine solche Lage, daß das erste Bild $L_1 L_1'$

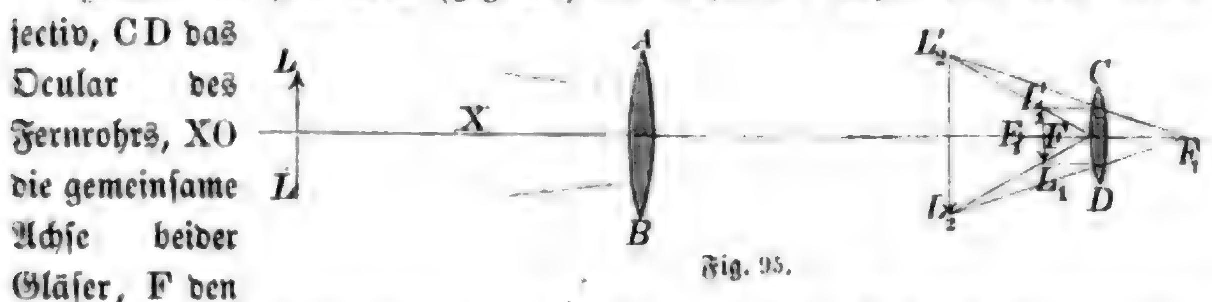


Fig. 95.

noch innerhalb dessen vorderer Brennweite OF_1' zu liegen kommt, so wirkt das Ocular wie eine Lupe und gibt ein vergrößertes, ebenfalls umgekehrtes zweites Bild $L_2 L_2'$ weiter vor dem Glase, das durch gehörige Stellung des Oculars in die Weite des deutlichen Sehens gebracht werden kann. Da der Brennpunkt des Oculars ganz nahe am ersten Bilde sein muß, so ist die Länge des Rohrs fast genau gleich der Summe der Brennweiten beider Gläser. Rückt aber der Gegenstand LL' näher, so entfernt sich das erste Bild vom Objectiv und nähert sich dem Ocular; damit es aber die zum deutlichen Sehen erforderliche Lage zum Ocular wieder bekomme, muß man daher für nähere Gegenstände das Ocular etwas herausziehen, während ein Entfernen des Gegenstandes die entgegengesetzte Bewegung des Oculars nöthig machen würde; es folgt dies alles sehr leicht aus §. 77 (11); denn für entferntere Gegenstände wird a größer, $\frac{1}{a}$ kleiner, also $\frac{1}{F} - \frac{1}{a}$ oder $\frac{1}{f}$ größer, d. h. f kleiner, das durch das Objectiv erzeugte Bild nähert sich dem Objectiv; da nun des Oculars Brennpunkt noch über das erste Bild hinausreichen muß, so wird das Ocular weiter hineingeschoben werden müssen.

Um zu finden, wie der Kurz- und Weitsichtige das Ocular zu stellen haben, um denselben Gegenstand durch das Fernrohr ebenso deutlich zu sehen wie einer mit normalem Auge, überlege man, daß, weil der Gegenstand in derselben Entfernung bleibt, hier lediglich die auf das Ocular bezüglichen Größen a, F und f in Betracht kommen, nicht die zum Objectiv gehörigen; man wird sich also hier der Formel §. 86 (2) zu bedienen haben. Das dortige a soll die Sehweite werden; für den Kurzsichtigen ist also a kleiner als für das normale Auge, also $\frac{1}{a}$ größer. Da F (die Brennweite der Ocularlinse) unverändert dieselbe bleibt, so muß $\frac{1}{f}$ größer, also f kleiner werden, d. h. das durch das Objectiv erzeugte erste Bild muß näher an die Ocularlinse heranrücken, das Ocular muß für den Kurzsichtigen weiter hineingeschoben werden. Umgekehrt verhält es sich beim weitsichtigen Auge.

§. 89. Um die Vergrößerung beim astronomischen Fernrohr zu finden, sei LL (Fig. 96) das Objectiv, L'L' das Ocular, A'B' das durch das Objectiv erzeugte erste Bild, also C' der Brennpunkt des Objectivs, der zugleich auch für den des Oculars angenommen werden kann, so daß $MC' = F$,

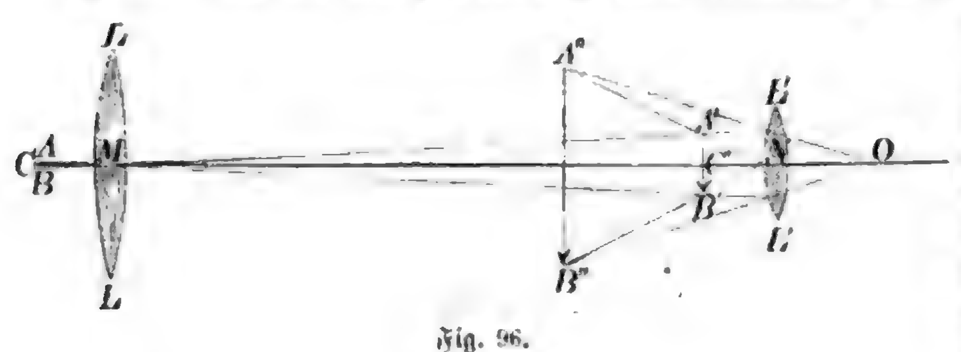


Fig. 96.

$NC' = F'$; $A''B''$ sei endlich das zweite, durch das Ocular erzeugte Bild. Ferner sei AMB der Winkel, unter welchem das Object, $A''NB''$ derjenige, unter welchem das letzte Bild gesehen wird, wobei freilich vorausgesetzt worden, daß ersteres von M aus, letzteres von N aus gesehen werde, während, streng genommen, beide von demselben Punkte O aus betrachtet werden müssen, wo sich das Auge bei der Beobachtung mittels des Fernrohrs befindet. Da aber die Entfernung des Objects vom Beobachter die Dimensionen des Fernrohrs weit übertrifft und sozusagen außer allem Verhältniß zu diesem steht, so wird diese Abweichung von der strengen Richtigkeit auf die scheinbare Größe des gesehenen Gegenstandes keinen merklichen Einfluß haben. Die Vergrößerungszahl des Fernrohrs ist also der Quotient der genannten Winkel, nämlich

$$= \frac{A''NB''}{AMB} = \frac{A''NC''}{A'MC'}.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{tg} A''NC'' = \frac{A''C''}{NC''} = \frac{A'C'}{NC'} = \frac{A'C'}{F'},$$

$$\operatorname{tg} AMC' = \frac{A'C'}{MC'} = \frac{A'C'}{F}.$$

Nun sind aber die Winkel, unter denen Gegenstand und Bild erscheinen, so klein, daß sie sich zu einander nahe genau wie ihre Tangenten verhalten, also:

$$\frac{A''NC''}{A'MC'} = \frac{A'C'}{F'} : \frac{A'C'}{F} = \frac{F}{F'}.$$

Die Vergrößerung des astronomischen Fernrohrs wird also gefunden, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die des Oculars dividirt.

Ein praktisches Verfahren zur Bestimmung der Vergrößerung des Fernrohrs, wenn man die Brennweiten der Linsen nicht kennt, besteht darin, daß man eine in gleiche Theile getheilte Fläche a b c d (Fig. 97) mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem andern frei ansieht und abzählt, wie viel Theile der mit unbewaffnetem Auge gesehenen Theilung auf einen Theil der andern gehen. Ist b f g c die durch das Instrument gesehene Theilung und fällt der Theilstrich d c in eine Richtung mit c g, so zähle man in beiden die Anzahl Theile von b bis c, was in dem Falle unserer Figur 12 und 4 gibt; der Quotient $\frac{12}{4} = 3$ ist dann die Vergrößerungszahl. Man kann hierzu sehr wohl die Ziegel eines Daches, oder die Steine eines Mauerwerks benutzen, muß sich aber im gesonderten Sehen mit beiden Augen etwas üben.

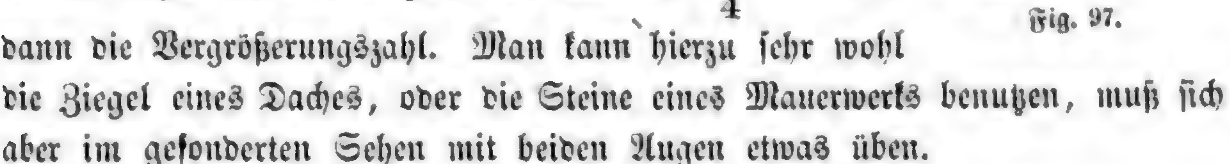


Fig. 97.

§. 90. Was die weitere Construction dieses Fernrohrs anlangt, so ist das Objectiv, wie sich nun von selbst versteht, achromatisch. Heißt dann

f' die Brennweite des convexen Crownglases, f'' die des concaven Flintglases, so bestimmt sich die Brennweite f der Doppellinse durch die Gleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''},$$

während f' und f'' durch die Gleichungen

$$(n'-1)\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{\rho'}\right) = \frac{1}{f'}$$

$$(n''-1)\left(\frac{1}{r''} + \frac{1}{\rho''}\right) = \frac{1}{f''}$$

gefunden werden, wo n', r', ρ', f' in ihren bisherigen Bedeutungen auf das Crownglas, n'', r'', ρ'', f'' ebenso auf das Flintglas zu beziehen sind, und der Radius einer concaven Fläche negativ in Rechnung zu bringen ist. Als Brechungsexponenten ist beim Crownglas 1,5, beim Flintglas, je nach seiner Zusammensetzung, 1,664 — 1,873 zu setzen.

§. 91. Wir haben bisher beim astronomischen Fernrohr nur ein einfaches Ocular vorausgesetzt. Es würde jedoch ein solches Instrument mit einfachem Ocular wieder an der Kugel- und Farbenabweichung leiden, wenn auch das Objectiv achromatisch wäre. Diesem Uebelstande kommt man durch Einschaltung einer zweiten, planconvexen Linse zuvor, welche ihre Stelle zwischen dem Objectiv und Ocular erhält. Sie heißt die Collectivlinse; die Verbindung einer solchen Collectivlinse mit dem Ocular heißt ein Doppelocular.

Es gibt mehrere Combinationen zu Doppelocularen, und zwar bekommt die Collectivlinse eine solche Lage, daß das letzte Bild entweder zwischen beide Oculare, oder zwischen das Objectiv und das Collectiv zu stehen kommt. Es wird für unsern Zweck genügen, eine dieser Combinationen näher zu untersuchen; die letzte eignet sich zu Fernröhren, welche zu Messungen benutzt werden sollen mehr als die andere, weil das erste Bild seine Lage durch Verschiebung der Ocularröhre nicht verändert, daher die Fäden des Fadenkreuzes eine feste Lage bekommen können. Wir wählen also diese Art des Doppeloculars zur nähern Erläuterung.

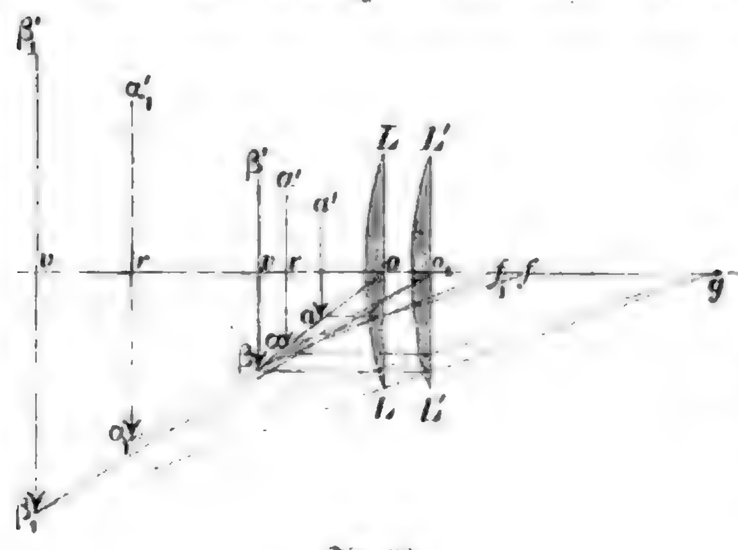


Fig. 98.

Es sei aa' (Fig. 98) das durch das Objectiv hervorgerufene erste Bild; da das Objectiv achromatisch vorausgesetzt wird, so wird dieses Bild farblos sein. Hinter diesem Bilde, also nach der Seite des Oculars hin, wird ein Glas L L ein-

geschaltet, das vorn convex, hinten plan ist; f sei die hintere Brennweite dieses Glases. Dadurch entsteht ein etwas größeres und weiter nach vorn liegendes Bild $\alpha\alpha'$. Da aber L L ein einfaches Glas ist, so wird es für die verschiedenen Farben verschiedene Brennpunkte haben, z. B. f für das Roth, f' für das Violett; folglich entsteht auch für jede Farbe ein anderes Bild, ein rothes $\alpha\alpha'$, ein violettes $\beta\beta'$, und die der andern Farben zwischen beiden. Ein Auge hinter der Linse L L würde nun statt des ersten Bildes a a' diese verschiedenfarbigen Bilder $\alpha\alpha' \ldots\ldots \beta\beta'$ sehen. Es kommt also nun darauf an, diesen Bildern solche Lagen zu geben, daß sie, durch ein zweites Ocular L' L' betrachtet, farblos erscheinen. Wenn es gelänge, das zweite Ocular so anzubringen, daß das Auge in den Punkt der Achse zu stehen käme, von dem aus die Ränder aller dieser Bilder in derselben geraden Linie (oder in einer Kegelfläche) gesehen würden, so müßten sich alle Farben gegenseitig decken und den Eindruck eines farblosen Bildes hervorrufen. Durch die tiefere analytische Untersuchung des Gegenstandes ist man in der That dahin gelangt, solche Verhältnisse zwischen den Entfernungen der Linsen und ihren Brennweiten aufzufinden, welche der gestellten Forderung fast vollkommen, wenigstens in einem für die Praxis ausreichenden Grade genügen, indem sie das letzte Bild so frei von Farben und von der Kugelabweichung machen, als es für die Anwendung nur gewünscht werden kann. *)

§. 92. Es seien L, L_1, L_2 (Fig. 99) die drei Linsen eines astronomischen Fernrohrs mit Doppelocular, nämlich L das achromatische Objectiv, L_1

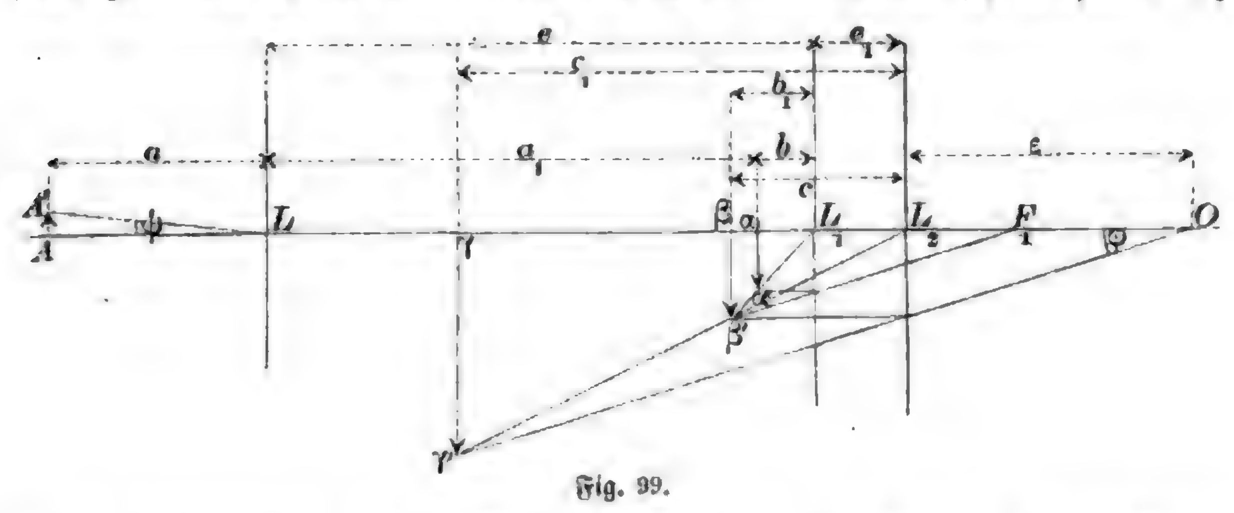


Fig. 99.

das Collectivglas oder erste Ocular, L_2 das zweite Ocular, A das Object, α das erste Bild, β das zweite, γ das dritte oder letzte Bild, h, h_1, h_2, h_3 beziehlich die Größen des Objects und der drei Bilder; ferner sei:

*) Wer die mathematische Theorie dieser Doppeloculare zu studiren wünscht, dem empfehlen wir: Baumgartner's „Naturlehre" (Wien 1831), Supplementband, S. 602. — Auch Klügel's „Analytische Dioptrik" (Leipzig 1778), S. 182; indessen wird hier nur die erste Art der Doppeloculare behandelt.

$AL = a,\quad \alpha L_1 = b,\quad \beta L_2 = c\quad LL_1 = e,$
$L\alpha = a_1,\quad L_1\beta = b_1,\quad L_2\gamma = c_1\quad L_1L_2 = e_1,$
$L_2O = \varepsilon$ f die Brennweite von L,
$\psi = ALA_1$, f_1 die Brennweite von L_1,
$\varphi = \gamma O\gamma'$, f_2 die Brennweite von L_2.

Für die Lagen der Bilder dienen dann die Gleichungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{e - a_1} + \frac{1}{b_1}.$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_1} = \frac{1}{e_1 - b_1} + \frac{1}{c_1}.$$

Für die Vergrößerung hat man:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a}{a_1}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{e - a_1}{b_1}$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{c}{c_1}$$

$$\frac{h}{h_3} = \frac{a(e - a_1)c}{a_1 b_1 c_1}.$$

$$h_3 = \frac{a_1 b_1 c_1}{ac(e - a_1)} \cdot h.$$

Die Vergrößerungszahl m ist gleich $\frac{\varphi}{\psi}$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h_3}{c_1 + \varepsilon}; \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{h}{a}.$$

Weil aber φ und ψ nur kleine Winkel sind, so ist sehr nahe:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\varphi}{\psi} \text{ und } m = \frac{a h_3}{h(c_1 + \varepsilon)};$$

und setzt man für h_3 seinen Werth:

$$m = \frac{a_1 b_1 c_1}{c(e - a_1)(c_1 + \varepsilon)}.$$

Hier ist O, in der Entfernung ε von L_2, als Ort des Auges angenommen; bringt man aber das Auge dicht hinter L_2, so ist $\varepsilon = 0$ und $\frac{c_1}{c_1 + \varepsilon} = 1$, also:

$$m = \frac{a_1 b_1}{c(e - a_1)}.$$

Nun ist $a_1 = f$, $e - a_1 = e - f$, $c = f_2$, $b_1 = e_1 - f_2$, also:

$$m = \frac{e_1 - f_2}{e - f} \cdot \frac{f}{f_2}.$$

Der letzte Factor dieses Ausdrucks war die Vergrößerung eines Fernrohrs mit nur einem Ocular. In der Wirklichkeit ist gewöhnlich $e_1 = 2 f_2$ und $f_1 = 3 f_2$; dann reducirt sich die Formel auf:

$$m = \frac{f}{e - f}.$$

Es versteht sich von selbst, daß man auch bei diesem Fernrohr die Vergrößerung durch einen Versuch finden kann, ganz wie bei dem mit einfachem Ocular.

Zu gleichem Zwecke, wie bei der Lupe, müssen natürlich auch beim Fernrohr Blendungen angebracht werden; am besten bekommen sie ihre Stelle am Orte des wirklichen Bildes, und die Oeffnung erhält einen Durchmesser gleich der Größe des wirklichen Bildes. Eine kleinere Oeffnung würde das Gesichtsfeld verkleinern, eine größere unrichtig gebrochene Randstrahlen durchlassen und weiter keinen Nutzen bringen.

§. 93. Soll ein astronomisches Fernrohr zu Messungen dienen, so muß sich ein bestimmter Punkt im Gesichtsfelde fixiren lassen; am geeignetsten hierzu ist der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes, weil er zugleich in der Achse des Rohrs liegt. Dadurch wird die optische Achse des Fernrohrs zur Visirlinie. Gascoigne führte zu diesem Zwecke im Jahre 1640 das sogenannte Fadenkreuz ein; Troughton nahm Spinnefäden, Wollaston feine Platinadrähte. Erstere haben eine Dicke von $\frac{1}{8000}$ Linie, letztere von $\frac{1}{1500}$ Linie, sind aber beim Einziehen leichter zu behandeln als Spinnefäden. Bei etwas starken Vergrößerungen erscheinen die Platinadrähte zu dick. Sorgfältig ausgesuchte und mit der Lupe auf ihre gleichmäßige Dicke geprüfte Coconfäden thun hierbei auch sehr gute Dienste.

Das Fadenkreuz besteht aus einem Ring mit einem in der Mitte durchbohrten Messingplättchen p p' (Fig. 100). Die Oeffnung in der Mitte hat die Größe einer Blendungsöffnung. Auf der Fläche des Plättchens p p' sind zwei senkrecht sich durchkreuzende gerade Linien eingerissen, in welche man die Fäden einlegt und mit Wachs, Schellack oder dergleichen befestigt; a a', b b' stellen diese Fäden vor. Der Ring a b a' b' befindet sich in der Mitte oder Achse eines andern Ringes c d e f, welcher sich mit einiger Reibung in die Objectiv- oder Ocularröhre des Fernrohrs einschieben läßt, während a b a' b' durch die vier Schräubchen m, m', n, n' in letzterm festgehalten und nöthigenfalls auch darin so verschoben werden kann, daß die Achse von a b a' b' mit der Achse des Rohrs in eine gerade Linie zusammenfällt. Der äußerste Ring der Figur stellt die Objectiv- oder Ocularröhre vor, je nachdem der ganze Apparat in jene oder in diese eingeführt wird. Die

Fig. 100.

Schräubchen gehen dann durch diese Röhre durch und schrauben sich in den äußern Ring des Fadenkreuzes. Fig. 101 stellt einen Durchschnitt des im Rohre befindlichen Fadenkreuzes vor; man sieht hier, daß der innere Ring pp′ nach vorn, der äußere cc nach hinten zu einen Wulst hat; gegen jenen legen sich die vier Schräubchen, gegen diesen der Ring pp′ an.

Fig. 101.

Eine andere Einrichtung des Fadenkreuzes stellen die Fig. 102 bis 105 vor. Fig. 102 und 103 in zwei auf einander senkrechten Längendurchschnitten, 104 und 105 von vorn, erstere jedoch so, daß die verschiedenen hinter einander folgenden Theile verschoben sind, letztere zeigt diese Theile in ihrer ordentlichen Lage. Der in die Ocularröhre acbd eingeführte Apparat ist selbst ein kurzes Röhrchen mit vier Einschnitten wie m, m, damit es etwas federe und in der Ocularröhre sich nur mit starker Reibung verschieben lasse. Das dem Objectivglas zugekehrte Ende des Röhrchens $\alpha\beta\gamma\delta$ ist mit einer aufgelötheten Platte gedeckt, die in der Mitte kreisförmig durchbohrt ist; ich habe ein solches Fadenkreuz aus einem englischen Rohre vor mir, das bei 22,5 Millimeter Durchmesser des Röhrchens eine Durchbohrung von 13 Millimeter Durchmesser hat. Seitwärts von dieser Durchbohrung sind zwei segmentförmige Messingplättchen xx, yy (Fig. 104) auf die erst erwähnte Platte geschraubt, deren geradlinige Ränder parallel sind und durch ihre Abschrägungen einen Falz bilden, der zur Aufnahme eines Schlittens ef bestimmt ist; der Schlitten ef hat wieder eine Durchbohrung von 12 Millimeter Durchmesser, und trägt neben der Durchbohrung wieder zwei segmentförmige Aufsätze, deren abgeschrägte Ränder wieder einen Falz bilden, welcher einen zweiten Schlitten gh auf-

Fig. 102.

Fig. 103.

Digitized by Google

nimmt; dieser hat eine Durchbohrung von 7 Millimeter Durchmesser, über welche die Fäden gespannt sind. Durch die Schräubchen pp wird der erste Schlitten in seiner Bahn bewegt, durch qq der letzte. Man löst dabei dasjenige Schräubchen, nach dessen Richtung hin der Schlitten bewegt werden soll und zieht das gegenüberstehende an. Dadurch ist es möglich, den Kreuzungspunkt der Fäden nach und nach genau in die Achse des Rohrs zu bringen. Um die Verschiebung des Fadenkreuzes nach der Richtung der Fernrohrachse zu ermöglichen, sind die Löcher der Ocularröhre, durch welche die den großen Schlitten leitenden Schrauben gehen, erweitert; die Schrauben finden also bei diesem Durchgange keine Befestigung, ja nicht einmal eine Führung durch die Ränder der Löcher, und schrauben sich deswegen in entsprechende Löcher auf der Kante des größern Schlittens ein, drücken dann aber auf eine unter ihre Köpfe gelegte Platte und können so befestigt werden, während das andere Schraubenpaar nur stumpf auf der Kante des kleinern Schlittens aufsteht, dagegen in einem Gewinde durch die Ocularröhre geht. Das erste Schraubenpaar, und damit der ganze Apparat mit den Kreuzfäden, läßt sich also nach der Länge der Röhre verschieben, dagegen das zweite Schraubenpaar seine Stelle beibehalten muß, während es die Kante des kleinern Schlittens, je nach Bedürfniß, an verschiedenen Stellen treffen kann.

Fig. 104.

Fig. 105.

Die eben beschriebene Einrichtung findet man besonders an englischen Instrumenten. An deutschen Fernröhren herrscht folgende einfachere vor. In der Ocularröhre, zwischen der ersten und zweiten Ocularlinse, befindet sich ein Messingkörper ab (Fig. 106) von der Weite des innern Durchmessers der Ocularröhre und 6 Millimeter Dicke; in der Mitte hat er die Aushöhlung cd, welche ganz durch ihn hindurchgeht; mit der Rückseite liegt dieser Körper auf der Collectivlinse auf. In die Höhlung cd kommt der Körper ef (Fig. 107) oder g (Fig. 108) zu liegen; ef ist nämlich eine Messingplatte, etwas kleiner im Durchmesser als ab, und in der Mitte mit einer

Fig. 106.

Durchbohrung von 5 Millimeter Durchmesser, dazu bestimmt, die Kreuzfäden aufzunehmen. Diese Platte bildet aber mit dem etwas dünnern Messingkörper g ein Stück; die Durchbohrung geht durch das Ganze durch und dieser dünne Theil (bei g) hat die Form der Höhlung c d, ist aber nach allen Dimensionen etwas kleiner. Durch das Ocularrohr und den Körper a b gehen vier Schräubchen x, x′, y, y′ (Fig. 109), mittels deren der innere Körper g und damit die Kreuzfäden verschoben werden können, um ihren Kreuzungspunkt in die Achse des Rohrs zu bringen. Man löst zu diesem Zweck erst ein Schräubchen, z. B. x, und schraubt x′ nach, wenn das Centrum nach der Seite von x hinrücken soll; dann löst man ebenso y (oder y′) und schraubt y′ (oder y) nach. Um endlich die Ebene des Fadenkreuzes mit der Ebene, in welcher das letzte Bild im Fernrohr erscheint, zusammenzubringen, hat die Ocularröhre an den Stellen, wo die Schräubchen x, x′ durchgehen, nach der Länge des Rohrs gerichtete Einschnitte, in denen die Schrauben, und damit der Körper g, also auch die Kreuzfäden selbst verschoben werden können; x, x′ greifen in ein Gewinde des Körpers g; y, y′ sitzen aber nur stumpf auf dem Körper g auf.

Fig. 107.

Fig. 108.

Fig. 109.

Daß aber die Ebene des Fadenkreuzes genau in die Bildebene zu liegen komme ist deshalb nöthig, weil, bei etwas schiefem Durchsehen sonst Parallaxe entsteht, welche die ausgeführte Einstellung des Instruments auf einen bestimmten Punkt unsicher macht, also unfehlbar zu einer Fehlerquelle werden muß. Ueberdies können Faden und Object nur bei dieser Stellung des erstern mit gleicher Deutlichkeit gesehen werden.

§. 94. Jedes Fernrohr muß, wie jedes andere Meßinstrument, ehe man es zu messenden Versuchen gebraucht, sorgfältig geprüft und nöthigenfalls berichtigt werden, weil sonst die damit ausgeführten Messungen kein zuverlässiges Resultat geben.

1. Prüfung des Fernrohrs auf die Deutlichkeit, Helligkeit und Farblosigkeit der Bilder. Wenn das Fernrohr stark vergrößert, so richte man es an einem heitern, mondfreien Abend auf einen Fixstern; bei guter Beschaffenheit des Instruments wird sich derselbe als bloßer Lichtpunkt, ohne die mit bloßen Augen sichtbare Radiation zeigen. Doppelsterne mit genau bekannter Winkelentfernung, wie deren in allen Sternverzeichnissen zu finden

Digitized by Google

sind *), liefern auch gute Objecte zur Prüfung eines Fernrohrs, weil sie sich bei guter Beschaffenheit des Instruments in zwei deutlich geschiedene Sterne auflösen. Schwächere Fernröhre, wie die in der Meßkunde meist gebräuchlichen, prüft man dadurch, daß man eine dünne, scharf begrenzte Linie durch dasselbe betrachtet, entweder eine schwarze Linie auf weißem Grunde, oder eine weiße Linie auf schwarzem Grunde. Auch feine, aber scharfe Druckschrift (z. B. die Strafandrohung auf den preußischen Kassenanweisungen) kann zu demselben Zwecke dienen. Die Linie oder Schrift muß in allen Theilen mit gleicher Schärfe gesehen werden, darf nirgends matt oder mit farbigen Rändern erscheinen; eine schwache bläuliche Färbung jedoch geben selbst die Fraunhofer'schen Instrumente, weil, um die grellern Farben ganz wegzuschaffen, die dunklern gar nicht berücksichtigt sind. Bei dem Versuche muß jedoch das Object gut beleuchtet sein; im Freien kehrt man die gesehene Fläche der Lichtseite zu; im Zimmer wendet man künstliche Beleuchtung an. Die Schärfe der Umrisse wird zwar immer von der Mitte des Gesichtsfeldes nach dem Rande hin etwas abnehmen; diese Abnahme darf aber bei einem guten Rohr nur sehr allmählich und muß vom Centrum aus nach allen Richtungen gleichmäßig sein. Bei einem Fernrohre, wo dies nicht der Fall wäre, müßte man noch mehr der äußersten Strahlen abblenden.

2. Prüfung des Fernrohrs auf die Centricität des Objectivs. Ist das Objectiv nicht richtig centrirt, so bildet die Achse der Linse mit der Achse des Rohrs einen Winkel; dreht man daher das Rohr um seine mathematische Achse, d. h. um die Cylinderachse, so beschreibt die optische Achse, d. h. die Achse des Objectivs eine Kegelfläche; die Richtung der Visirlinie wird also während der Drehung in jedem Augenblicke eine andere sein. Die Prüfung geschieht einfach dadurch, daß man das Rohr in zwei gabelförmige Lager legt, wie Fig. 110 eins darstellt, zur Verschiebung nach der Höhe eingerichtet, dann das Bild eines entfernten Punktes ins Auge faßt, das Rohr behutsam dreht, so daß es keine seitliche Bewegung erfährt, und zusieht, ob das Bild des Punktes sich bewegt oder nicht; im ersten Falle ist das Objectiv unrichtig centrirt, im letzten dagegen entspricht es den Anforderungen. Ist nämlich LL (Fig. 111) das richtig centrirte Objectiv, P ein leuchtender

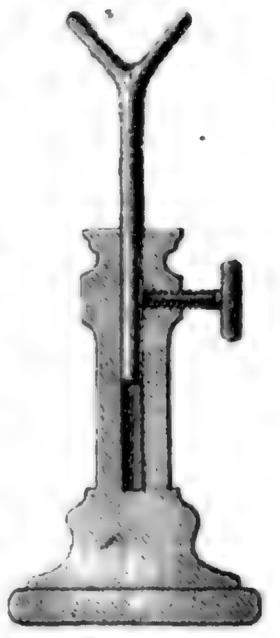


Fig. 110.

*) Castor oder α der Zwillinge ist ein Doppelstern mit 5″ Entfernung der beiden Sterne. Mizar, ζ im großen Bären, Entfernung 14″. — Mesarthim, oder γ im Widder, Entfernung 10″. — Wega, oder α der Leier, Entfernung 42″ u. m. a.

Punkt außerhalb der Achse, O ein ebenso weit vom Glase abstehender Punkt in der Achse, p das Bild des erstern, o das Bild des letztern, und man

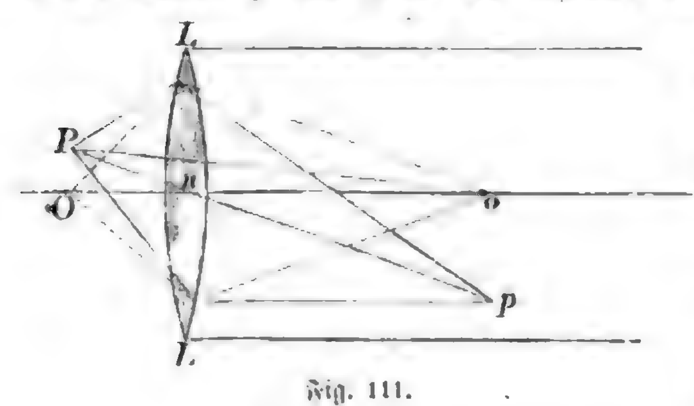


Fig. 111.

denkt sich nun das Rohr um seine Achse Oo gedreht, so gehen die Hauptstrahlen auch während der Drehung fortwährend durch den nämlichen Punkt n der Achse, weil dieser zugleich optischer Mittelpunkt des Glases ist. Folglich kann sich die Lage des Bildes während der Drehung nicht verändern.

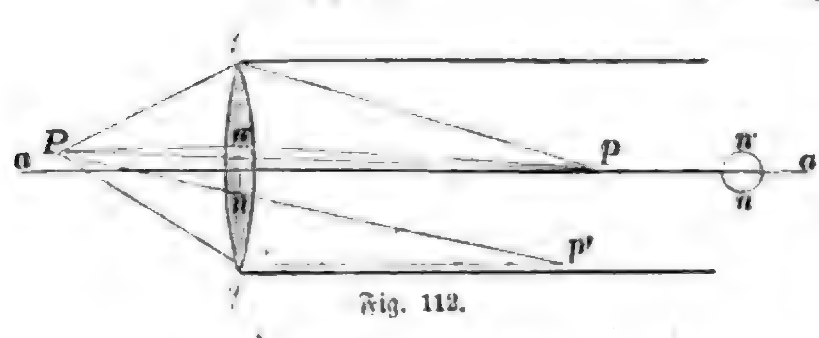


Fig. 112.

Wäre aber in Fig. 112 aa die Achse des Rohrs, n der optische Mittelpunkt von LL, so würde dieser nach einer halben Umdrehung nach n′ zu liegen kommen, also der Hauptstrahl Pn in die Lage Pn′ gelangen. Der Hauptstrahl Pn beschreibt also eine Kegelfläche, und da das Bild p stets im Hauptstrahle liegen muß, so wird dieses einen Kreis vom Durchmesser pp′ beschreiben.

3. Prüfung des Fadenkreuzes.

a. Seine Coincidenz mit der Bildebene. Man richte das Fernrohr auf einen Gegenstand und merke sich genau den Punkt, der vom Kreuzpunkte gedeckt wird; dann bringe man das Auge beim Durchsehen in verschiedene seitliche Lagen und beobachte, ob der Kreuzpunkt der Fäden immer noch denselben Punkt des Objects decke. Ist dies der Fall, so fällt die Ebene des Fadenkreuzes mit der Bildebene zusammen; im entgegengesetzten Falle liegt die Ebene des Fadenkreuzes vor oder hinter der Bildebene, und es muß die Stellung des Fadenkreuzes verbessert werden, was auf folgende Weise geschieht.

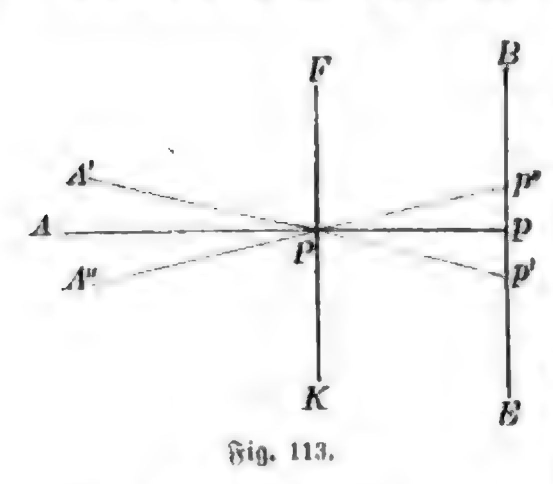


Fig. 113.

Es befinde sich das Fadenkreuz FK (Fig. 113) hinter der Bildebene BE, d. h. näher am Auge A, so wird der Kreuzpunkt P der Fäden den Punkt p der Bildebene decken, wenn P und das Auge A sich in der optischen Achse des Rohrs befinden. Rückt aber das Auge seitwärts nach A′, so deckt P den Punkt p′, und rückt das Auge nach A″, so deckt P den Punkt p″. Beim Durchsehen scheint nun aber nicht die Projection von P über die Bildebene weg, von p nach p′, oder nach p″ zu gehen; sondern die

Projection des Punktes P, d. h. der Punkt p scheint dem Beobachter festzustehen; ebenso scheinen p′ und p″ feststehende Punkte des Bildes zu sein; während das Auge von A nach A′ fortrückt, und die Projection des Kreuzpunktes P von p nach p′, scheint der Bildpunkt p′ die entgegengesetzte Bewegung von p′ nach p zu machen; und wenn das Auge von A nach A″ rückt, scheint der Bildpunkt p″ aus seiner Stelle p″ nach p fortzugehen. In beiden Fällen bewegt sich also ein Bildpunkt scheinbar in derselben Richtung wie das Auge, und man sagt dann: das Bild geht mit dem Auge.

Befindet sich das Fadenkreuz FK (Fig. 114) vor der Bildebene BE, d. h. näher nach dem gesehenen Gegenstande hin und weiter vom Auge A ab, so deckt der Kreuzpunkt P den Punkt p der Bildebene, in der Stellung A′ des Auges den Bildpunkt p′, und in der Stellung A″ des Auges den Bildpunkt p″. Während nun das Auge von A. nach A′ fortrückt, scheint, ebenso wie im ersten Falle, der Bildpunkt p′ die der Projection p entgegengesetzte Bewegung von p′ nach p zu haben; und wenn das Auge von A nach A″ fortrückt, so scheint der Bildpunkt p″ von p″ nach p zu gehen. Da diese Bewegungen denen des Auges entgegengesetzt sind, so bezeichnet man sie damit, daß man sagt: das Bild bewegt sich gegen das Auge.

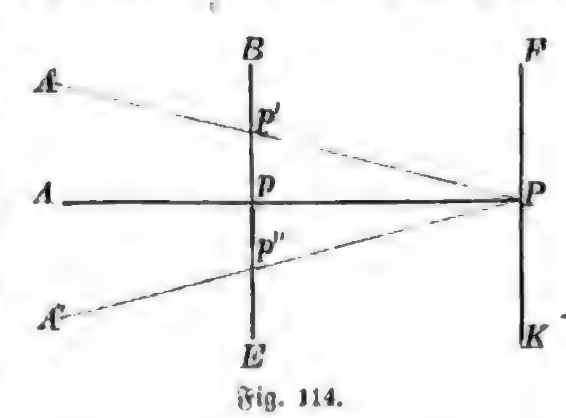


Fig. 114.

Hieraus ist leicht zu sehen, wie man die Parallaxe des Fadenkreuzes wegbringen könne. Bewegt sich nämlich das Bild mit dem Auge, so muß man das Fadenkreuz nach dem Objectiv, und bewegt sich das Bild gegen das Auge, so muß man das Fadenkreuz nach dem Ocular hin rücken.

b. Coincidenz des Kreuzpunktes mit der Achse. Man bringe das Fernrohr auf zwei gabelförmige Lager wie Fig. 110, welche sich nach der Höhe beliebig verstellen lassen; ist das Fernrohr Theil eines Meßinstruments, so muß man es davon trennen. In diesen Lagern drehe man es sanft um seine Achse, während man den Punkt beobachtet, welchen der Kreuzpunkt auf der Bildfläche deckt. Bleibt es stets derselbe Punkt, so ist das Fadenkreuz richtig centrirt. Beschreibt aber der Kreuzpunkt der Fäden auf der Bildfläche während der Drehung des Rohrs einen Kreis, so liegt der Kreuzpunkt nicht in der Achse, und die Visirlinie ist eine von der optischen Achse des Rohrs verschiedene Linie. Gesetzt, der Kreuzpunkt der Fäden befinde sich in g (Fig. 115) und decke einen gewissen Punkt der Bildfläche; bei der Drehung des Rohrs beschreibt der Punkt g, weil er eben nicht in der Achse x des Rohrs mnpq liegt, den kleinen Kreis ghg′k, während der von ihm gedeckt gewesene Bildpunkt seine Lage in g nicht ändert. Wenn das Rohr

die Hälfte einer Umdrehung gemacht hat, befindet sich g in g', und das Fadenkreuz abcd in a'b'c'd', so daß der Kreuzungspunkt g' um den Durchmesser gg' von seiner frühern Lage sich entfernt hat; der Durchmesser gg' des Kreises ghg'k ist aber gleich dem doppelten Abstande des Kreuzpunktes g von der optischen Achse x des Rohrs. Man wird also mittels der Correctionsschräubchen des Fadenkreuzes dieses allemal nur um die Hälfte des Durchmessers des vom Kreuzpunkte beschriebenen Kreises verschieben, und zwar in der Richtung kg' um die Größe $\frac{1}{2}$kg', und dann in der Richtung gk um die Größe $\frac{1}{2}$gk. Wie dabei zu verfahren, ist schon oben bemerkt worden.

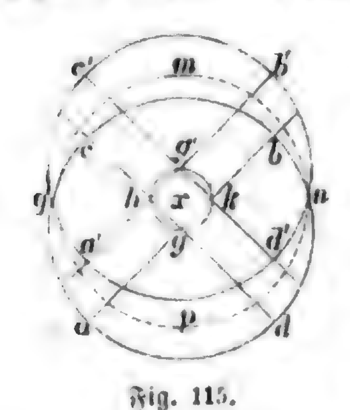


Fig. 115.

§. 95. Jedem Besitzer eines guten Fernrohrs wird wesentlich daran gelegen sein, dasselbe in dem fehlerfreien Zustande, in dem er es gekauft hat, zu erhalten, und, wenn je etwas daran beschädigt sein sollte, möglicherweise den Schaden selbst wieder gut zu machen, oder doch richtig zu beurtheilen, ob durchaus nur ein Mechanikus helfen kann. Man wird daher folgende Vorschriften für die Behandlung eines solchen Instruments nicht überflüssig finden.

Wenn man das Fernrohr vom Mechaniker erhält, ist es in einen Kasten verpackt, dessen Inneres so eingerichtet ist, daß das Rohr und alle Nebentheile, wie z. B. Oculare, deren meist zwei oder mehrere beigegeben werden, wenn sie nur die richtige, von dem Verfertiger beabsichtigte Lage erhalten haben, sich während des Transports nicht darin verrücken können. Nach dem vorsichtigen Oeffnen des Kastens betrachte man daher, ehe man auch nur ein Stück anrührt oder gar herausnimmt, genau die ganze Einrichtung des Behälters, merke sich wohl die Lage der Haupt- und Nebenapparate, bis man überzeugt ist, daß man in jedem Augenblicke wieder die Lage jedes einzelnen Theils anzugeben wisse, also auch, wenn die Apparate einmal herausgenommen sind, sie alle auch wieder genau in dieselbe Lage zu bringen verstehe. Dies ist durchaus nöthig, weil dies bei der einmal getroffenen Einrichtung die einzig mögliche Art einer sichern Verpackung sein wird, bei der das Instrument vor Schaden bewahrt bleibt. Dieselbe Bemerkung bleibt für alle in diesem Werke noch zu beschreibenden Apparate gültig und wird um so wichtiger, je mehr Nebentheile zu einem Instrumente gehören. Geht man dann, nach gehörig erworbener Bekanntschaft mit der Lage aller Theile, ans Herausnehmen, so thue man dies nur langsam und bedächtig und versuche gleich wieder, jedem Stück den ihm zukommenden Platz anzuweisen. Unrichtige Lagen veranlassen nachtheilige Spannungen in den Instrumenten und verderben diese, wie auch den Deckel des Kastens.

Durch längern Gebrauch werden die Linsen staubig und trübe. Um dies

soviel wie möglich zu verhindern, schließe man das Fernrohr nach jedesmaligem Gebrauche sogleich wieder in seinen Kasten, schiebe auch während einer Unterbrechung im Beobachten den Deckel über das Objectiv; im Freien sollte dies auch selbst bei jeder kürzern Unterbrechung geschehen, weil sich sonst zu viel Staub auf die Linse absetzt; aber auch im Zimmer ist dieselbe Vorsicht anzurathen. Es schützt dies das Objectiv außerdem gegen zufällige Berührungen mit bloßen Fingern oder harten Körpern, was beides stets sorgfältig vermieden werden muß.

Bemerkt man, daß die Gläser trüber werden, als sie sonst zu sein pflegten, so muß man die darauf angehäuften Unreinigkeiten fortschaffen, was auf folgende Weise geschieht. Zuerst nehme man die Ocularröhre heraus und schraube eins der Gläser los. Hierbei muß man wohl auf die Lage der Theile achten, um sie nachher nicht unrichtig zu verbinden; es ist dies zwar gewöhnlich nur in einer Art möglich, aber der Ungeübte könnte doch unter Umständen dabei verunglücken; nach einigen Wiederholungen erlangt man Uebung. Setzt man bei diesem Auseinandernehmen ein Ocular auf den Tisch, so achte man darauf, daß die Linse nie den Tisch oder einen andern Körper berühre, weil das Glas darunter leiden würde. Bei neuern Instrumenten steht nun wol in der Regel der Messingrand der Fassung etwas vor dem Glase vor, so daß man das Röhrchen dreist auf diesen Rand setzen kann; aber bei ältern Instrumenten, und bei den englischen auch noch jetzt, steht meist bei einer der Ocularröhren auf der einen Seite eine Linse vor der Fassung vor; man muß daher eine solche Röhre auf ihre andere Seite stellen. Die herausgenommene Fassung mit dem Fadenkreuz bewahre man sorgfältig vor Staub, da sich die Fäden nicht ohne Beschädigung reinigen lassen, und bestaubte Fäden ein schlechtes Bild geben.

Hat man eine Linse so frei gemacht, daß man zu beiden Glasflächen kommen kann, so entferne man erst den Staub von den Glasflächen mit einem feinen Haarpinsel; hat das Glas dann noch nicht die gehörige Klarheit, so wasche man beide Flächen mit einem mit Spiritus befeuchteten leinenen Tuche, wobei man darauf zu achten hat, daß der Spiritus nicht mit dem Lack der Messingfläche in Berührung kommt, weil er diesen auflösen und das Instrument unansehnlich machen würde. Nöthigenfalls wasche man dann die Linsen noch mittels eines Haarpinsels und Kreidewasser und trockne sie mit einem leinenen Tuche ab. Wenn alles trocken geworden, werden doch noch hie und da feine Kreidetheile anhaften; diese wische man denn trocken mit dem ebenfalls trockenen Haarpinsel fort.

Sind alle Ocularlinsen in der beschriebenen Weise gereinigt, so nimmt man das Objectiv vor. Bei kleinern Instrumenten von nicht mehr als 12—16 Linien Oeffnung sind die beiden Linsen des Objectivs meist nur durch

einen in die Fassung eingeschraubten Messingring festgehalten und können daher leicht aus einander genommen werden. Bei Objectiven von größerer Oeffnung ist ein Ring in die Fassung über die Gläser gesetzt, der durch drei seitlich durch die Fassung durchgehende Schräubchen festgehalten wird. Die Löcher in der Fassung sind oval, damit die Schräubchen den Ring noch treffen können, wenn auch die Gläser etwas mehr oder weniger Dicke haben, und dabei allenthalben ein gleichmäßiger Druck auf die Gläser ausgeübt werde. Eine kleine Verschiedenheit in der Dicke der Gläser wird aber bewirkt durch drei Stanniolblättchen, welche, 120° von einander abstehend, am Rande zwischen die Gläser gelegt und mit Gummi festgeklebt werden. Ehe man die Gläser aus einander nimmt, bemerke man die Stelle jedes Blättchens am mattgeschliffenen Rande beider Linsen mit Bleistift, damit genau dieselben Stellen der Gläser wieder zusammenzuliegen kommen, weil eine veränderte Lage der Gläser oft die chromatische Abweichung vergrößert. Dann entferne man die alten Stanniolblättchen ganz, indem man das Gummi durch Wasser auflöst, und reinige beide Gläser auf die beim Ocular angegebene Weise, indem man jedoch wohl darauf achtet, welche Flächen der Gläser zusammengelegen haben. Man kann im allgemeinen bemerken, daß das Crownglas nach außen, das Flintglas nach innen steht; ferner kehrt das Crownglas seine convexere Seite der concaven des Flintglases zu.

Um nun neue Stanniolblättchen von genau gleicher Dicke zu bekommen, schneide man aus demselben Stanniolblatt mehrere kleine Rechtecke aus und schleife beide Seiten der einen Hälfte eines jeden auf einer matt geschliffenen Glasplatte ab, indem man den Zeigefinger daraufsetzt und es so auf der Glasplatte mit einigem Drucke hin- und herbewegt; sollte die Glasplatte dazu nicht rauh genug sein, so lege man etwas von dem feinsten geschlemmten Schmirgel unter. Dadurch werden die Unebenheiten, die sich immer am Stanniol befinden, entfernt. Die Prüfung der so vorbereiteten Blättchen geschieht nach Fraunhofer am zweckmäßigsten auf folgende Weise. Legt man die Linsen des Objectivs mit ihren zusammengehörigen Flächen ohne Stanniolblättchen auf einander, so kommen sie in der Mitte in nahe Berührung und erzeugen die bekannten Newton'schen Ringe, d. h. ein System mehrerer concentrischer, farbiger Ringe um die Mitte der Linsen herum. Man lege nun den abgeschliffenen Theil eines einzelnen Stanniolblättchens am Rande zwischen die Gläser, so schiebt sich der Berührungspunkt der Linsen, je nach der Dicke des Blättchens, mehr oder weniger nach einer Seite, und da die Ringe immer den Berührungspunkt zum Centrum haben, so verschieben sie sich um gerade ebenso viel wie das Centrum. Man messe daher genau den Abstand des Centrums der Ringe entweder von der Mitte oder vom Rande der Linse, lege dann, statt des ersten, ein anderes Blättchen zwischen die

Gläser, messe wieder wie zuvor, und fahre so mit immer andern und andern Stanniolblättchen fort, bis man drei gefunden hat, die genau denselben Abstand geben; von diesen klebe man den abgeschliffenen Theil an den bezeichneten Stellen zwischen die Gläser, sorge jedoch dafür, daß sie nicht zu weit nach innen reichen, jedenfalls so, daß sie nicht über die Messingfassung nach innen vorragen; was nach außen vorsteht, putze man mit einem scharfen Messer fort und lege die Linsen so in ihre Fassung, daß jedes Stanniolblättchen in die Mitte zwischen zwei Schräubchen zu liegen kommt. Es versteht sich, daß beim nachherigen Auseinanderdrücken der Gläser von der Gummilösung nichts seitwärts auf das Glas fließen darf, daher wird man nur sehr wenig auftragen und selbst davon das Ueberflüssige zuvor noch entfernen.

Bei den kleinern Objectiven hat man jetzt blos noch den Ring darüberzuschrauben; bei den größern aber wird der Ring über das Glas in die Fassung gelegt, an einer Stelle, wo ein Schräubchen ist, mäßig gegen das Glas gedrückt und zugleich das Schräubchen eingeschraubt. Wenn alle drei Schräubchen fest sind, sucht man die Ungleichheiten des Drucks dadurch möglichst auszugleichen, daß man die Schräubchen nochmals, eins nach dem andern, etwas löst und mit Anwendung eines gleichen Drucks auf alle drei Stellen wieder festschraubt. Dies ist eine durchaus unerlaßliche Vorsichtsmaßregel, weil ungleiche und unregelmäßige Spannungen im Glase die nachtheiligsten Folgen für die Brechung der Lichtstrahlen nach sich ziehen.

Wir haben hier eine vollständige und gründliche Reinigung aller Gläser beschrieben, wie sie, bei regelrechter Behandlung und Aufbewahrung eines Fernrohrs nur sehr selten nöthig werden kann; namentlich dürfte das Auseinandernehmen des achromatischen Objectivs sehr selten nöthig sein, weil zwischen die beiden Linsen nur sehr schwierig Staub sich eindrängen kann, wenn auch die äußern Flächen öfterer Reinigung bedürfen. Wer übrigens in solchen Arbeiten unerfahren und ungeübt ist, mache sich ja nicht sogleich an diese schwierigste Aufgabe der Reinigung der innern Flächen der Objectivgläser; er erwerbe sich erst einige Fertigkeit durch die weniger schwierigen Arbeiten dieser Art, welche das Instrument nicht so großer Gefahr aussetzen, beurtheile nach den dabei erzielten Erfolgen, ob er sich einiges natürliche Geschick zutrauen darf oder nicht (es ist dies erfahrungsmäßig nicht jedermanns Sache), und im ungünstigern Falle übertrage er die etwa nöthig gewordene Reinigung der Objectivgläser einem ordentlichen Mechanikus, bei dessen Wahl er jedoch vorsichtig sein muß, da es leider gar viele Mitglieder der Zunft gibt, denen ich ein gutes und theuer erkauftes Fernrohr, etwa einen Fraunhofer, Steinheil, Breithaupt u. s. w., um keinen Preis anvertrauen möchte.

D. Aus der Lehre vom Magnetismus.

§. 96. Es gibt ein Eisenerz, welches die Eigenschaft hat, frei bewegliches Eisen anzuziehen und an sich festzuhalten. Dieses Mineral heißt Magneteisenstein oder natürlicher Magnet; seine Eigenschaft, Eisen anzuziehen, heißt Magnetismus, womit zugleich auch die uns unbekannte Ursache dieser Kraft bezeichnet wird.

Versenkt man einen Magnet in Eisenfeilspäne und zieht ihn dann wieder heraus, so bemerkt man, daß an zwei Stellen seiner Oberfläche die Eisenfeilspäne in größter Menge anhangen, und je weiter von diesen Stellen ein Punkt entfernt ist, um so weniger Eisenfeilspäne daran festsitzen, ja, daß in einiger Entfernung von den Stellen der größten Anhäufung sich gar keine mehr vorfinden (Fig. 116). Der Magnet zieht also besonders an zwei Stellen das Eisen an. Die Punkte, an denen der Magnet die größte Anziehung auf das Eisen ausübt, heißen die Pole des Magnets. Der Magnet hat zwei Pole.

Fig. 116.

Legt man einen Magnet auf eine Quecksilberoberfläche, oder läßt man ihn frei an einem Faden herabhangen, wie Fig. 117, so dreht sich stets der eine Pol ungefähr nach Norden, der andere nach Süden. Jener heißt der Nordpol, dieser der Südpol des Magnets. Nord- und Südpol heißen entgegengesetzte Pole; die nach derselben Himmelsgegend gerichteten Pole zweier Magnete heißen gleichnamige Pole.

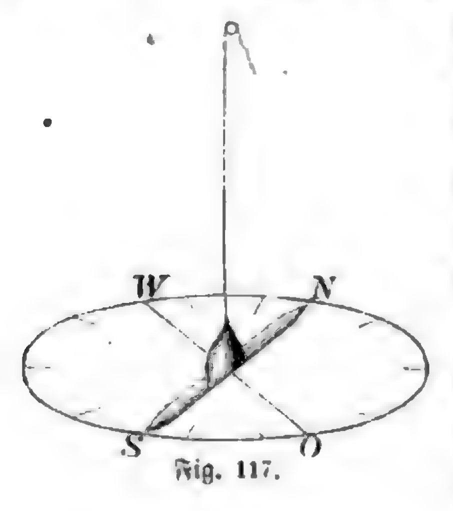


Fig. 117.

Nähert man einen beliebigen Eisenkörper dem einen Pol eines Magnets oder läßt ihn vom Pol angezogen und festgehalten werden, so hat das Eisen selbst die Eigenschaft angenommen, Eisen anzuziehen, und zwar, wie der Magnet, vorherrschend an zwei Punkten. Fig. 118 zeigt ein unmagnetisches Eisenstäbchen, das, am Nordpol eines Magnets hangend, selbst Eisenfeilspäne anzieht. Eisen, das einem Magnetpole genähert wird, verwandelt sich also selbst in einen Magnet. Entfernt man aber das Eisen wieder vom Magnetpole, so verliert es auch sogleich alle magnetischen Eigenschaften; Eisenfeilspäne oder sonstiges Eisen, das daranhing, fällt sofort wieder ab.

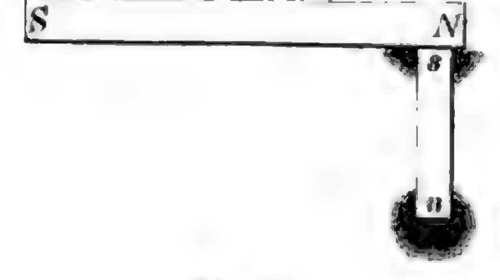
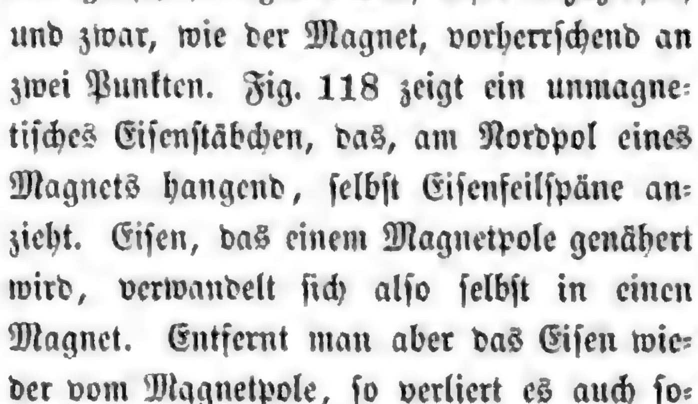


Fig. 118.



Nähert man dagegen dem einen Pol eines Magnets ein Stahlstäbchen und läßt es einige Zeit in der Nähe des Pols oder auch in Berührung mit demselben, und nimmt es dann wieder ab, so zieht es nachher **bleibend** Eisen an, es ist bleibend magnetisch geworden, während Eisen nur vorübergehend magnetisch wird. Hängt man das Stahlstäbchen an einen Faden oder gibt ihm auf andere Weise freie Beweglichkeit, so wendet es denjenigen Punkt, welcher dem Nordpol des Magnets genähert war, nach Süden, oder denjenigen, welcher dem Südpol genähert war, nach Norden. Das Stahlstäbchen ist zu einem **künstlichen** Magnet geworden. Außer dem Stahl ist besonders auch noch Nickel geeignet, bleibenden Magnetismus anzunehmen.

Aus dem Gesagten folgt noch: Wenn ein Magnetpol auf Stahl wirkt, so ruft er an dem ihm genäherten Theile des Stahls den entgegengesetzten Pol hervor, an dem von ihm abgekehrten Theile des Stahls den gleichnamigen.

§. 97. Man macht aus jedem Stahlstab einen künstlichen Magnet dadurch, daß man ihn auf einer ebenen und horizontalen Unterlage unverrückbar befestigt, dann in der Mitte des Stabes zwei Magnete mit den entgegengesetzten Polen aufsetzt und sie unter einem Winkel von etwa 20° mit dem Stabe so nach den beiden Enden des Stabes hinzieht, daß sie während der Bewegung stets den Stab berühren und also gleichsam streichen (Fig. 119). Bei dieser Operation hat man darauf zu sehen, daß man beide Magnetpole genau in gerader Linie nach den Enden hinführt und nirgends seitwärts abgleitet. An den Enden angekommen, führt man die Pole noch eine Strecke weit über diese hinaus in gleicher Richtung fort, und kehrt in einem vom Stabe möglichst weit entfernten Bogen nach der Mitte zurück, wo man die Pole wie das erste Mal aufsetzt und sie ebenso nach den Enden hinführt. Dasselbe Verfahren wiederholt man 16 — 20 Mal, kehrt dann den Stahlstab in der Weise um, daß die Fläche, die bisher unten lag, oben zu liegen kommt, und streicht diese Seite ebenso wie die erste. Der Stab ist dann zum Magnet geworden, und zwar hat die mit dem Nordpol gestrichene Hälfte südlichen, die mit dem Südpol gestrichene nördlichen Magnetismus.

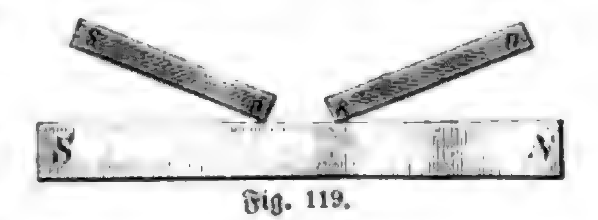


Fig. 119.

§. 98. Ein dünnes und langes magnetisches Stahlstäbchen heißt eine **Magnetnadel**. Die Figuren 120 bis 122 stellen übliche Formen der Magnetnadeln

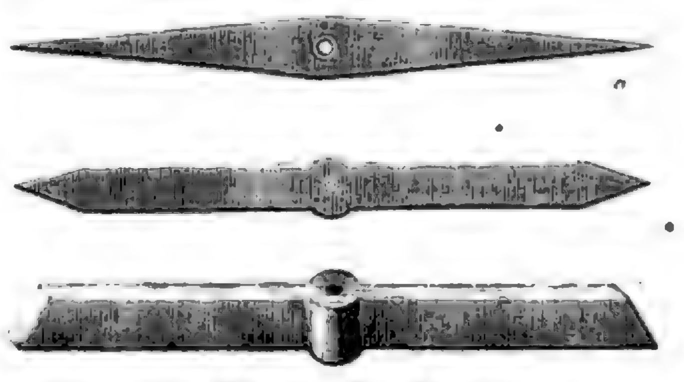


Fig. 120, 121, 122.

dar. Um der Magnetnadel freie Beweglichkeit zu geben wird sie in der Mitte durchbohrt, auf die Durchbohrung wird ein Messinghütchen gesetzt, das inwendig eine Achatplatte trägt, mit welcher man die Nadel auf eine verticale Spitze von gehärtetem Stahl setzt, auf welcher sie dann frei und mit möglich weniger Reibung schwingt. Das Hütchen bekommt die Form, welche die Fig. 123 und 124 von außen und im Durchschnitt zeigen.

Fig. 123, 124.

Eine frei schwingende Magnetnadel nimmt von selbst immer wieder eine bestimmte Richtung nach der Himmelsgegend an und kann also dazu dienen, die Lage einer bestimmten Himmelsgegend zu bestimmen, d. h. sich zu orientiren. Hierbei darf aber kein Eisen in der Nähe der Magnetnadel sein, weil ihr dies eine andere Richtung geben würde.

Diese für denselben Ort constante Richtung der Magnetnadel muß von einer Einwirkung der Erde auf die Nadel herkommen; diese Wirkung der Erde auf die Magnetnadel heißt der Erdmagnetismus.

§. 99. Die gerade Linie, welche beide Pole einer Magnetnadel verbindet, heißt die magnetische Achse der Nadel. Eine verticale Ebene durch die magnetische Achse einer frei schwingenden, aber zur Ruhe gekommenen Magnetnadel heißt der magnetische Meridian des Beobachtungsortes. Diejenige Verticalebene, welche an irgend einem Ort der Erde durch den Nord- und Südpol der Erde gedacht wird, heißt der geographische (astronomische) Meridian des Ortes. Statt dessen nennt man Meridian gewöhnlich auch die Linie, in welcher die magnetische oder geographische Verticalebene, d. h. die durch die Achse einer Magnetnadel, oder die durch die Erdachse gehende Verticalebene den Horizont des Ortes schneidet, also die Projection der Ebene auf den Horizont. Der Winkel, welchen an irgend einem Orte der Erde der magnetische Meridian mit dem geographischen macht, heißt die magnetische Abweichung oder Declination; liegt der magnetische Meridian östlich vom geographischen, so heißt die Abweichung östlich, im entgegengesetzten Falle westlich.

§. 100. Hängt man eine unmagnetische Stahlnadel in ihrem Schwerpunkte auf, etwa dadurch, daß man durch ihren Schwerpunkt eine feste Achse legt und die Achse auf geeigneten Lagern unterstützt; so bleibt die Nadel in jeder Lage, die man ihr geben mag, in Ruhe. Magnetisirt man dann die Nadel und gibt ihr eine solche Lage, daß ihre Schwingungsebene in den magnetischen Meridian zu liegen kommt, so senkt sich auf der nördlichen Hälfte der Erde der Nordpol, auf der südlichen der Südpol der Nadel unter die durch die Achse gelegte Horizontale. Der Winkel, welchen die Nadel mit der Horizontalen macht, heißt die magnetische Neigung oder Inclination.

Untersucht man die magnetische Neigung unter verschiedenen Breiten auf der nördlichen und südlichen Halbkugel, so findet man, daß sie nach dem Aequator hin immer mehr ab-, nach den Polen der Erde hin zunimmt, und daß es in der Nähe des Aequators eine unregelmäßig gekrümmte, die Erde umschließende Linie gibt, in welcher die Neigung Null ist, wo also eine in ihrem Schwerpunkte aufgehängte Magnetnadel horizontal bleibt; und daß gegen die Erdpole hin Punkte existiren, in denen die Neigung 90° beträgt, die Magnetnadel also vertical steht. Jene Linie ohne Neigung heißt der magnetische Aequator der Erde, und die Punkte mit 90° Neigung heißen die magnetischen Pole der Erde, der eine der Nordpol, der andere der Südpol. Soll also eine Magnetnadel in der Horizontalebene schwingen, so muß man auf der nördlichen Halbkugel das Südende, auf der südlichen das Nordende um so mehr beschweren, je mehr man sich den Polen nähert.

§. 101. Es gibt zwei unregelmäßig gekrümmte Linien auf der Erde, in welchen die Magnetnadel keine Abweichung hat, wo also die Nadel genau nach Norden und Süden zeigt. Diese Linien heißen Linien ohne Abweichung; beide Linien gehen durch die magnetischen Pole und bilden also eigentlich nur eine einzige, welche die Erde in zwei Theile theilt, von denen der eine östliche, der andere westliche Abweichung hat; dieser umfaßt den östlichsten Theil von Nordamerika, das Atlantische Meer, ganz Europa, mit Ausnahme des nordöstlichen Rußland; jener umfaßt alle übrigen Theile der Erde. In ganz Deutschland findet also westliche Abweichung statt. Zwischen beiden Linien ohne Abweichung nimmt die Abweichung um so mehr zu, je weiter man sich von beiden entfernt, und erreicht also irgendwo ein Maximum. Verbindet man alle Punkte gleicher östlicher oder westlicher Abweichung, so erhält man die Linien gleicher Abweichung.

Die Linien ohne Abweichung verändern im Laufe der Jahrhunderte ihre Lage, und mit ihnen dann auch die Linien gleicher Abweichung, so daß also an demselben Orte die Abweichung sich verändert und selbst durch Null hindurch in die entgegengesetzte übergeht. Diese Veränderung heißt die säculare Aenderung der Abweichung. So z. B. hatte Paris im Jahre 1580 11½°, 1680 8° östliche Abweichung; 1663 0°, 1700 8° 10′ westliche Abweichung; von da an ist sie immer westlich geblieben, und zwar: 1780 19° 55′; 1805 22° 5′; 1814 22° 34′; 1816 22° 25′; 1828 22° 5′; 1832 22° 3′; 1835 22° 4′ u. s. w.

Die Aenderungen der Abweichung geschehen sehr allmählich; aber die hiernach einem bestimmten Tage zukommende mittlere Abweichung erleidet während eines Tags noch besondere Veränderungen, welche sich täglich wiederholen. Die Nadel entfernt sich nämlich jeden Tag Morgens 8 Uhr am weitesten nach Osten von der auf diesen Tag fallenden mittlern Abweichung, um 2 Uhr

Nachmittags am meisten nach Westen hin; um 10 Uhr Abends hat sie sich wieder nach Osten, um 2 Uhr Nachts am weitesten nach Westen bewegt, so daß also täglich zwei Maxima und zwei Minima eintreten. Diese jeden Tag wiederkehrenden Aenderungen der Abweichung heißen tägliche Variationen. Sie sind im Sommer größer als im Winter und wachsen mit der geographischen Breite; so beträgt die tägliche Variation in Greenwich, unter 51° 28′ nördl. Br. im Sommer 8′,16, im Winter 7′,02; in Petersburg, unter 59° 56′ nördl. Br., im Sommer 10′,07, im Winter 5′,88.

Auch die täglichen Variationen haben eine Periode der Zu- und Abnahme, die etwa 10 Jahre zu dauern scheint. Im nördlichen Deutschland beträgt die mittlere Abweichung gegenwärtig 18° westlich, die tägliche Variation im Sommer 16′, im Winter 8′. Will man etwa den Meridian eines Ortes nach der Magnetnadel bestimmen, so muß man die Zeit nach Jahr, Tag und Stunde, wo es geschehen, angeben.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Meßinstrumenten.

§. 102. Diejenigen Größen, welche den Feldmesser interessiren, werden mit Instrumenten gemessen. Der Feldmesser muß daher Einrichtung und Gebrauch dieser Instrumente kennen lernen. Dies ist der Zweck dieses Abschnitts von der Instrumentenlehre. So vollkommen aber auch ein Instrument gebaut sein mag, wird es doch nie ganz frei von Fehlern sein; diese muß man kennen, um sie möglichst unschädlich machen zu können, d. h. man muß die Instrumente prüfen lernen. Gewisse Mängel treten auch erst während des Gebrauchs der Instrumente hervor und können mittels besonderer Vorrichtungen, die der Verfertiger angebracht hat, beseitigt werden; dies nennt man ein Instrument berichtigen oder ajustiren. Endlich können während des Gebrauchs die Instrumente durch besondere Zufälle Schaden nehmen; kleinere Unfälle dieser Art muß der Feldmesser selbst wieder zu beseitigen verstehen, weil er sonst leicht in seinen Arbeiten auf längere Zeit unterbrochen werden könnte.

Wir haben somit in diesem Abschnitte die Beschreibung der Instrumente zu liefern und eine Anleitung zu geben, dieselben zu prüfen, zu berichtigen und zu gebrauchen.

Manche ältere Instrumente sind heutzutage außer Gebrauch gekommen, weil sie durch bessere ersetzt sind; solche antiquirte Gegenstände werden wir daher hier auch gar nicht berühren; andere sind nur bei größern Messungen, welche die Grenzen dieser Elemente überschreiten, anwendbar; um uns soviel wie möglich zu beschränken, soll auch auf diese keine Rücksicht genommen werden.

Die Lehre von den Meßinstrumenten zerfällt in folgende Kapitel:

I. Apparate, welche in Verbindung mit verschiedenen Meßinstrumenten gebraucht werden.

II. Mittel zur Bezeichnung von Punkten im Felde.

III. Instrumente zur Distanzmessung.

IV. Instrumente zum Messen der Winkel und Gefälle.

Erstes Kapitel.

Beschreibung von Vorrichtungen, welche in Verbindung mit mehreren Meßinstrumenten gebraucht werden.

A. Von den Maßen.

§. 103. Jeder Messung muß irgend eine Maßeinheit zu Grunde liegen; die Messung besteht dann darin, daß man bestimmt, wie vielmal die gemessene Größe diese Maßeinheit enthalte. Daher muß die Maßeinheit mit der gemessenen Größe gleichartig sein. Die in der Meßkunde zum Messen vorkommenden Größen sind Raumgrößen, und zwar Längen- und Winkelgrößen, denn Flächen und Körper werden nicht direct gemessen, sondern aus ihren Dimensionen berechnet.

Blos der Bequemlichkeit wegen hat man mehrere Längeneinheiten, die in einem gewissen Verhältnisse stehen, ebenso mehrere Winkeleinheiten, kleinere zum Messen der kleinern, größere zum Messen der größern Größen. Flächen- und Körpermaße sind eigentlich ganz überflüssig, weil das Quadrat der Längeneinheit das natürlichste Flächenmaß, der Kubus der Längeneinheit das natürlichste Körpermaß abgibt. Dessenungeachtet gibt es verschiedene Flächen- und Körpermaße. Die Angabe der absoluten Größe einer Maßeinheit und des Verhältnisses der kleinern und größern gleichartigen Einheiten zu einander heißen ein Maßsystem. Jedes Maßsystem entspricht um so mehr den Anforderungen, je einfacher es für die Berechnung ist. Da wir nun einmal bei der Zahl das dekadische System haben, so ist leicht einzusehen, daß nicht sowol die Vielheit der Theiler der Verhältnißzahlen diesen Zweckmäßigkeit verleihe, als daß sie sich dem dekadischen Zahlensysteme möglichst anschließen.

---

a. Längen-, Flächen- und Körpermaße.

§. 104. Die Erfahrung, daß wir von den Maßen der alten, untergegangenen Völker nur mangelhafte Kenntniß haben, hat die Neuern auf den Gedanken gebracht, ein Naturmaß einzuführen, dessen Einheit jederzeit, wenn sie verloren gegangen sein sollte, aus der bloßen, durch Ueberlieferung bekannten Definition wiedergefunden werden könnte. Huyghens schlug im 17. Jahrhundert die Länge des einfachen Secundenpendels vor, um die Mitte des 18. Jahrhunderts wurde der Fallraum der Körper in der ersten Secunde

in Vorschlag gebracht, endlich gegen Ende des 18. Jahrhunderts von einer Commission der französischen Akademie der Wissenschaften zu Paris der zehnmillionste Theil eines Erdquadranten in der Richtung der Meridiane. Der letzte Vorschlag wurde von der damaligen französischen Nationalversammlung 1790 angenommen, und da man die vorhandenen Gradmessungen nicht für zuverlässig genug hielt, wurde den Astronomen Mechain und Delambre der Auftrag ertheilt, eine neue Messung vorzunehmen. Im Jahre 1735 hatten Bouguer und Condamine in Peru die Länge eines Grades zu 56753 Toisen, und Maupertuis u. a. in Lappland zu 57437 Toisen gefunden. Es wurde nun in dem Meridian von Paris der Bogen zwischen Barcellona und Dünkirchen von 6,6738 Graden gemessen und = 551584,72 Toises du Pérou (d. h. derjenigen Toise, die bei der frühern Gradmessung in Peru gebraucht worden war) gefunden, also die Länge des Meridianquadranten zu 5130740,74 Toisen. Der zehnmillionste Theil dieser Länge = 0,513074 Toise du Pérou wurde dann unter dem Namen Meter (mètre), von μέτρον das Maß, zur Maßeinheit für Frankreich bestimmt. Die Toise hat 6 Fuß, zu 12 Zoll, zu 12 Linien; 1 Meter hält danach 443,296 Linien des alten pariser Maßes. Im Jahre 1799 wurde ein Normal-Etalon des Meters von 1 Zoll Breite und 2 Linien Dicke, aus Platin angefertigt, im Reichsarchive zu Paris niedergelegt. Dieser Etalon hat seine richtige Länge bei 0° Temperatur, während die Toise du Pérou bei + 13° R. gemessen werden muß.

Im Grunde ist auch diese mit so vielem Aufwand gewonnene Einheit kein Naturmaß, weil kaum zwei Messungen derselben Meridiangrade gleich ausfallen dürften, überdies das Resultat einer solchen Messung stets von dem Grade wissenschaftlicher Bildung und der größern oder geringern Genauigkeit der dabei gebrauchten Instrumente abhängig sein wird. Auch hat in der That Bessel gefunden, daß der Quadrant des Meridians nicht 10,000000, sondern 10,000859 Meter enthält. Wenn danach auch die Grundeinheit des französischen Maßes der ursprünglichen Idee nicht entspricht, so bleibt das ganze System des metrischen Maßes dennoch ein der Nachahmung würdiges Muster für alle Nationen und alle Zeiten.

§. 105. Da in den verschiedenen Ländern auch verschiedene Maße bestehen, deren Verhältniß zu einander man kennen muß, so sollen im Folgenden einige der vorzüglichsten aufgeführt werden. Der Bequemlichkeit wegen werden ihnen kurze Notizen über die Gewichte der betreffenden Länder beigefügt werden.

1) Frankreich. Der Meter wird nach dem Decimalsystem eingetheilt; die Unterabtheilungen des Meter werden mit lateinischen, die Vielfachen mit griechischen Vorsilben bezeichnet:

1 Decimeter = 0,1 Meter,
1 Centimeter = 0,01 „

1 Millimeter = 0,001 Meter,
1 Decimillimeter = 0,0001 Meter,
10 Meter = 1 Dekameter,
100 Meter = 1 Hektometer,
1000 Meter = 1 Kilometer,
10000 Meter = 1 Myriameter.

Die Unterabtheilungen des Meters werden als Decimalbrüche, die Vielfachen als Ganze ausgedrückt, z. B. $546^{m},379 = 5^{hkm}\ 4^{dkm}\ 6^{m}\ 3^{decm}\ 7^{cm}\ 9^{mm}$.

Es ist: 1^{m} = 443,296 alte par. Linien = 3,07844 par. Fuß. 1 Toise du Pérou = $1^{m},949037$. 1 alter par. Fuß = $0^{m},324839$.

1 Lieue de 25 au degré (deren 25 auf 1° des Aequators gehen) = $4444^{m},444$.

1 Lieue de 20 au degré (Seemeile oder lieue marine) = $5555^{m},555$.

1 mille marin = $^1/_3$ Lieue marine.

Als Flächenmaß dienen die Quadrate der Längenmaße; sie werden mit q (quarré) bezeichnet; z. B. $0^{mq},8$ = 8 Quadratdecimeter. Beim Feldmaße heißt 1 Quadratdekameter Are; also 1 Are = 100^{mq}; 0,1 Are = 1 Deciare, 0,01 = 1 Centiare u. s. w.

Als Körpermaße dienen die Kuben der Längenmaße; sie werden mit c (cube) bezeichnet, z. B. 4^{mc} = 4 Kubikmeter. Stère, von στερεός fest, = 1^{mc}, dient als Holzmaß, Liter = $0,1^{mc}$ als Flüssigkeitsmaß. Die Unterabtheilungen und Vielfachen werden ebenso gebildet, wie oben gezeigt worden.

Eben so einfach und systematisch ist die Eintheilung der Gewichte. Das Gramm ist Gewichtseinheit und bezeichnet das Gewicht von 1 Kubikcentimeter destillirten Wassers bei 0° Temperatur. 1000 Gramme oder 1 Kilogramm = 2 Zollpfund.

2) Preußen. 1 Fuß = $0^{m},3139$ = 139,13 par. Linien. Der Fuß wird nach dem Duodecimalsystem eingetheilt. 1 Ruthe = 12 Fuß. Bei Vermessungen wird aber die Ruthe nach dem Decimalsystem abgetheilt. 1 Ruthe = 10 Fuß = 100 Zoll = 1000 Linien dec. 1 Zoll ddec. = $0^{m},0261544$, 1 Zoll dec. = $0^{m},0376624$.

Ein Seefaden = 6 Fuß; 1 Lachter = 80 Zoll. 1 preuß. Meile = 2000 Ruthen.

Als Flächenmaß: 1 Morgen = 180 Quadratruthen.

Als Körpermaß: 1 Kubikklafter = 108 Kubikfuß. 1 Schachtruthe = 144 Kubikfuß.

Für das Gewicht ist 1 preuß. Pfund = 476,711 Gramm. 1 Zollpfund = 500 Gramm. Das Zollpfund ist seit dem 1. Juli 1858 Einheit des Landesgewichts.

3) Oesterreich. 1 Klafter = 6 Fuß, 1 Fuß = $0^{m},31611095$ = 140,1307

par. Linien. Beim Feldmessen wird die Klafter nach dem Decimalsystem abgetheilt. 1 Lachter = 6,191 wiener Fuß. 1 Postmeile = 4000 Klafter.

Als Flächenmaß: 1 Joch = 1600 Quadratklafter.

Als Körpermaß: 1 Klafter = 108 Kubikfuß.

Beim Gewicht: 1 Pfund = 560,012 Gramm.

4) Hannover. 1 Fuß = 0^m,2920947 = 129,4844 par. Linien. 1 Klafter = 6 Fuß, 1 Ruthe = 16 Fuß, wird beim Feldmessen decimal abgetheilt. 1 Meile = 1587½ Ruthen.

Flächenmaß: 1 Morgen = 180 Quadratruthen.

Körpermaß: 1 Klafter = 144 Kubikfuß.

Gewicht wie in Preußen.

5) Sachsen. 1 Fuß = 0^m,28319 = 125,537 par. Linien. Das gewöhnlichste Maß ist die sächsische Elle = 2 Fuß. 1 Klafter = 3 Ellen. 1 Meile = 13100 Ellen. 1 Ruthe beim Feldmessen = 7 Ellen 14 Zoll = 182 Zoll, wird decimal abgetheilt. Die Kette hat 10 geometrische Ruthen. Die Ruthe beim Straßenbau heißt Landruthe und hält 8 Ellen. Die Post- oder Polizeimeile hat 2000 Landruthen. Ein Berglachter = 2 Meter = 7 Lachterfuß. 1 Bergelle = 2 Lachterfuß.

Flächenmaß: Ein Acker = 300 geometrische Quadratruthen = 2 Scheffel. 1 Morgen = 180 Quadratruthen.

Körpermaß: 1 Schragen (Brennholz) = 3 Klafter; 1 Klafter = 108 Kubikfuß.

Gewicht: 1 Pfund = 467,08616 Gramm.

6) Mecklenburg-Schwerin. 1 Bau- und Werkfuß = 0^m,28657 127,036 par. Linien, wird duodecimal abgetheilt. Bei Landesvermessungen wird der lübecker Fuß von 0^m,291 oder 129 par. Linien gebraucht. Beim Straßen-, besonders Chausseebau wird der rheinländische oder preußische Fuß von 12 Zoll zu 10 Linien benutzt. 1 rostocker Fuß = 11 preuß. Zoll = 0^m,287699 = 127,5358 par. Linien. Die mecklenburger Ruthe hat 16 Fuß à 129 par. Linien und wird decimal abgetheilt. 1 Meile = 2000 preuß. Ruthen.

Flächenmaß: 1 Morgen = 300 Quadratruthen. 1 Morgen Forstland = 100 Quadratruthen. Auf den Gütern rechnet man nach Last zu 6000 Quadratruthen. 1 Hufe wird zu 300 rostocker Scheffel Einsaat gerechnet; auf jeden solchen Scheffel gehen im Durchschnitt 70 Quadratruthen. Die katastrirte Hufe wird zu 600 Scheffel Einsaat gerechnet, und auf jeden Scheffel, je nach der Güte des Bodens, 75 bis 300 Quadratruthen.

Körpermaß: Das Brennholz wird nach Faden zu 147 Kubikfuß gemessen.

Gewicht: 1 Pfund = 484,71 Gr. Von Johannis 1861 an wird das Zollgewicht eingeführt.

7) Würtemberg. 1 Fuß = $0^m,2864903$ = 127 par. Linien. 1 Ruthe = 10 Fuß. 1 Meile = 26000 Fuß.

Flächenmaß: 1 Morgen = 384 Quadratruthen. 1 Juchart = $1^1/_2$ Morgen.

Körpermaß: 1 Klafter Brennholz = 144 Kubikfuß.

Gewicht: 1 Pfund = 467,728 Gr., künftig = 500 Gr.

8) Baiern. 1 Fuß = $0^m,29186$ = 129,38 par. Linien, beim Feldmessen decimal abgetheilt. 1 Werkruthe = 12 Fuß, 1 Feldruthe = 10 Fuß, 1 Meile = 25406 Fuß.

Flächenmaß: 1 Tagewerk = 40000 Quadratfuß.

Körpermaß: 1 Klafter Brennholz = 126 Kubikfuß.

Gewicht: 1 Pfund = 560 Gr.

9) England. 1 Yard = 3 Fuß = $0^m,9143835$ = 405,3425 par. Linien. 1 Ruthe = $16^1/_2$ Fuß. 1 Kette = 4 Ruthen. 1 Meile = 1760 Yards. Die Kette (chain) dient als Feldmaß und wird in 100 Glieder (links) getheilt.

Flächenmaß: 1 Acre = 10 Quadratketten = 160 Quadratruthen.

Gewicht: 1 Troy-Pfund = 373,24 Gr. 1 Pfund Avoirdupois (Handelsgewicht) = 453,59 Gramm.

Die Fig. 125 liefert eine möglichst genaue Darstellung der üblichsten Längenmaße, und zwar: der erste Maßstab 100^{mm}, der zweite 3 Zoll par. = 81^{mm},

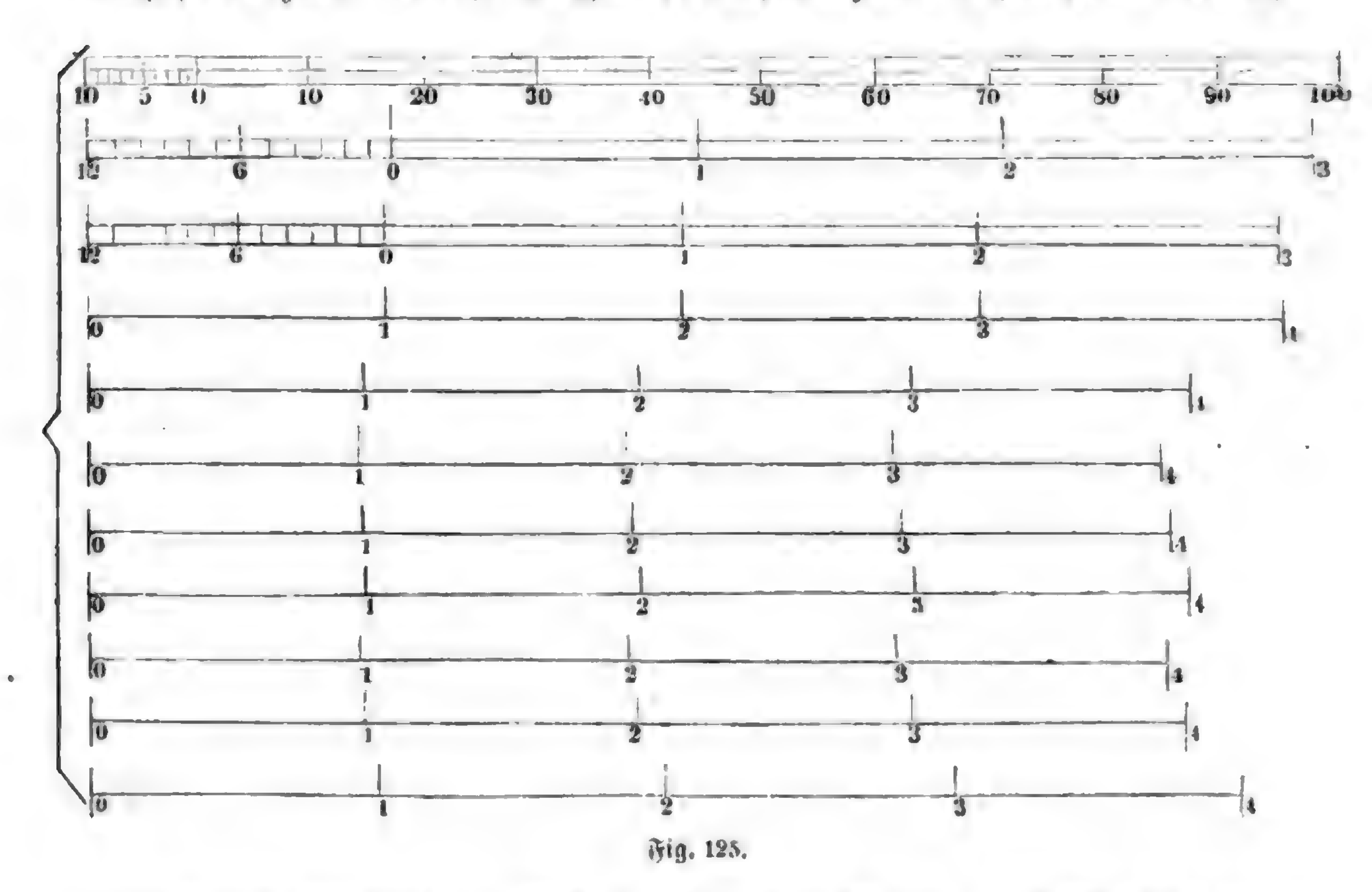


Fig. 125.

der dritte 3 Zoll preuß. = 78^{mm}, der vierte 4 Zoll österr. = 105^{mm}, der fünfte 4 Zoll hannov. = 97^{mm}, der sechste 4 Zoll sächs. = 94^{mm}, der siebente 4 Zoll

mecklenb. Werkmaß = $95^{mm},5$, der achte 4 Zoll rostocker = $95^{mm},8$, der neunte 4 Zoll würtemb. = 95^{mm}, der zehnte 4 Zoll bair. = 97^{mm}, der elfte 4 Zoll engl. = 101^{mm}.

---

b. Winkelmaße.

§. 106. Die Einheit des Winkelmaßes ist überall der rechte Winkel; er wird meist in 90 Grade, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden getheilt, und diese Eintheilung heißt die Sexagesimaltheilung. In Frankreich wurde gleichzeitig mit dem neuen Maßsystem auch eine centesimale Winkeltheilung eingeführt. Danach hat der rechte Winkel 100 Grad, der Grad 100 Minuten, die Minute 100 Secunden. Diese Eintheilung gewährt viele Bequemlichkeiten, ist aber bisher fast nur in Frankreich gebräuchlich.

§. 107. An diese Aufzählung der verschiedenen Maße schließt sich ihre Verwandlung.

a. Verwandlung der Längenmaße.

Es seien M und N zwei Längeneinheiten, m eine dritte Einheit (z. B. Meter, während erstere beiden verschiedene Fuße sein mögen); dann sei $M = a \cdot m$, $N = b \cdot m$, und es werden $c \cdot M = x \cdot N$ sein, wenn

$$b : a = c : x$$

also: $$x = \frac{ac}{b}$$ ist.

Wenn die Zahlen a, b, c groß sind, so rechnet man mit Logarithmen nach der Formel:

$$\log x = \log a + \log c - \log b$$

oder: $$\log x = \log a + \log c + \log E \cdot \log b - 10.$$

Beispiel. 148,5 Fuß mecklenburger Feldmaß in preußisches Maß zu reduciren.

1 Fuß mecklenburger Feldmaß = $0^m,291$.

1 Fuß preußisch = $0^m,3139$.

$$\log x = \log 0{,}291 + \log 148{,}5 + E \cdot \log 0{,}3139 - 10.$$

$$\log 0{,}291 = 0{,}4638930 - 1$$
$$\log 148{,}5 = 2{,}1717265$$
$$E \cdot \log 0{,}3139 = 9{,}5032087 - 9.$$
$$\log x = 2{,}1388282$$
$$x = 137{,}6665.$$

Um bei Reductionen, die oft vorkommen, schneller zum Ziele zu gelangen, wird man sich die Logarithmen und ihre dekadischen Ergänzungen ein für allemal herausschreiben, um sie in jedem einzelnen Falle sogleich zur Hand zu haben.

Zur Verwandlung des Decimal- und Duodecimalmaßes in einander hat man, wenn die Ruthe mit °, der Fuß mit ′, der Zoll mit ″ und die Linie mit ‴, das Decimalmaß mit d., daß Duodecimalmaß mit dd. bezeichnet wird:

$$1^\circ \text{ d.} = 1^\circ \text{ dd.}$$
$$10' \text{ d.} = 16' \text{ dd.}$$
$$100'' \text{ d.} = 192'' \text{ dd.}$$
$$1000''' \text{ d.} = 2304''' \text{ dd.}$$

Man resolvire also die gegebene Zahl in die kleinste vorkommende Einheit und verwandle nach der Proportion. Z. B. es seien 5° 8′ 7″ 6‴ d = 5°,876 d in Duodecimalmaß zu verwandeln, so hätte man:

$$1000 : 2304 = 5876 : x$$
$$x = \frac{2304 \cdot 5876}{1000} \text{ Linien dd.},$$

welche nachgehends in die höhern Einheiten reducirt werden. Wäre die Ruthe in 12′ getheilt, so hätte man oben rechts die Verhältnißzahlen 12, 144 und 1728.

b. Verwandlung der Flächen- und Körpermaße.

Für die Flächenmaße hat man:

$$100'^{\square} \text{ d.} = 256'^{\square} \text{ dd.}$$
$$10000''^{\square} \text{ d.} = 36864''^{\square} \text{ dd.}$$

Für die Körpermaße:

$$1000'^{K} \text{ d.} = 4096'^{K} \text{ dd. u. s. w.},$$

wonach jede Reduction leicht vorzunehmen. Bei der Verwandlung des Flächenmaßes verschiedener Länder hat man sich der Quadrate der linearen Verhältnißzahlen zu bedienen. Sollten z. B. 56 mecklenburger Morgen in preußische Morgen verwandelt werden, so könnte man nach dem gewöhnlichen Kettensatz ansetzen:

x	=	56 Morgen mecklenb.
1	=	$300^{\circ\square}$ mecklenb.
1	=	$256'^{\square}$ mecklenb.
1	=	291^2 Quadratmillimeter
3139^2	=	$1'^{\square}$ preuß.
144	=	$1^{\circ\square}$ preuß.
180	=	1 Morgen preuß.

$$x = \frac{56 \cdot 300 \cdot 256 \cdot 291^2}{3139^2 \cdot 144 \cdot 180},$$

was durch Logarithmen leicht zu berechnen ist.

c. Verwandlung der Winkelmaße.

Bezeichnet man die Sexagesimaltheilung durch s., die Decimaltheilung durch d., so hat man:

$$100^\circ \text{ d.} = 90^\circ \text{ s.}$$
$$10000' \text{ d.} = 5400' \text{ s.}$$
$$1000000'' \text{ d.} = 324{,}000'' \text{ s.}$$

Löst man also die gegebene Winkelgröße in die kleinste vorkommende Einheit auf, so ist die Verwandlung nach der Proportion auszuführen. Z. B. es seien 78° 36′ 12″ s. in die Decimaltheilung zu verwandeln, so rechnet man wie folgt:

$$\begin{array}{l} 78^\circ\ 36'\ \ 12'' \\ \underline{\ \ 60\ \ } \\ 4716'\ 12'' \\ \underline{\ \ \ \ 60\ \ } \\ 282972''\ \text{s.} \end{array}$$

$$324 : 1000 = 282972 : x$$
$$x = \frac{282972000''}{324}\ \text{d.}$$
$$\log 282972000 = 8{,}4517435$$
$$\log 324 = 2{,}5105450$$
$$\log x = 5{,}9411985$$
$$x = 873370{,}4''\ \text{d.}$$
$$= 87^\circ\ 33'\ 70'',4.$$

Es seien umgekehrt gegeben: 96° 85′ 76″ d., so erhält man den Betrag nach der Sexagesimaltheilung durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l} \underline{96^\circ\ 85'\ 76''\ \text{d.}} \\ 968576''\ \text{d.} \end{array}$$

$$1000 : 324 = 968576 : x$$
$$x = \frac{324 \cdot 968576''}{1000}\ \text{s.}$$
$$\log 324 = 2{,}5105450.$$
$$\log 968576 = 5{,}9861337$$
$$\text{E. } \log 1000 = 7,$$
$$\log x = 5{,}4966787$$
$$x = 313818'',6\ \text{s.}$$
$$60)\ \overline{5230'\ 18'',6\ \text{s.}}$$
$$60)\ \overline{87^\circ\ 10'\ 18'',6\ \text{s.}}$$

B. Der Maßstab.

§. 108. Unter dem Maßstab einer Karte versteht man das Verhältniß zwischen der Entfernung zweier Punkte auf der Karte und der Entfernung

der entsprechenden Punkte der natürlichen Horizontalprojection, oder, was bei topographischen Karten auf eins hinauskommt, der Entfernung der entsprechenden Punkte in der Natur. Sind die Punkte a, b einer Karte z. B. 1 Zoll von einander entfernt, die Punkte A, B, welche durch a, b vorgestellt werden, in der Natur 10 Ruthen, so ist das Verhältniß, wenn man Decimalmaß zu Grunde legt, wie 1 : 1000; und stellt eine Längeneinheit auf der Karte m Längeneinheiten derselben Art in der Natur vor, so ist der Maßstab dieser Karte 1 : m. Jede Distanz in der Natur wird also auf der Karte m Mal kleiner vorgestellt, und in dieser Beziehung heißt das Größenverhältniß der Entfernung entsprechender Punkte der Karte und in der Natur auch die Verjüngung. Ist aber das Verjüngungsverhältniß einer Karte für die linearen Ausdehnungen = 1 : m, so ist das der Flächen das quadratische hiervon, nämlich = 1 : m^2, weil ähnliche Flächen im quadratischen Verhältniß ihrer homologen Dimensionen (Seiten, Höhen, Durchmesser oder beliebiger homologen Transversalen) stehen. Und ist das Verhältniß der Fläche auf der Karte zu der natürlichen Projection wie $\varphi : F$, so ist das lineare Verhältniß $\sqrt{\varphi} : \sqrt{F} = \sqrt{\frac{\varphi}{F}}$. Der auf einer Karte angegebene Maßstab bezieht sich aber allemal auf die linearen Ausdehnungen.

Man drückt den Kartenmaßstab gewöhnlich durch ein Verhältniß aus, dessen Vorderglied die Einheit ist, wie 1 : 5000, wo dann allemal in beiden Gliedern dieselbe Längeneinheit zu verstehen ist. Diese Bezeichnungsweise ist von der Längeneinheit unabhängig. Aber man drückt sich manchmal auch in der Weise aus, daß man sich auf zwei verschiedene Längeneinheiten bezieht, z. B. 1″ = 50° d., wonach der Maßstab = 1 : 5000 wäre. Stellt ein Maßstab wirkliches Maß vor, d. h. sind auf ihm die wahren Längen von 1 Ruthe, Fuß, Zoll, oder Meter, Decimeter u. s. w. abgetragen, so heißt er ein natürlicher Maßstab; sind aber die Einheiten des Maßstabes kleiner als die gleichbenannten wirklichen Maße, so heißt er ein verjüngter Maßstab.

§. 109. Bei der Vermessung und Aufnahme einer Gegend ist die Wahl des Maßstabes, nach welchem die Karte entworfen werden soll, der erste und wichtigste Punkt, worauf man sein Augenmerk zu richten hat. Je größer der Maßstab einer Karte ist, desto mehr Einzelheiten kann sie enthalten, desto richtiger kann man die Entfernungen bestimmter Punkte aus derselben entnehmen. Aber die Karte derselben Fläche wird auch im quadratischen Verhältniß des linearen Größenverhältnisses größer, daher weniger übersichtlich, und verursacht bei der Anfertigung um so mehr Arbeit und Kosten. Da nun diese letztern Punkte im Verhältniß der Flächen, also im quadratischen Verhältniß der linearen Ausdehnungen und des Maßstabes stehen, so gewinnt ihre

Berücksichtigung ein so bedeutendes Uebergewicht, daß man allgemein den Grundsatz aufgestellt hat: den Maßstab einer Karte so klein zu wählen, als es der Zweck der Karte nur gestattet.

Der Erfahrung gemäß werden Gegenstände, wenn sie unter einem Winkel von 1 Minute bei gewöhnlicher Beleuchtung erscheinen, dem Auge unsichtbar, wenigstens darf der Gesichtswinkel nicht unter die angegebene Größe heruntersinken; allerdings bleibt hierin, wegen der Verschiedenheit in der Beleuchtung, Farbe u. s. w. vieles unbestimmt; so z. B. sind die Himmelskörper noch sichtbar, wenn sie auch keinen meßbaren Gesichtswinkel haben. Für die meisten Fälle wird man indeß die oben angegebene Grenze unbedenklich als richtig annehmen können.

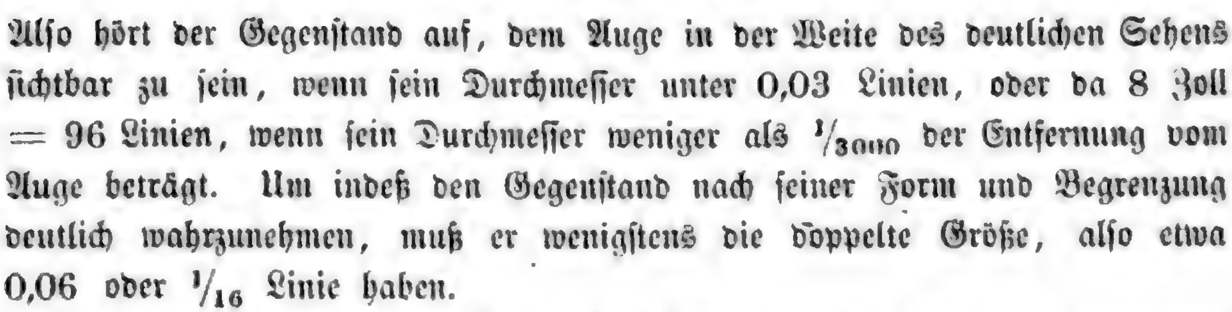
Stellt dann AB (Fig. 126) einen Durchmesser des gesehenen Gegenstandes, $AOB = 2\varphi$ den Gesichtswinkel von AB für das Auge O vor, ist OC ein Loth von O auf AB und gleich der Weite des deutlichen Sehens (etwa 8 Zoll), und wird OC mit e, AB mit x bezeichnet, so ist:

$$\tfrac{1}{2} x = e \cdot \operatorname{tg} \varphi$$
$$x = 2e \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Setzt man nun $e = 8$ Zoll $= 96$ Linien, $2\varphi = 1$ Minute, also $\varphi = 30$ Secunden, so hat man:

$$x = 192 \cdot \operatorname{tg} 30''$$
$$\log 192 = 2{,}2833012$$
$$\log \operatorname{tg} 30'' = 6{,}1626961$$
$$\log x = 8{,}4459973.$$
$$x = 0''',027925.$$

Fig. 126.



Also hört der Gegenstand auf, dem Auge in der Weite des deutlichen Sehens sichtbar zu sein, wenn sein Durchmesser unter 0,03 Linien, oder da 8 Zoll = 96 Linien, wenn sein Durchmesser weniger als $^1/_{3000}$ der Entfernung vom Auge beträgt. Um indeß den Gegenstand nach seiner Form und Begrenzung deutlich wahrzunehmen, muß er wenigstens die doppelte Größe, also etwa 0,06 oder $^1/_{16}$ Linie haben.

Hiernach wird man leicht beurtheilen können, wie stark man die wahre Größe eines Gegenstandes verjüngen darf, damit eine gegebene Ausdehnung in der Weite des deutlichen Sehens in der Zeichnung noch sichtbar bleibe. Soll z. B. 1 Fuß noch sichtbar bleiben, so wäre:

$^1/_{16}$ Linie der Karte = 1 Fuß = 144 Linien in der Natur,
1 „ „ „ = 2304 Linien „ „ „

also wäre bei der gestellten Forderung $^1/_{2300}$ die stärkste anwendbare Verjüngung.

Soll aber die Karte dazu dienen, die Entfernungen mit dem Zirkel abzunehmen und nach dem gezeichneten Maßstabe bis auf 1 Fuß genau abzu-

messen, so wird man einsehen, daß die geschickteste Hand, von dem schärfsten Auge und dem besten Haarzirkel unterstützt, nicht im Stande ist $^1/_{16}$ Linie, oder auch eine beliebig größere Entfernung bis auf $^1/_{16}$ Linie genau mit auch nur einiger Sicherheit zu greifen, was doch nöthig wäre, wenn man in der wahren Größe um weniger als 1 Fuß fehlen wollte. Zu diesem Zwecke dürfte $^1/_{10}$ Linie die äußerste Grenze sein, wonach denn der Maßstab nur wenig über $^1/_{1500}$ würde, den man indeß, um ganz sicher zu sein, daß die Fehler 1 Fuß in der wahren Größe nicht überschreiten, wol auf $^1/_{1000}$ wird herabsetzen müssen.

Ebenso wird man den Maßstab berechnen, wenn irgend eine andere Größe, z. B. eine Ruthe, auf der Karte noch sichtbar, oder gar meßbar bleiben soll.

§. 110. In verschiedenen Ländern normiren Vorschriften für die Maßstäbe der Aufnahmen, die nicht alle völlig übereinstimmend sind. Man muß sich daher eine Kenntniß der gesetzlichen Bestimmungen des Landes, worin man eine solche Arbeit auszuführen hat, verschaffen. Das preußische Feldmesserreglement von 1858 schreibt vor:

„§. 21. Wenn nicht durch besondere Anweisungen oder Vereinbarungen ein anderes festgesetzt ist, muß zur Auftragung der Flächenmessungen jederzeit der Maßstab von $^1/_{2500}$ der wirklichen Länge gewählt werden."

Die mecklenburg-schweriner Feldmesserordnung von 1854 bestimmt:

„§. 53. Alle Karten sind nach dem Maßstabe von 20 Ruthen auf einen Duodecimalzoll, also in 1 : 3840 der wahren Größe zu zeichnen, und ist solcher darauf anzugeben."

Aehnliche Bestimmungen gelten für andere Länder.*) Natürlich beziehen sich diese Bestimmungen nur auf ökonomische Karten; Karten zu wissenschaftlichen Zwecken können nach Gutdünken in jedem Maßstabe angefertigt werden. Wenn man alles zusammennimmt, was die Erfahrung als praktisch und zweckmäßig herausgestellt hat, so dürften folgende Maßstäbe für die dabei bemerkten Zwecke am meisten zu empfehlen sein:

I. Maschinenzeichnungen: $^1/_{12}$ — $^1/_{10}$. Einzelne Theile in wahrer Größe.

II. Baurisse: $^1/_{100}$. Bauplätze: $^1/_{200}$.

III. Geometrische Aufnahmen zum Zwecke der Inhaltsbestimmung: $^1/_{1000}$ — $^1/_{3000}$.

---

*) Vgl. G. Schreiber, „Vorlesungen über praktische Geometrie" (Karlsruhe 1842), S. 97—102.

IV. Oekonomische Karten. Flurkarten: $^1/_{2500}$ — $^1/_{4000}$. Forstkarten: $^1/_{5000}$ — $^1/_{10000}$. Bestandskarten: $^1/_{10000}$. Bodenkarten: $^1/_{20000}$. Uebersichtskarten: $^1/_{40000}$ — $^1/_{30000}$.

V. Militärische Aufnahmen: $^1/_{10000}$ — $^1/_{40000}$. Flüchtige Aufnahmen nach dem Augenmaße (Croquis) $^1/_{50000}$.

§. 111. Diejenige Figur, welche ein Längenmaß verjüngt darstellt, um beliebige Einheiten und Bruchtheile oder Unterabtheilungen desselben mit dem Zirkel davon abzugreifen, heißt ebenfalls ein Maßstab. Wir müssen also das Wort Maßstab einmal in dem Sinne der Verjüngung, dann in dem andern Sinne, als graphische Darstellung der verjüngten Maße auffassen.

Wollte man auf einer geraden Linie so kleine Theile abtragen, wie sie zu dem genannten Zwecke erforderlich sind, so würde dies sich einerseits nur sehr schwer ausführen lassen, andererseits würden so nahe an einander liegende Theilstriche beim Gebrauche bald mit der Zirkelspitze unkenntlich, der Maßstab also unbrauchbar gemacht werden. Durch Transversalen, welche mehrere parallele Linien durchschneiden, erreicht man den Zweck ohne die erwähnten Uebelstände. Ein solcher Maßstab heißt dann ein Transversalmaßstab. Um ihn zu construiren, zieht man (Fig. 127) vorläufig eine Linie a b und trägt auf ihr 10 beliebige, aber gleiche Theile von a bis b auf, die zweckmäßig nicht kleiner als 1 Linie gemacht werden. Senkrecht zu a b zieht man durch a, b und die Zwischentheilpunkte Parallelen, etwas länger als der Maßstab werden soll. Nahe bei a b zieht man dann c d ‡ a b, und von c und d aus auf die äußersten Parallelen c m, d n trägt man die Längeneinheit 11 Mal ab; bequem ist es, diesen Theilen ein bestimmtes Verhältniß zu dem absoluten Maße zu geben, z. B. wenn es sich um Fußmaß handelt, einen Theil = 0,1 Decimalfuß, oder für Meter = 0,1 Meter u. s. w. zu machen; indessen hängt das immer von dem vorgeschriebenen Verjüngungsverhältniß ab, was ein solcher Theil

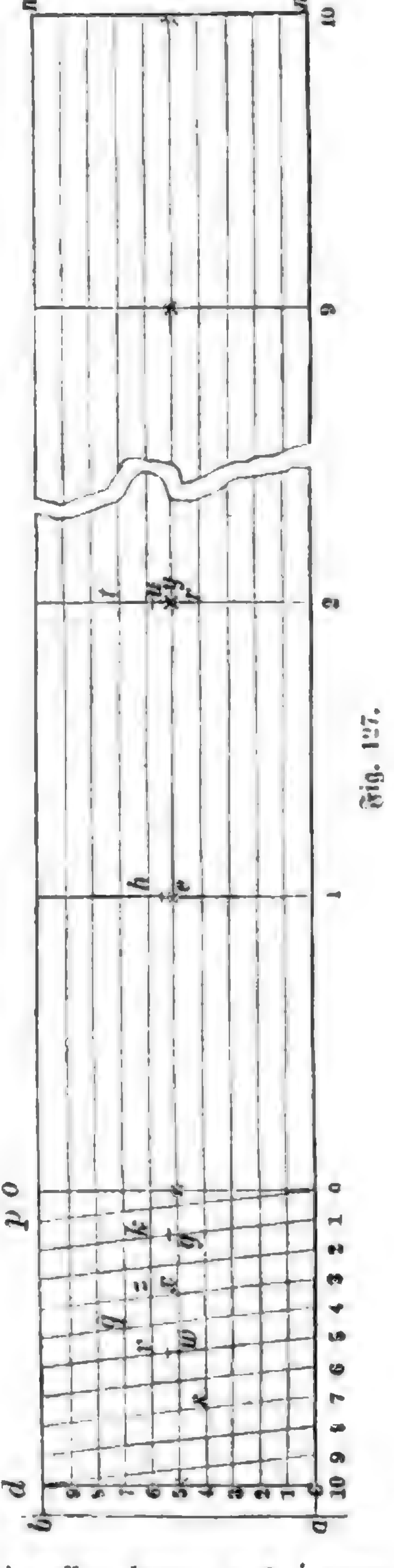


Fig. 127.

für eine Bedeutung bekomme. Den ersten Theil links theilt man in 10 gleiche Theile und trägt dieselben Theile auch auf der obersten Parallelen ab, zieht dann die Transversalen vom Nullpunkte unten nach dem ersten Theilpunkte oben, vom ersten Theilpunkte unten nach dem zweiten oben u. s. w., und verbindet endlich die Theilpunkte der größern Abtheilungen. Zuletzt schreibt man sämmtliche Ziffern zu den betreffenden Theilpunkten, wie die Figur zeigt. Die Zeichnung wird auf gutem Zeichenpapier gemacht, das auf eine ebene Holzplatte geleimt ist. Sollte sich das Holz nachträglich krümmen, so würden die mit dem Zirkel vom Maßstabe abgegriffenen Theile unrichtig werden; um dies zu verhüten, leime man zwei dünne Bretter mit sich kreuzenden Fasern über einander, und lege an den schmalern Seiten des Rechtecks noch eingestemmte Leisten an. Nachdem dies gehörig getrocknet und glatt gehobelt, wird das Papier glatt aufgeleimt und nach dem Trockenwerden der Maßstab aufgezeichnet.

Stellt jede der größern Abtheilungen z. B. eine Ruthe vor, so ist ein Theil der ersten Abtheilung = 0,1 Ruthe = 1′d. und die Transversalen geben die Decimalzolle. Denn O O p ist ein Dreieck, dessen zwei Scheitelseiten O O, p O durch Parallelen mit der Basis O p in 10 gleiche Theile getheilt sind; also ist die der Spitze nächste Parallele = 0,1 · O p, die zweite Parallele = 0,2 der Basis O p u. s. f. Dasselbe ist im Dreieck c d 9 der Fall, und die übrigen Theile der Transversalen bilden Parallelogramme, in denen die zugeordneten Seiten unter sich und den Originaltheilen O 1, 1 2, 2 3, 3 4 u. s. w. gleich sind.

§. 112. Soll von diesem Maßstabe die Länge 2°,47 abgegriffen werden, so muß diese Linie 2 der größern Abtheilungen und 4 der kleinern enthalten, überdies 7 Theile wie sie die Transversalen geben; man wird also die Zirkelspitze rechts in die Theilungslinie 2 bringen, die Spitze links in die vierte Transversale, und zwar, wegen der Decimale 7, in die siebente Parallele; also ist t q die verlangte Linie.

Und soll eine gegebene Länge mittels dieses Maßstabes gemessen werden, so faßt man sie genau in den Zirkel, sucht diejenige Senkrechte, von der aus die Zirkelöffnung links bis in den Transversalmaßstab reicht, geht in der so gefundenen Senkrechten von unten herauf so weit, bis die linke Zirkelspitze womöglich genau in eine Transversale trifft. Ist dies gefunden, so gibt die Zahl der Senkrechten die Ganzen, die der Transversalen (unten) die Zehntel, die der Parallelen (links von unten nach oben) die Hundertstel z. B. r s = 2°,74.

Durch Schätzung nach dem Augenmaße kann man sehr wohl in beiden eben gelösten Aufgaben noch eine dritte Decimale bestimmen, um so mehr, als man die Größen von 0,1 . . . . . 0,9 in dem Maßstabe vor Augen hat, falls

man die Höhe der durch die Transversalen gebildeten kleinen Parallelogramme ihrer Breite gleich gemacht hat, was allemal anzurathen ist. Wäre z. B. die Linie u v abzulesen, so würde man beurtheilen, welcher Theil y u vom Abstande zweier Parallelen wäre; man wird durch Vergleichung mit den Parallelen im Dreieck O O p leicht finden, daß y u = 0,6 der Höhe; daher denn auch die Linie u v um 0,006 länger ist, als y w; y w ist aber = 2,55, also u v = 2,556. Und sollte man eine Linie = 1,152 abgreifen, so nähme man erst 1,15 = e g, setzte zur Transversale 1 g noch die Länge der zweiten Parallele im Dreieck O O p zu, so erhielte man den Punkt k, und h k wäre = 1,152.

Weil man mittels des hier beschriebenen Maßstabes durch Schätzung bis zu 0,001 der Hauptabtheilungen gelangen kann, so heißt dieser Maßstab auch wol ein tausendtheiliger Maßstab.

§. 113. Eine Linie L werde mit einem Maßstabe gemessen, dessen Einheit den Werth e hat, d. h. die Einheit ist gleich e Millimeter, oder gleich e Linien oder sonstigen Einheiten, die auch fingirt sein können; ergibt sich, daß die Linie L l solcher Einheiten enthält, so ist:

$$L = l \cdot e.$$

Ergibt sich dann für dieselbe Linie L und einen andern Maßstab, dessen Einheiten den Werth ε haben, die Zahl λ, so ist:

$$L = \lambda \cdot \varepsilon;$$

also ist dann $$l e = \lambda \varepsilon,$$

oder: $$1) \quad l : \lambda = \varepsilon : e.$$

Die Maße derselben Linie verhalten sich umgekehrt wie die Größe der Einheiten der Maßstäbe.

Ist ein Maßstab verjüngt in dem Verhältniß 1 : e, ein anderer in dem Verhältniß 1 : ε, und bezeichnen e', ε' beziehlich die Größen der Einheiten dieser Maßstäbe, so ist:

$$e' : \varepsilon' = \frac{1}{e} : \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon : e.$$

Die relativen Größen der Einheiten zweier Maßstäbe verhalten sich direct wie die Verjüngungsverhältnisse, umgekehrt wie die Nenner der Verjüngungsverhältnisse. Zufolge (1) verhalten sich dann die Maße derselben Linie, wenn sie mit zwei verschiedenen Maßstäben gemessen wird, umgekehrt wie die Verjüngungsverhältnisse der Maßstäbe, oder direct wie ihre Nenner. Sind also e, ε die Nenner der Verjüngungsverhältnisse, l, λ die Maße der mit beiden Maßstäben gemessenen Linien, so ist:

$$2) \quad l : \lambda = \frac{1}{\varepsilon} : \frac{1}{e} = e : \varepsilon.$$

Aehnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Transversalen. Sind also f und φ die Flächeninhalte, l, λ zwei homologe lineare Maße zweier ähnlicher Figuren, so ist:

$$f : \varphi = l^2 : \lambda^2$$

oder

$$3)\ l : \lambda = \sqrt{f} : \sqrt{\varphi}.$$

Die linearen Maße ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Flächenmaßen.

Sind also l, λ die linearen Maße einer und derselben Figur nach zwei verschiedenen Maßstäben, so hat man für die daraus berechneten Flächenmaße die Proportion (3). Wegen (2) aber ist dann, wenn e, ε die vorige Bedeutung haben:

$$4)\ e : \varepsilon = \sqrt{f} : \sqrt{\varphi}.$$

Werden die Flächen einer Figur nach verschiedenen Maßstäben gemessen und berechnet, so verhalten sich die Nenner der Verjüngungszahlen der Maßstäbe wie die Quadratwurzeln der gefundenen Flächenmaße.

§. 114. **Aufgabe 1.** Für ein gegebenes Verjüngungsverhältniß 1 : n und ein vorgeschriebenes Maß, dessen übliche Eintheilung bekannt ist, einen verjüngten Maßstab zu entwerfen.

Auflösung. Da die Verjüngung wie 1 : n sein soll, so stellt eine kleinste Einheit des vorgeschriebenen Maßes auf dem Maßstabe n eben solche Theile in der Wirklichkeit vor (z. B. 1 Millimeter stellt n Millimeter vor, 1 Linie n Linien). Es enthalte nun die größte Einheit des vorgeschriebenen Maßes m von den kleinsten Einheiten (1 Meter = m Millimeter, 1 Ruthe = m Linien), so werden m kleinste Einheiten (eine größte Einheit) m n kleinste Einheiten oder n der größten Einheiten vorstellen. Folglich wird 1 größte Einheit in der Wirklichkeit durch $\frac{m}{n}$ kleinste Einheiten auf dem Maßstabe vorgestellt. Da m und n in der Regel durch große Zahlen ausgedrückt sind, so suche man ihren größten gemeinsamen Theiler t und hebe den Bruch $\frac{m}{n}$ durch t; man erhalte dadurch den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ in kleinern Zahlen. Hieraus, oder durch die Verwandlung von $\frac{\mu}{\nu}$ in einen Decimalbruch wird man sehen, ob eine Einheit der größern Art eine solche Größe gibt, die sich mit dem Zirkel noch abnehmen läßt. Ist dies der Fall, so kann der Maßstab einzelne größere Einheiten (Meter, Ruthen u. s. w.) angeben. Ist dagegen der Werth von $\frac{\mu}{\nu}$ so klein, daß $\frac{\mu}{\nu}$ Einheiten der kleinsten Art sich nicht mit Sicherheit mittels des Zirkels abnehmen lassen, so muß man sich damit begnügen, 10 oder 100

Einheiten (Meter, Ruthen u. s. w.) durch eine Einheit des Maßstabes dargestellt sein zu lassen.

Um nun die richtigen Theile auf die zuverlässigste Art zu bekommen, entnehme man einem richtigen Maßstabe μ Einheiten der kleinsten Art, trage sie auf das Papier ab und suche nun die etwa vorhandenen einfachen Factoren von ν; f, f', f''..... seien diese Factoren von ν, so theile man die Länge μ erst in f, jeden dieser Theile in f', dann jeden hiervon in f'' gleiche Theile u. s. w. Hat ν die Factoren 2 und 5, und man läßt diese bei der Theilung unberücksichtigt, so ist einer der so gebildeten Theile gleich 10 Meter oder Ruthen; und ließe man die Factoren $2^2 \cdot 5^2 = 100$ weg, so erhielte man den Werth von 100 Einheiten. Hätte aber ν zwar 5 zum Factor, aber 2 nicht, so könnte man 2ν statt ν nehmen und die Factoren 2 und 5 bei der Theilung übergehen.

Beispiel 1. Man hat als Grundmaß die mecklenburgische Ruthe zu 16 Fuß mit der Duodecimaltheilung des Fußes. Es soll ein Maßstab mit der Verjüngung von $^1/_{1500}$ entworfen werden.

$1^\circ = 2304'''$ dd., also ist $m = 2304$, $n = 1500$, $t = 4$, also $\mu = 192$, $\nu = 125$, $\frac{\mu}{\nu} = 1''',536$, folglich kann man einzelne Ruthen darstellen, da $1^1/_2$ Linien dd. sich sehr wohl in den Zirkel fassen lassen. Man entnehme nun dem Grundmaße 192 Linien und theile sie in $125 = 5^3$ gleiche Theile, nämlich erst in 5, dann jeden wieder in 5, und jeden von diesen abermals in 5 gleiche Theile. Wollte man den Werth von 10 Ruthen haben, so würde man zweimal hinter einander durch 5 theilen und einen so erhaltenen Theil doppelt nehmen, oder auch die doppelte Länge von $192'''$ in 5 und wieder in 5 Theile theilen.

Beispiel 2. Es soll ein verjüngter Maßstab für das Verhältniß 1 : 5000 construirt werden; Grundmaß ist die preußische Ruthe und ihre Duodecimaltheilung; es sollen sich aber auch wirklich Duodecimaltheile abnehmen lassen.

$1^\circ = 12^3$ Linien, also $m = 12^3$, $n = 5000$, $t = 8$, also $\mu = 216$, $\nu = 625 = 5^4$, $\frac{\mu}{\nu} = \frac{216}{625} < ^1/_3$ Linie, also wird man einzelne Ruthen nicht abnehmen können; die Haupttheile werden also 10 Ruthen vorstellen müssen. Man trage deshalb die Länge von $2 \cdot 216 = 432$ Linien ab und theile die Länge dreimal hinter einander jedesmal in 5 gleiche Theile, so ist ein solcher Theil = 10 Ruthen. In der ersten Abtheilung links wird dieser Theil in 10 gleiche Theile getheilt, so hat man einzelne Ruthen; um nun einzelne Fuß dd. zu bekommen, zieht man 13 Parallelen mit 12 Zwischenräumen; endlich kann man die Duodecimalzoll auf den Transversalen noch abschätzen.

Aufgabe 2. Eine Linie mit einem Maßstabe vom Verjüngungsverhältniß $1 : e$ gemessen, gibt das Maß l; welches ist ihr Maß, wenn man sie mit einem Maßstabe vom Verjüngungsverhältniß $1 : \varepsilon$ mißt?

Auflösung.
$$l : x = e : \varepsilon$$
$$x = \frac{l \cdot \varepsilon}{e}.$$

Aufgabe 3. Eine Linie gibt, wenn sie mit einem gewissen Maßstabe gemessen wird, das Maß l; mißt man sie mit einem Maßstabe vom Verjüngungsverhältniß $1 : \varepsilon$, so liefert sie das Maß λ. Welches war das Verjüngungsverhältniß des ersten Maßstabes?

Auflösung.
$$l : \lambda = x : \varepsilon$$
$$x = \frac{l \cdot \varepsilon}{\lambda}.$$
$$1 : x = 1 : \frac{l\,\varepsilon}{\lambda}.$$

Beispiel. Wäre zu einem Plane der Maßstab nicht gegeben, und man mäße eine gewisse Linie desselben mit wirklichem Maße und fände sie $= 3''',7$ d., während man aus einem Meßregister hat erfahren können, daß sie, mit dem richtigen Maßstabe des Plans gemessen, $18^{\circ},5$ hält, so ist hier: $\lambda = 3''',7$ d., $l = 18^{\circ},5$, $\varepsilon = 1$, also: $e = \frac{l}{\lambda} = \frac{18{,}5 \cdot 1000}{3{,}7} = 5000$. Das Verjüngungsverhältniß des zum Plane gehörigen Maßstabes war also $1 : 5000$.

Aufgabe 4. Von einer Karte, die im Verhältniß $1 : e$ gezeichnet ist, nimmt man eine gewisse Länge und mißt sie mit einem Maßstabe vom Verhältniß $1 : \varepsilon$, wo sie das Maß λ gibt. Welches ist die Länge dieser Linie nach dem richtigen Maßstabe?

Auflösung.
$$x : \lambda = e : \varepsilon$$
$$x = \frac{\lambda \cdot e}{\varepsilon}.$$

Beispiel. Waren 5000 und 4000 die beiden Maßstäbe, die Länge der Linie, nach dem letzten gemessen, $= 176',9$, so wäre:
$$x = \frac{176'9 \cdot 5000}{4000} = 221',125,$$
wenn sie nach dem für die Karte gültigen ersten Maßstabe gemessen wird.

Aufgabe 5. Man mißt eine gewisse Linie eines Plans mit wirklichem Maße und findet sie gleich λ Einheiten; mißt man die natürliche Horizontalprojection, so ergibt sich die Länge l der größern Einheiten, während m der

ersten Längeneinheiten eine Einheit der letzten Art machen. Welches war das Verjüngungsverhältniß der Karte?

Auflösung. $l : \lambda = x : \varepsilon$
und $\varepsilon = 1$, weil hier wirkliches Maß angewendet worden, also:

$$x = \frac{l}{\lambda}.$$

Aber l muß noch auf die Einheit des Nenners gebracht werden und gibt, darin ausgedrückt, m l, also ist dann:

$$x = \frac{m \cdot l}{\lambda},$$

das Verjüngungsverhältniß also $1 : x = 1 : \frac{m\,l}{\lambda}$.

Beispiel. Es sei $\lambda = 8''',5$ d., $l = 50,99$, so wird

$$x = \frac{1000 \cdot 50,99}{8,5} = 5998.$$

Da nun aber diese Zahl nie als Verjüngungsverhältniß genommen wird, so muß man schließen, daß dasselbe = 6000 sein soll, und der Unterschied entweder einem Messungsfehler oder der Zusammenziehung des Papiers zuzuschreiben sei.

Aufgabe 6. Auf einer Karte ohne Maßstab ist der Inhalt eines Grundstücks = f verzeichnet. Mißt man dasselbe Grundstück mit wirklichem Maße nach der Karte und berechnet den Flächeninhalt, so findet man denselben = φ. Man soll hieraus den Maßstab der Karte wiederherstellen.

Auflösung. $x : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{\varphi}$

$$x = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{f}{\varphi}}.$$

Also ist denn das Verjüngungsverhältniß $= 1 : \sqrt{\frac{f}{\varphi}}$.

Beispiel. Es sei f = 33151,6 Quadratruthen, $\varphi = 0,53$ Quadratfuß. Für Decimalmaß ist f = 3315160 Quadratfuß, daher $x = \sqrt{\frac{3315160}{0,53}}$ = 2501, wofür unbedenklich 2500 zu setzen ist.

C. Lineale.

§. 115. Lineale spielen unter den Instrumenten der Meßkunde eine wichtige Rolle. Einerseits bieten sie das einzige Mittel dar, auf dem Papier gerade Linien zu ziehen, andererseits dienen sie bei getheilten Kreisen oder Kreisbogen als Weiser, welche den durch eine Messung bestimmten Grad auf

dem getheilten Rand anzeigen; in diesem letztern Falle heißen sie Albidaden. Hier handeln wir nur von den Linealen der ersten Art.

Der Stoff, woraus Lineale zum Ziehen gerader Linien gemacht werden, ist entweder Holz oder Metall. Unter den Holzarten eignet sich, wegen seines gleichmäßigen und feinen Gefüges, besonders das Lindenholz zu diesem Zwecke; wenn es von alten Bäumen genommen und vor der Verarbeitung gehörig ausgetrocknet wird, ist es auch nicht so sehr wie andere Holzarten dem Werfen und Krümmen ausgesetzt, was bei größern Linealen sonst leicht vorkommt. Kleinere, die blos zum Zwecke des Zeichnens gebraucht, und daher nicht mit ins Feld genommen und der Luftfeuchtigkeit ausgesetzt werden, kann man auch von Buchsbaum oder Ebenholz machen; von diesen aber sprechen wir hier eigentlich gar nicht, sondern nur von den zu Aufnahmen dienenden Linealen. Um hölzerne Lineale der Luftfeuchtigkeit weniger zugänglich zu machen, könnte man sie allerdings mit Oel oder Firniß tränken; das würde aber den Nachtheil haben, daß das Papier davon zu sehr beschmuzt würde; am ehesten möchte es noch angehen, das Lineal zu poliren, aber die Kanten, denen entlang die Linien gezogen werden, davon frei zu lassen.

Eisen und Stahl eignen sich zu Linealen nur dann, wenn sie stets in Zimmern und ganz trockenen Räumen gebraucht werden; im Freien gebraucht, würden sie bald rosten; für Lineale, die im Freien, bei Aufnahmen dienen sollen, eignet sich unter allen Metallen, wenn man vom zu theuern Silber absieht, das Messing am besten, weil es die Eigenschaften besitzt, welche es zu leichtem und genauem Bearbeiten geschickt machen, und doch auch wieder hart genug ist, um beim längern Gebrauche nicht zu sehr abgenutzt zu werden. Messingene Lineale dürfen aber nie aus gewalzten Platten gemacht, sondern müssen gegossen werden, weil das stärkste gewalzte Messing doch zu dünn ist und sich beim Gebrauche krümmen würde. Daß messingene Lineale dauerhafter sind als hölzerne, leidet keinen Zweifel; man hat aber gegen sie nicht ganz mit Unrecht eingewendet, daß sie bei öfterm Verschieben und Reiben auf dem Papier dieses beschmuzen; daher werden ihnen die hölzernen von manchen vorgezogen.

Lineale für den Feldgebrauch müssen eine solche Größe haben, daß man über das ganze Papier damit fortreichen kann; da nun das Papier gewöhnlich auf der Meßtischplatte aufgespannt und so groß ist wie diese, so richtet sich die Länge des Lineals nach der Größe der Meßtischplatte. Die größten werden nie über $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß lang gemacht; sie bekommen eine Breite von $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll und 3 bis 4 Linien, messingene 2 bis 3 Linien Dicke. Jede Fläche soll eine Ebene bilden und die Kanten müssen ganz gerade sein. Die eine Kante wird abgeschrägt, jedoch sollte es an der Kante immer noch

$^3/_4$ bis 1 Linie dick bleiben. Bei messingenen Linealen wird die abgeschrägte Kante gewöhnlich matt versilbert.

§. 116. Jedes Lineal muß vor dem Gebrauche geprüft werden: 1) ob seine Flächen richtige Ebenen bilden; 2) ob die zum Ziehen der Linien bestimmte Kante genau gerade sei.

Die Ebenheit der Flächen prüft man durch bloßes Darüberhinsehen, oder, wenn man eine zuverlässige Ebene besitzt, dadurch, daß man das Lineal darauflegt und zusieht, ob es überall und in allen Punkten der untern Fläche die Ebene gleichmäßig berühre. Jede Abweichung davon würde das Linienziehen unsicher machen. Ein in dieser Hinsicht fehlerhaftes Lineal ist entweder nach unten hohl, wenn es an den Enden aufliegt, aber in der Mitte nicht; oder es ist nach oben hohl, dann liegt es in der Mitte auf, aber an beiden Enden nicht; oder endlich ist es windschief, wenn es an drei Ecken aufliegt, aber an der vierten nicht.

Hölzerne Lineale, die mit einem dieser Fehler behaftet sind, müssen für unbrauchbar angesehen werden; messingene kann, bei größern Abweichungen von der Ebenheit, nur der Mechanikus berichtigen; kleinere Fehler dieser Art beseitigt man durch vorsichtiges Biegen; windschiefe Lineale dürften indeß jeder Berichtigung Trotz bieten.

Ob die Kante des Lineals gerade sei oder nicht, erfährt man dadurch, daß man auf glatt ausgespanntem Papier mit einem fein schneidenförmig zugespitzten Bleistift, oder mit der Reißfeder und Tusche eine feine Linie längs derselben zieht, dann die Linealkante von der andern Seite der Linie an ihre äußersten Punkte anlegt, nochmals eine Linie zieht und untersucht, ob beide Linien in allen Punkten zusammenfallen. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist das Lineal nicht gerade. Die Abweichung kann darin bestehen, daß die ganze Kantenlinie nach innen oder nach außen gewölbt ist, oder auch darin, daß sie zwar ihrer Hauptrichtung nach gerade ist, aber in einzelnen Theilen von der Geraden abweicht, ein- und ausgebogen, eigentlich zerhackt ist.

Die Berichtigung eines solchen Lineals geschieht, wenn das Lineal von Holz ist, durch einen geschickten Tischler mit dem Hobel, besonders wenn der Fehler eine bedeutende Größe erreicht hat. Dem, der dieses Geschäft nicht durch lange Uebung erlernt hat, möchte das Abhobeln wenigstens nicht in dem Grade gelingen, wie dies bei einem Lineale der Fall sein sollte. Dagegen kann er sehr wohl dem Uebel durch Schleifen abhelfen, besonders wenn der Fehler nicht sehr bedeutend ist; bei Metalllinealen muß dies unter allen Umständen durch Schleifen geschehen. Die Einrichtung und das Verfahren sind bei Holz- und Metalllinealen dieselben, nur das Schleifmittel ist verschieden. Da der Fall oft vorkommt, so mag beides umständlich beschrieben werden, um so mehr, als sich schwerlich irgendwo anders eine gedruckte Anleitung finden dürfte.

Um ein Lineal richtig gerade zu schleifen muß man drei Lineale von gleichen Dimensionen und gleichem Stoff haben, das eigentlich zu schleifende und noch zwei Hülfslineale; ersteres heiße A, die andern seien B und C. Außerdem gebraucht man zwei starke Stäbe von wenigstens gleicher Länge mit den Linealen und etwas größerer Breite. Eins dieser Lineale, z. B. A, spanne man nun mit der zu verbessernden Kante nach oben so zwischen die Stäbe (Fig. 128), daß sie zwischen sich eine Rinne von der Dicke der Lineale bilden; das Befestigen kann z. B. mittels mehrerer Schraubzwingen von gleichen Dimensionen geschehen, so daß das Ganze auf einem Tische oder einer Werkbank fest aufliegt. Die Rinne bildet nun die Bahn für das Schleifen; in diese Bahn streue man, wenn man es mit hölzernen Linealen zu thun hat, durch Sieben gereinigten und von allen gröbern Körnern befreiten Sand, bei messingenen Linealen mittelfeinen Schmirgel, lege das Lineal B in die Bahn und schleife, d. h. bewege das obere Lineal mit Anwendung eines mäßigen und der ganzen Länge nach gleichen Drucks über das untere, feste Lineal hin und her. Die Unebenheiten werden sich dadurch zwar bald abschleifen; aber theils wegen nicht ganz gleichen Drucks auf alle Theile, theils weil einige Stellen des Holzes (oder Metalls) oft weicher sind als andere, wird es sich meistens ereignen, daß das eine Lineal sich concav ausschleift, daher denn das andere convex wird. Mit einem einzigen Hülfslineal ist es daher nie möglich, ein anderes gerade zu schleifen. Man nehme deshalb jetzt A heraus, spanne B in gleicher Weise ein, wie vorhin A, und schleife B mit dem dritten Lineale C. War nun das erste Mal B z. B. convex, also A concav geworden, so kann C wenigstens nicht wieder convex werden, es muß also eine mit A gleichartige Krümmung annehmen. Schleift man also nun wieder A mit C, so müssen sich die Krümmungen beider gegenseitig abschleifen, und ehe sie entgegengesetzt gekrümmt werden können, müssen beide erst ganz gerade werden, und es kommt nur darauf an, den richtigen Zeitpunkt, der Operation ein Ende zu machen, zu treffen. Durch einige Versuche, zwischen welchen man die Lineale wiederholt theils auf die oben angegebene Weise, theils durch Aufeinanderlegen der geschliffenen Kanten prüft, wird man endlich zum Ziele gelangen. In diesem Falle entferne man Sand und Schmirgel ganz und gar, und schleife Holz mit fein gesiebtem Bimsstein, Messing mit dem feinsten geschlemmten Schmirgel nach. Um aber zu verhindern, daß durch fortgesetztes Schleifen sich nicht wieder eine convexe und eine concave Kante bilde, müssen vor dem Wechsel des Schleifmittels erst alle drei Lineale gerade gewesen sein, und bei Anwendung des neuen Schleifmittels muß man dieselbe Abwechselung machen,

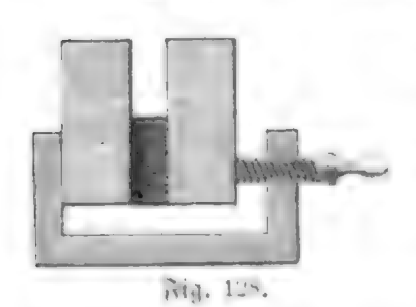


Fig. 128.

wie vorher. Etwas sicherer ginge man, wenn man noch ein viertes Lineal D anwendete; sind nämlich A und C bereits gerade, so schleife man A mit B und mit D, dann B mit D; dann beim Nachschleifen A mit B, B mit C, endlich A mit C. Bei einiger Uebung und Aufmerksamkeit gelingt es aber auch mit zwei Hülfslinealen.

Noch mag bemerkt werden, daß kleinere hölzerne Lineale sich auf eben gelegtem, feinem Sandpapier, messingene auf Schmirgelpapier eben schleifen lassen; die zum gewöhnlichen Zeichnen benutzten Lineale pflege ich von Zeit zu Zeit so zu verbessern.

Messinglineale sind mit Schellackfirniß überzogen, um das Messing vor der Oxydation zu schützen. Durch das Schleifen wird dieser Ueberzug unfehlbar beschädigt; man wasche daher vor Beginn der Arbeit den sämmtlichen Firniß mit heißem Spiritus herunter. Nach beendigter Arbeit muß man dann das Lineal selbst wieder lackiren. Dies geschieht auf folgende Weise: man erhitze das Lineal nur ganz wenig über Kohlenfeuer, so daß es sich höchstens lauwarm anfühlt, streiche dann den Lack mit einem etwas breiten Pinsel von feinen Haaren überall gleichmäßig darauf, indem man es während der Arbeit immer in einiger Entfernung über den Kohlen hält. Da man es aber an irgend einer Stelle halten muß, der frisch aufgestrichene Lack aber nicht berührt werden darf, so lasse man die schmalen Kanten einstweilen unlackirt, fasse es sorgfältig bei diesen an und trockne den Lack allmählich bei gelinder Wärme. Ist alles trocken — oder noch besser am folgenden Tage — lackire man dann die Kanten für sich, wobei man das Lineal bei den vorher lackirten Stellen fassen darf. Der abgeschrägte, versilberte Rand der Messiglineale wird nicht gefirnißt.

D. Der Nonius.

§. 117. Wenn man eine Linie mit einem Maßstabe mißt, so wird es sich in den meisten Fällen ereignen, daß, wenn die Anfangspunkte der Linie und des Maßstabes zusammengelegt sind, der Endpunkt der Linie nicht genau auf einen Theilstrich des Maßstabes fällt, wenn auch der Maßstab in noch so kleine Theile getheilt wäre. Ist a b (Fig. 129) ein Maßstab, m n die zu messende Linie, so legt man m mit a zusammen, und da n zwischen den sechsten und siebenten Theil von a b fällt, so ist die Länge von m n = 6 Maßtheilen + c n, und diese Länge c n noch zu bestimmen. Ganz dasselbe kann auf den Bogen m n (Fig. 130) angewendet werden, wenn a b ein getheilter

Fig. 129.

Fig. 130.

messender Bogen ist. Die Vorrichtung, deren man sich bedient, kleine Linien- oder Bogentheile, die kleiner sind als ein kleinster Theil des Maßstabes oder messenden Bogens, zu messen und in Bruchtheilen dieser kleinsten Theile auszudrücken, heißt ein Nonius oder Vernier. *)

§. 118. Man erreicht diesen Zweck einfach dadurch, daß man neben dem Maßstabe oder der Kreistheilung einen nur wenige Theile enthaltenden Maßstab oder getheilten Bogen so anbringt, daß letzterer sich längs des erstern verschieben läßt, und daß n Theile des letztern $n + 1$ oder $n - 1$ Theile des erstern ausmachen. Dieser kleinere Maßstab oder getheilte Bogen heißt dann eigentlich der Nonius oder Vernier.

Theilt man $n + 1$ Theile des Maßstabes auf dem Nonius in n Theile, so sind die Noniustheile größer als die Maßstabtheile. Legt man also den Anfang der Noniustheilung mit einem Striche der andern Theilung zusammen, so wird jeder Noniustheil über den gleichvielten Theilstrich des Maßstabes übergreifen. Theilt man aber $n - 1$ Theile des Maßstabes auf dem Nonius in n Theile, so sind die Noniustheile kleiner als die Maßstabtheile, und jeder Noniustheil wird bei gleichem Anlegen, wie oben, hinter dem gleichvielten Maßstabtheile zurückstehen. Ein Nonius der ersten Art heißt daher ein vortragender, ein Nonius der zweiten Art ein nachtragender.

Bezeichnen wir einen Maßstabtheil mit M, einen Noniustheil mit N, so ist:

---

*) Der Portugiese Pedro Nuñez (Petrus Nonius) gab im Jahre 1492 ein Verfahren zur Messung kleiner Winkel an; er zog auf der Ebene eines Quadranten 45 concentrische Bogen, von denen jeder selbst ein Quadrant war, theilte den ersten in 90 gleiche Theile, den zweiten in 89, den dritten in 88 u. s. w. Ein Theil des zweiten Bogens betrug also $1\frac{1}{89}^\circ = 1^\circ\, 0'\, 40'',4$. Führt man ein Lineal um den Mittelpunkt des Quadranten, so wird es stets auf irgend einen Theilstrich fallen und der abgeschnittene Bogen läßt sich allemal genau bestimmen. Dasselbe Verfahren läßt sich auf gerade Linien auch anwenden, wenn man mehrere Gerade parallel zieht, zur gemeinsamen Begrenzung aller an jedem Ende ein Loth auf sie errichtet und dann die erste etwa in 100, die zweite in 99, die dritte in 98 gleiche Theile theilt u. s. w. Jeder Theil ist dann in der ersten $\frac{1}{100}$, in der zweiten $\frac{1}{99}$ u. s. f. der ganzen Linie, welche die Maßeinheit vorstellen mag; führt man also eine Gerade mit dem einen Endpunkte über das eine Loth, und die Gerade selbst parallel mit der getheilten Linie fort, so wird ihr anderer Endpunkt mit irgend einem Theilpunkte zusammenfallen und ihre Länge wird sich dadurch leicht bestimmen lassen. Im Jahre 1631 machte ein niederländischer Schloßhauptmann Pierre Vernier zu Dornans dieselbe Erfindung nochmals, wenn er nicht gar die des Nuñez schon kannte. Daher die beiden Namen der Vorrichtung. Der Streit aber zwischen Deutschen und Franzosen über das Eigenthum der Erfindung ist ein müßiger, da sie weder den einen noch den andern angehört.

beim vortragenden Nonius $n \cdot N = (n + 1) M$,

also: $$N = \frac{n+1}{n} M = M + \frac{1}{n} M;$$

beim nachtragenden Nonius $n \cdot N = (n - 1) M$,

also: $$N = \frac{n-1}{n} \cdot M = M - \frac{1}{n} M.$$

In beiden Fällen unterscheidet sich also ein Noniustheil von einem Maßstabtheile um $\frac{1}{n}$ dieses letztern, und der Unterschied zwischen beiden Noniusarten ist nur der, daß beim vortragenden der Noniustheil um $\frac{1}{n}$ eines Maßstabtheils größer, beim nachtragenden um ebenso viel kleiner ist. Diese Größe $\frac{1}{n} \cdot M$, um welche sich ein Noniustheil von einem Maßstabtheile unterscheidet, heißt die **Angabe des Nonius**. Heißt solche A, so ist:

beim vortragenden Nonius: $A = N - M = \frac{1}{n} M$,

beim nachtragenden Nonius: $A = M - N = \frac{1}{n} M$.

Der Unterschied U zwischen m Theilen beider Theilungen ist sonach in beiden Fällen: $$U = m \cdot A = \frac{m}{n} \cdot M,$$

d. h. gleich der $m$fachen Angabe des Nonius.

§. 119. Es sei L (Fig. 131) eine zu messende Länge, MN ein Maßstab, PQ der zugehörige Nonius, und es sei L so an den Maßstab MN gelegt, daß das eine Ende von L mit dem Anfangs- oder Nullpunkte des Maßstabes zusammenfällt, und es werde der Nonius PQ so längs des Maßstabes MN verschoben,

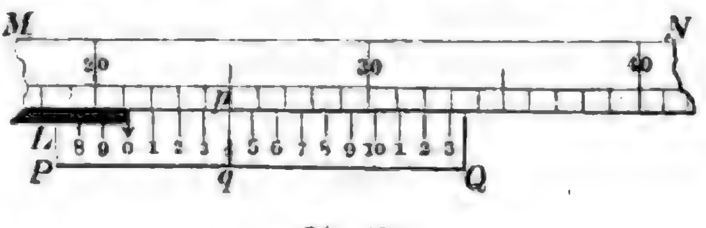


Fig. 131.

daß sein Nullpunkt mit dem Endpunkte von L zusammentreffe, die Theile des Nonius seien aber nach derselben Richtung gezählt, wie die Theile des Maßstabes (in der Fig. 131 beide von links nach rechts), so ist $L = 21$ Maßstabtheilen, vermehrt noch um die Länge $c\,O$. Fällt nun in dieser Lage des Nonius, den wir, wie die Zeichnung zeigt, als einen nachtragenden annehmen, der $q$te Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche p des Maßstabes zusammen, so steht der Nullpunkt des Nonius um $q \cdot A$ hinter dem nächstfolgenden Theilstrich des Maßstabes; die Länge $c\,O$ beträgt also $q \cdot A$ oder $\frac{q}{n} M$; also ist die ganze Länge von $L = \left(21 + \frac{q}{n}\right) M$, in der Zeichnung $= \left(21 + \frac{4}{n}\right) M$. Da der Nullpunkt des Nonius den Theil begrenzt, der

zu der durch den Maßstab bestimmten Länge hinzugefügt werden muß, so heißt dieser Nullpunkt auch der Index.

Ist in Fig. 132 ein vortragender Nonius, und bezeichnen alle Buchstaben dasselbe wie in der vorigen Figur, sind aber die Theile des Nonius diesmal nach entgegengesetzter Richtung von denen des Maßstabes gezählt; so denke man sich die Länge L wieder vom Nullpunkte des Maßstabes anfangend und den Nonius so gelegt, daß sein Nullpunkt mit dem andern Ende von L zusammenfalle; endlich falle der qte Theilstrich des Nonius mit dem Theilstriche p des Maßstabes zusammen; es wird dann der Nullpunkt des Nonius um $q \cdot A = \frac{q}{n} \cdot M$ über den entsprechenden Theilstrich c des Maßstabes vorstehen; daher ist die Länge $L = \left(34 + \frac{q}{n}\right) M$, in der Zeichnung $= \left(34 + \frac{8}{n}\right) M$.

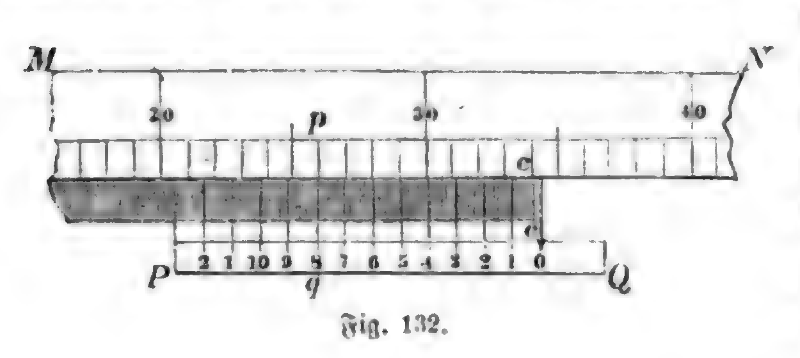


Fig. 132.

Man sieht hieraus, daß beim nachtragenden Nonius die Noniustheile in derselben Richtung gezählt werden müssen, wie die Theile des Maßstabes, beim vortragenden in entgegengesetzter Richtung. In allen Fällen liest man vom Nonius die Entfernung des Index von dem nächst vorhergehenden Theilstrich des Maßstabes dadurch ab, daß man den Theilstrich des Nonius aufsucht, der mit einem Theilstriche des Maßstabes zusammenfällt, und die auf dem Nonius dabeistehende Zahl mit der Angabe des Nonius multiplicirt. Das so gewonnene Product ist noch zu der Länge zu addiren, welche man auf dem Maßstabe bis zu dem, dem Index vorangehenden Striche abgelesen hat.

§. 120. Es ereignet sich oft, daß kein Theilstrich des Nonius mit einem Striche des Maßstabes zusammenfällt. Dann liegt beim nachtragenden Nonius allemal ein ganzer Noniustheil zwischen zwei nächst auf einander folgenden Strichen des Maßstabes, beim vortragenden ein Maßstabtheil zwischen zwei nächst auf einander folgenden Strichen des Nonius. Es seien dies die Striche q und q + 1 für den nachtragenden Nonius (Fig. 133), und es sei x die Entfernung des qten Noniusstrichs von dem nächstvorhergehenden Striche des Maßstabes. Fiele q mit dem nächstvorhergehenden Strich zusammen, so wäre die Ablesung $= q \cdot A = \frac{q}{n} \cdot M$; diese muß aber

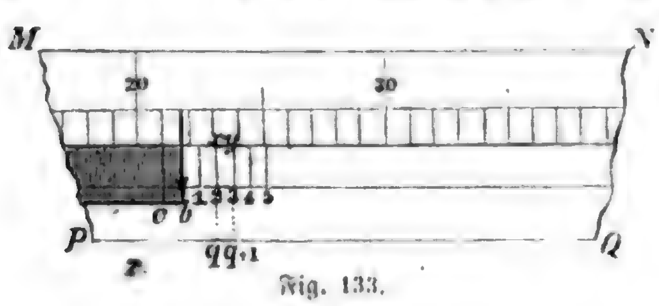


Fig. 133.

nun offenbar um die Größe x vermehrt werden, weil, wenn q nach dem Theilstrich hinrückt, cO um x kleiner wird; der wahre Werth von cO ist also $q \cdot A + x$. Man findet aber x, indem man seine Größe mit dem Abstande y des $(q + 1)$sten Theilstrichs des Nonius vom nächstfolgenden des Maßstabes vergleicht; fände man:

$$x : y = v : w,$$

so wäre, da $x + y = A$, also $y = A - x$,

$$x : A - x = v : w$$

$$x : A = v : v + w$$

$$x = \frac{v}{v + w} \cdot A;$$

also $$cO = q \cdot A + \frac{v}{v + w} \cdot A = \left(q + \frac{v}{v + w}\right) A.$$

Man sieht ein, daß für den entsprechenden Fall beim vortragenden Nonius das Verfahren gerade ebenso ist; $q \cdot A$ muß noch um die Größe x vermehrt werden, um cO zu geben (Fig. 134); hier fassen zwei Noniusstriche x, y einen Maßstabtheil zwischen sich.

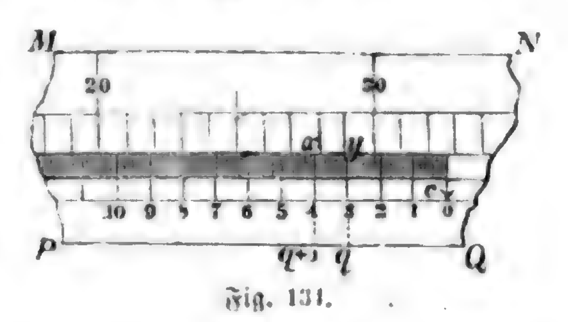


Fig. 134.

§. 121. Bei sehr feinen Theilungen stehen die Striche einander so nahe, daß sie durch Lupen abgelesen werden müssen. Hierbei kann es oft noch zweifelhaft werden, welche Striche man als coincidirend ansehen soll. Um zunächst wenigstens die Gegend zu bestimmen, wo die Coincidenz sich finden muß, wenn überhaupt eine solche da ist, beobachte man die Lage des Index zwischen den beiden nächstgelegenen Strichen des Maßstabes; liegt er näher am vorangehenden Theilstrich als am folgenden, so hat man die Coincidenz zweier Theilstriche in der ersten Hälfte des Nonius zu suchen, im entgegengesetzten Falle in der letzten Hälfte. Durch eine noch genauere Schätzung kann man mit dieser Bestimmung auch noch weiter gehen, wie jetzt jedermann leicht beurtheilen wird.

Hat man zwei Theilstriche gefunden, welche zu coincidiren scheinen, so beobachte man auch noch die rechts und links nächst anliegenden und sehe zu, ob sich da gleiche Abweichungen (= A) finden; sind die Abweichungen zu beiden Seiten gleich, so coincidirt der mittlere Strich, sonst muß einer dieser beiden dafür genommen werden, oder aber, es findet gar keine Coincidenz statt und die gesuchte Größe muß wie oben gezeigt bestimmt werden. Wegen dieser Vergleichung der Nachbarstriche erhalten die Nonien über O und über n hinaus noch einige Striche mehr, welche man die Excedenz des Nonius nennt. Beim Ablesen des Nonius muß man, um die Parallaxe der Seh-

linie, und damit Fehler der Ablesung zu vermeiden, stets nahe senkrecht auf die Ebene der Theilung sehen, was durch die oben (§. 86) beschriebene Lupe erleichtert wird.

§. 122. Es leuchtet nun von selbst ein, wie man einen Nonius auch bei Kreistheilungen anwenden könne. Der Nonius befindet sich auf einem mit dem getheilten Rande concentrischen Kreisbogen, der sich längs desselben so verschieben läßt, daß beide Theilungen stets genau an einander anschließen. Wäre der Rand in ganze Grade getheilt, und sollte der Nonius eine Minute zur Angabe haben, so würde man 59 Grade auf dem Nonius in 60 gleiche Theile theilen, wenn es ein nachtragender, oder 61 Grade in 60 gleiche Theile, wenn es ein vortragender Nonius werden soll. Denn es ist hier $M = 1^\circ = 60'$, $n = 60$, beim nachtragenden $N = \frac{59}{60}$, $M = 59'$, beim vortragenden $N = \frac{61}{60}$, $M = 1^\circ\ 1'$; also ist in beiden Fällen $A = \pm (M - N) = 1'$.

Ist ein Kreisrand in halbe Grade getheilt und sind auf dem Nonius 29 oder 31 dieser Theile in 30 getheilt, so ist $M = 30'$, $N = \frac{29}{30} \cdot 30' = 29'$, oder $N = \frac{31}{30} \cdot 30' = 31'$, also $A = 1'$.

Ist der Rand in $\frac{1}{6}$ Grade getheilt und sind 59 dieser Theile auf dem Nonius in 60 getheilt, so ist $M = 10'$, $N = \frac{59}{60} \cdot 10' = \frac{59}{60} \cdot 10 \cdot 60'' = 590''$; da $M = 10' = 600''$, so ist $A = 10''$.

In ähnlicher Weise wird man jeden andern Fall zu beurtheilen wissen. Es mag nur noch erinnert werden, daß, wenn man eine Theilung mit Nonius in die Hände bekommt und gebrauchen soll, man sich immer erst überzeugen muß, welches die Angabe des Nonius sei. Man sehe also zunächst zu, welches die Theilung des Randes, ob dieselbe ganze, halbe, Drittel-, Viertelgrade u. s. w. unmittelbar angebe, dann stelle man den Index genau auf einen Theilstrich des Randes (am besten auf 0), und sehe zu, welche Striche dann wieder zusammenfallen, zähle die Theile zwischen beiden Coincidenzen auf beiden Theilungen, so kann man daraus die Angabe nach der oben gegebenen Anleitung berechnen.

E. Theilungen.

§. 123. An Meßinstrumenten kommen vielfach Theilungen vor; sie können geradlinig oder kreisförmig sein. Letztere, die sogenannten Kreistheilungen sind an Meßwerkzeugen bei weitem häufiger als die geradlinigen, welche nur etwa auf Maßstäben sich vorfinden. Da von diesen noch besonders

gehandelt werden muß, so beziehen wir uns hier hauptsächlich nur auf die Kreistheilungen.

Ein getheilter Kreisbogen heißt ein Limbus oder Rand. Da die Centesimaltheilung des Kreises in Deutschland nie üblich geworden, so können wir uns hier auf die Sexagesimaltheilung beschränken. Die Theilungen geben, je nach der Größe des Radius des getheilten Randes, direct entweder blos ganze Grade, oder auch noch halbe, Drittel-, Viertelgrade u. s. w. an. Die Gradzahl ist blos bei jedem zehnten, oder höchstens bei jedem fünften Grade beigesetzt. Um aber beim Ablesen doch keine Schwierigkeiten zu haben, sind die übrigen Theilstriche durch verschiedene Länge deutlich von jedem zehnten und fünften Grade unterschieden, die Striche der Bruchtheile des Grades kürzer als die der Ganzen, die Viertel kürzer als die Halben u. s. w.; die Striche sollen alle von gleicher Dicke und, obgleich fein, doch deutlich sichtbar sein. Um die Spiegelung des Messings zu vermeiden, wird der getheilte Rand matt versilbert und nach geschehener Theilung mit Druckerschwärze überrieben, die sich beim Putzen der Fläche in die vertieften Striche einreibt und darin unverwüstlich antrocknet. Die schwarzen Striche sind auf dem matt weißen Grunde klar zu sehen und leicht zu zählen. Die Sichtbarkeit der feinen Striche hängt indeß gar sehr von dem einfallenden Lichte ab, und es kann, aller Vorsicht ungeachtet, doch leicht noch eine Spiegelung entstehen, die das Auge blendet; man bringt daher Blendscheiben an, welche beliebig gestellt werden können; sie bestehen aus kleinen Messingrahmen, in die man früher schwach matt geschliffenes Glas faßte, die man jetzt besser mit weißem Seidenzeuge überzieht; das Licht wird dadurch gedämpft und dem Auge weniger störend gemacht. Die Ebene des Nonius fällt entweder mit der des Limbus in eine Ebene zusammen, oder ist schwach dagegen geneigt; bei größern Instrumenten sind beide Ebenen 15 — 20° gegen die Horizontale geneigt.

Früher wurden die Theilungen der Kreisränder mit dem Zirkel gemacht; seit der Erfindung der Kreistheilmaschinen werden sie blos von einem größern getheilten Kreise auf den zu theilenden Limbus von kleinerm Radius übergetragen, und werden somit bei geringerer Mühe weit genauer, auch ist man durch diese ausgezeichneten Werkzeuge in Stand gesetzt, die Theilung viel weiter, bis zu kleinern Bruchtheilen des Grades fortzusetzen. Dessenungeachtet darf man nicht annehmen, daß durch Theilungen beliebig kleine Theile des Grades angegeben und abgelesen werden können; dies ist, wegen der Breite der Theilstriche, selbst bei Anwendung der besten Nonien, nicht möglich, wie sich leicht zeigen läßt. Es sei r der Radius des Kreises, nach einem beliebigen Längenmaße gemessen, so ist $r\pi$ die halbe Peripherie in demselben Maße, also:

$$r\pi = 180^\circ = 648000''$$
$$r = \frac{648000}{\pi} = 206264'',8 = \omega''$$
$$1'' = \frac{r}{\omega},$$

d. h. dieser Quotient drückt die Breite einer Secunde auf dem Limbus vom Radius r in demselben Maße aus, in welchem r ausgedrückt ist. Heißt b die Breite eines Theilstrichs in demselben Maße, so nimmt diese Breite auf dem Limbus

$$b : \frac{r}{\omega} \text{ Secunden} = \frac{\omega \cdot b}{r} \text{ Secunden}$$

ein. Wäre r = 4 Zoll = 40 Linien d., b = 0,01 Linien, so würde jeder Theilstrich

$$\frac{\omega \cdot 8 \cdot 0{,}01}{40} \text{ Secunden} = 51{,}5 \text{ Secunden}$$

bedecken. Die Genauigkeit der Theilung würde also bei einem Radius von 4 Zoll nicht über ganze Minuten hinauszutreiben sein. Feinere Theilstriche aber als die hier angenommenen dürfte es kaum auf Messingflächen geben.

§. 124. Ein richtig getheilter Kreis oder Kreisbogen ist ein so werthvoller Gegenstand, daß dem Besitzer desselben daran gelegen sein muß, für seine Erhaltung keine Mühe und Sorgfalt zu scheuen.*) Man wird daher einen solchen Apparat möglichst gegen alle Unfälle zu sichern suchen, vor allem gegen Staub, gegen das Zerkratzen, was durch aufgefallenen Sand u. dgl. leicht herbeigeführt wird; ebenso ist beim Aufstellen und Verpacken des Instruments Sorge zu tragen, daß der Limbus nicht verbogen werde, oder gar Stöße mit harten Körpern bekomme. Staub wische man nicht mit Tüchern fort, sondern lieber mit einem feinen Haarpinsel, dann erst putze man mit einem feinen leinenen Tuche sanft nach.

---

*) Den materiellen Werth solcher Theilungen wird man aus folgendem Preisverzeichnisse, das ich, in Ermangelung eines Originaltarifs, Schneitler's „Instrumente der Meßkunst" entnehme, einigermaßen ersehen. Das preußische Handelsministerium hat die Oertling'sche Kreistheilmaschine käuflich an sich gebracht und läßt damit durch die königliche Normal-Aichungscommission Bestellungen auf Kreistheilungen zu folgenden Preisen ausführen:

1/2°,	720 Striche,	1 1/2 Pf. für jeden Strich;	3 Thlr.	— Sgr.	für den ganzen Kreis.
1/3°,	1080 „	1 1/2 „ „ „ „	4 „	15 „	„ „ „ „
1/4°,	1440 „	1 1/2 „ „ „ „	6 „	— „	„ „ „ „
1/6°,	2160 „	1 1/2 „ „ „ „	9 „	— „	„ „ „ „
1/12°,	4320 „	1 1/2 „ „ „ „	18 „	— „	„ „ „ „
1/15°,	5400 „	2 „ „ „ „	30 „	— „	„ „ „ „
1/20°,	7200 „	2 „ „ „ „	40 „	— „	„ „ „ „
1/30°,	10800 „	2 1/2 „ „ „ „	75 „	— „	„ „ „ „
1/60°,	21600 „	2 1/2 „ „ „ „	150 „	— „	„ „ „ „

§. 125. Jede Kreistheilung muß vor ihrem Gebrauche geprüft werden. Dies geschieht auf verschiedene Weise, je nachdem die Theilungen mit Nonien versehen sind oder nicht. Theilungen ohne Nonien erfordern überhaupt nicht den höchsten Grad der Genauigkeit, weil die Art des Ablesens doch eben nicht weiter zu gehen erlaubt als die directe Angabe der Theilung geht. Bei kleinern Kreisen und Kreisbogen ohne Nonien nehme man einen Federzirkel, d. h. einen Zirkel, bei dem die Stelle des Gewindes durch eine elastische Feder eingenommen wird, und dessen Schenkel sich durch eine Schraube in jeder beliebigen Weite unverrückbar feststellen lassen; bei größern einen Stangenzirkel, d. i. eine prismatische Stange, auf der sich zwei Zirkelspitzen beliebig verschieben und festschrauben lassen; damit fasse man nun den Radius und versuche, ob die Sehne von 60° der Theilung ihm in verschiedenen Gegenden des Kreises genau gleich sei. Dann nehme man die Sehne von 30° von einer Stelle ab und prüfe sie durch die ganze Länge des Kreises an je 30 andern Graden; ebenso verfahre man mit 15°, 10°, 5°, und sehe auch zu, ob beziehlich 12, 24, 36, 72 solcher Sehnen, in der Peripherie herum an einander angetragen, genau wieder zum Ausgangspunkte zurückführen; dann, ob dasselbe geschehe, wenn man von einem beliebigen andern Grade ausgeht, und wiederhole dasselbe Verfahren mit mehreren hinter einander folgenden Graden. Erweist sich die Theilung bei allen diesen Versuchen als richtig, so kann man sich vollständig dabei beruhigen; den Grad der Genauigkeit, den eine Theilung ohne Nonius gewähren kann, wird sie reichlich geben.

Ist die zu prüfende Theilung nur ein Bogen, kein voller Kreis, so ist das Verfahren im wesentlichen noch dasselbe, nur daß man gleich bei kleinern Sehnen beginnen muß, und gerade solche wählen wird, die sich im ganzen Bogen mehreremal abtragen lassen. Nachher kann man auch beliebige Theile des Bogens durch dasselbe Verfahren prüfen.

Bei Theilungen, die mit Nonien versehen sind, kann man, statt des Zirkels, den Bogen des Nonius selbst als messenden Bogen gebrauchen. Sind nämlich $n - 1$ Theile des Limbus auf dem Nonius in n Theile getheilt, so muß, wenn man den Index des Nonius auf irgend einen Theilstrich bringt, der $(n + 1)$ste Noniusstrich ebenfalls wieder mit einem Limbusstriche zusammenfallen. Man schiebe also den Nonius in der Weise um die Peripherie der Theilung herum, daß der Index nach und nach auf jeden Strich der letztern zu liegen kommt, und prüfe, ob dann der $n$te Noniusstrich auch jedesmal mit dem $(n - 1)$sten Limbusstrich zusammenfalle. Ist dies im ganzen Umkreise überall der Fall, so kann man die Theilung für gut erklären. Finden sich aber bei dieser Prüfung Stellen der Theilung, wo die geforderte Coincidenz der entsprechenden Striche nicht zutrifft, ohne daß sich gerade die ganze Theilung unbrauchbar erwiese, so müßte man sich solche Stellen beson-

ders merken und sie bei den mit dem Instrumente zu machenden Messungen berücksichtigen. Wir werden nämlich weiter unten sehen, daß man bei genauen Messungen jeden Horizontalwinkel doppelt mißt, nämlich einmal vom Nullpunkte oder einem andern beliebigen Punkte der Theilung aus, dann, nachdem man das Fernrohr umgeschlagen, d. h. um 180° um seine horizontale Drehachse gedreht hat, so daß nun eine andere Gegend der Theilung bei der zweiten Messung in Anwendung kommt. Sind nun an einer Stelle der Theilung einzelne Grade zu groß, so müssen dafür andere wieder zu klein ausfallen, weil alle zusammen doch stets denselben Gesammtbetrag geben müssen. Nimmt man also das arithmetische Mittel aus beiden Ablesungen, so wird sich ein vorhandener Fehler der Theilung meist aufheben. Wenn es sich blos um die Correction eines gemessenen Winkels wegen der Unrichtigkeit der Theilung handelt, so erreicht man mit gleicher Sicherheit den Zweck auch dadurch, daß man nach der ersten Messung das Fernrohr blos weiter rückt und denselben Winkel noch an einer andern Stelle des Kreisrandes mißt, dann von beiden Resultaten das arithmetische Mittel nimmt. Das letztere Verfahren ist auch da anwendbar, wo die Theilung keinen vollen Kreis umfaßt, oder das Fernrohr sich nicht durchschlagen läßt. Bei den zur Repetition gebauten Theodoliten gelangt man durch das später zu lehrende sogenannte Repetitionsverfahren zu demselben Ziele. Von selbst versteht es sich, daß die Fehler der Theilung, welche man auf diese Art unschädlich zu machen sucht, nicht bedeutend sein dürfen.

Da die Prüfung der Limbustheile mittels des Nonius gemacht ist, so muß auch untersucht werden, ob die Theilung des Nonius selbst völlig genau sei. Dies geschieht auf folgende Weise. Wie schon erwähnt, hat der Nonius an beiden Enden seines Bogens einige überzählige Theilstriche, die Excedenz genannt (§. 121). Man stelle also den äußersten Strich der Excedenz auf der Seite des Index auf irgend einen Strich des Limbus ein und sehe zu, ob das Ende des nten Noniustheils [der (n + 1)ste Strich] von jenem an gerechnet auf den entsprechenden Strich der Limbustheilung falle oder nicht; dasselbe Verfahren befolge man mit dem zweiten Strich der Excedenz u. s. w., dann mit den Strichen der Excedenz am andern Ende in gleicher Weise. Zuletzt bleiben nur noch die mittlern Striche des Nonius zu untersuchen, was nur dadurch geschehen kann, daß man nach und nach jeden Strich davon mit einem Striche der Limbustheilung zusammenbringt und mittels einer guten Lupe zusieht, ob die Abstände der gleichvielten Limbus- und Noniusstriche zu beiden Seiten der Coincidenz einander gleich seien. Auf diese Weise gefundene Unrichtigkeiten im Nonius würden die Anschaffung eines neuen, richtig getheilten Nonius nöthig machen; an eine anderweitige Correction wäre nicht zu denken.

F. Die Schraube.

§. 126. Wenn man um eine gerade Cylinderfläche einen starren, fadenförmigen Körper in der Weise mehreremal herumführt, daß derselbe mit den Seitenlinien des Cylinders stets denselben schiefen Winkel bildet, so heißt die so entstandene krumme Linie eine Schraubenlinie oder Spirale; der Cylinder, auf dem der starre Körper in der vorgeschriebenen Weise aufgetragen ist, heißt die Schraubenspindel; der auf den geraden Cylinder aufgetragene Körper heißt, mit Rücksicht auf seine Hervorragungen über die Cylinderfläche, das Schraubengewinde, und der Theil des Gewindes, welcher einmal um den Cylinder läuft, dessen beide Endpunkte also in derselben Seitenlinie des Cylinders liegen, heißt ein Schraubengang, der mit der Achse des Cylinders oder mit den Seitenlinien parallele Abstand zweier nächst auf einander folgenden Schraubengänge die Höhe eines Schraubenganges oder die Steigung der Schraube. Sind die Schraubengänge auf die innere Fläche eines Hohlcylinders aufgetragen oder eingeschnitten, so heißt derselbe eine Schraubenmutter. Schraubenspindel und Schraubenmutter machen zusammen die Schraube aus.

§. 127. Man erhält die Schraubenlinie, wenn man um den Cylinder abcd (Fig. 135) ein rechtwinkeliges Dreieck bfg in der Art herumwickelt, daß die eine Kathete bf senkrecht zu der Seitenlinie bc wird; die Hypotenuse beschreibt dann bhik lm.... Reicht nun bf′ genau einmal um den Cylinder herum,

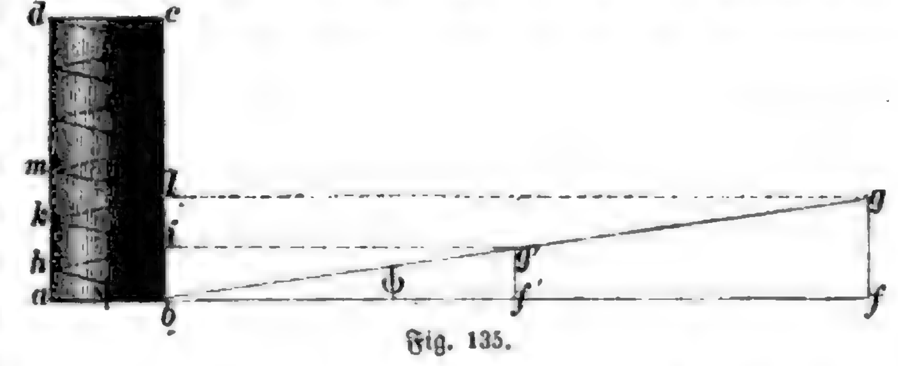


Fig. 135.

so ist bf′ gleich dem Umfange des Cylinders, also, wenn r dessen Radius ist,

$$bf' = 2r\pi;$$

also ist dann f′g′ = der Höhe eines Schraubenganges, d. h. = ah; heißt die Höhe eines Schraubenganges h, so ist:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{2r\pi},$$

und diese Gleichung gibt das Maß der Steigung der Schraubengänge.

Es leuchtet ein, daß, wenn man die Spindel in der Mutter einmal herumdreht, sie sich um die Höhe h eines Schraubenganges vor- oder rückwärts bewegt, bei einer doppelten Umdrehung um zwei Ganghöhen u. s. w. Also auch bei $\frac{1}{n}$ Umdrehung um $\frac{1}{n}$ Ganghöhe. Denn setzt man den Umfang $2r\pi = u$, so ist:

$$n \cdot \quad tg\,\psi = h,$$
$$n \cdot n\,tg\,\psi = n \cdot h,$$
$$\frac{1}{n} \cdot n\,tg\,\psi = \frac{1}{n} \cdot h.$$

Sollte eine Schraube nicht nach diesem Gesetze vorrücken, so wäre dies ein Zeichen, daß sie in irgend einem Punkte unrichtig construirt sei; gewöhnlich liegt dann die Schuld daran, daß die Spindel für die Mutter zu dünn ist, was meist davon herrührt, daß die Spindel sich durch längern Gebrauch zu sehr ausgearbeitet und abgenutzt hat. Wenn sich eine Schraube in ihrer Mutter drehen läßt, ohne der Größe der Drehung proportional und nach Maßgabe der Ganghöhe sich vor- oder rückwärts zu bewegen, so sagt man, die Schraube habe todten Gang. Eine solche Schraube ist allemal unbrauchbar und muß je eher je lieber durch eine passende ersetzt werden. Man sieht nun ein, daß das Feststehen einer Schraube an einer bestimmten Stelle lediglich auf der Reibung der Gewinde der Spindel und Mutter beruht. Das Feststehen der Schraube in der ihr gegebenen Lage ist aber bei allen ihren Verwendungen ein unerlaßliches Erforderniß; weshalb bei jeder Schraube auf die Gleichmäßigkeit ihres Ganges besonders zu sehen ist.

Ein ebenso großer Fehler ist es, wenn die Schraube im Ganzen oder in einzelnen Theilen ihres Ganges sich in der Mutter drängt; man sagt dann: die Schraube würgt. Dieser Fehler kann von zu großer Dicke der Spindel im Verhältniß zur Mutter herrühren; dann muß Spindel oder Mutter weiter ausgeschnitten werden, was bei kleinen Schrauben mittels eines passenden Schraubenstahls (Schneideisens), einer Stahlplatte, in der verschieden große Schrauben eingeschnitten sind, bei großen mittels einer passenden Schraubenkluppe leicht zu beseitigen ist. Der erwähnte Fehler kann aber auch in einer Krümmung der Spindel seinen Grund haben; bei Stahlschrauben mag man dann dem Fehler durch vorsichtiges Schlagen mit einem hölzernen Schlägel auf Holz abhelfen können. Daß der Fehler von Ungleichheiten in den Schraubengängen herrühre, ist nach der Art der Entstehung der Schraube kaum zu erwarten; denn, wenn es auch sehr schwer ist, eine Schraube zu verfertigen, deren Gänge völlig genau gleich sind, so daß sie zu messenden Versuchen gebraucht werden kann, so werden doch ordnungsmäßig angefertigte Schrauben nie so große Unregelmäßigkeiten an sich tragen, daß sie in der Mutter deshalb würgen.

§. 128. Man unterscheidet rechts und links gewundene Schrauben. Eine Schraube heißt rechts gewunden, wenn man beim Einschrauben der Spindel in die Mutter, oder beim Aufschrauben der Mutter auf die Spindel die eine oder die andere rechts, d. h. so wie die Zeiger einer Uhr laufen, drehen muß; eine Schraube heißt dagegen links gewunden, wenn man Spindel

oder Mutter zu gleichem Zwecke links herum drehen muß. Fig. 136 stellt eine rechts gewundene, Fig. 137 eine links gewundene Schraube vor. Links gewundene Schrauben kommen nur zu ganz besondern Zwecken, an Meßinstrumenten gar nicht vor. Man kann sich daher zur Regel machen, daß jede Schraube, wenn Spindel und Mutter vereinigt werden sollen, rechts, wenn sie getrennt werden sollen, links herum geschraubt werden muß, mag die Bewegung an der Spindel oder Mutter vorgenommen werden.

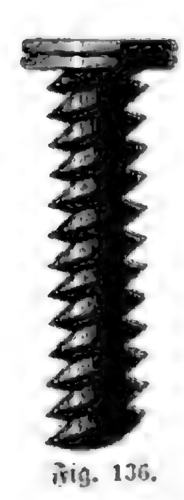


Fig. 136.

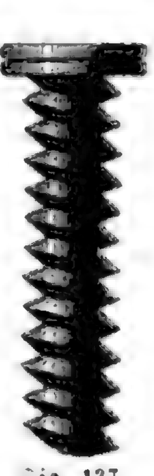


Fig. 137.

Derjenige Theil einer Schraube, der sich nicht in die Mutter schrauben läßt, heißt der Schraubenkopf. Ist die Spindel der bewegte Theil, so geschieht dies mittels des Kopfes, und zwar entweder aus freier Hand oder mittels geeigneter Instrumente. Dasselbe ist der Fall, wenn die Mutter bewegt werden soll. Soll die Bewegung aus freier Hand geschehen, so hat der Schraubenkopf oder die Mutter die Form einer am Umfange geränderten Scheibe, die einen um so größern Durchmesser hat, je mehr Kraft zum Drehen und schließlichen Andrücken der Schraube erfordert wird. Dies ist die an Meßinstrumenten gewöhnlichste Form; sie heißt ein Scheibenkopf. Zuweilen, insbesondere bei größern Schrauben, die doch noch aus freier Hand gedreht werden, trägt die Spindel, noch häufiger aber die Mutter zwei flügelartige Lappen — Flügelkopf.

Die Werkzeuge zur Bewegung der Schrauben sind die Schraubenzieher und Schraubenschlüssel. Der Schraubenzieher ist ein meißelförmiges Stück Stahl, dessen eines Ende in einem Hefte steckt, dessen anderes Ende von beiden Seiten abgeschrägt ist und eine gerade, aber etwas stumpfe, d. h. nicht schneidende Bahn hat. Fig. 138 stellt einen Schraubenzieher von der flachen, Fig. 139 denselben von der schmalen Seite vor. Der Schraubenkopf, der mittels eines Schraubenziehers bewegt werden soll, erhält einen geraden Einschnitt von angemessener Weite, in welchen der Schraubenzieher bei der drehenden Bewegung eingesetzt wird.

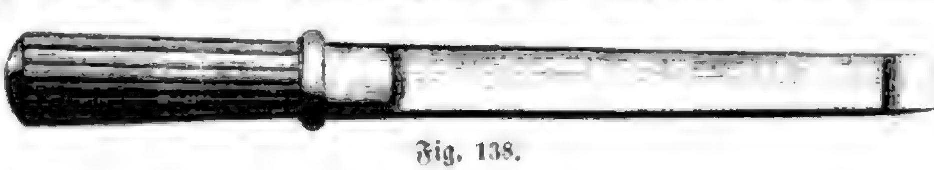


Fig. 138.

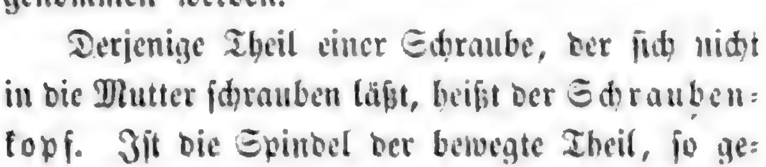


Fig. 139.

Der Schraubenzieher sollte immer eine Breite haben, die dem Durchmesser des Schraubenkopfes, zu dem er gebraucht werden soll, gleichkommt. Ist er schmäler, so beschädigt man die Ränder des Einschnitts und man verliert natürlich an der zur Bewegung der Schraube zu verwendenden Kraft; ist dagegen die Bahn des Schraubenziehers

breiter als der Durchmesser des Einschnitts im Kopfe, so wird, insbesondere bei versenkten Köpfen, die Mutter leicht beschädigt; oder man findet nicht den nöthigen Raum zum ungestörten Drehen des Schraubenziehers; in der Regel ist dann auch der Schraubenzieher zu dick für den Einschnitt im Kopfe, die Schraube gleitet aus, und der Rand des Einschnitts wird beschädigt; wiederholt sich das an derselben Schraube öfters, so stumpfen die Ränder so sehr ab, daß nachher kein Schraubenzieher mehr faßt und der Kopf ist verdorben. Der Schraubenzieher sollte willig in den Einschnitt hineingehen, sich aber innerhalb desselben nicht drehen lassen, nicht schlottern, damit sich stets die ganzen Flächen des Schraubenziehers gegen die innern Wände des Einschnitts im Schraubenkopfe anlegen; kleine Köpfe erhalten auch nur schmale Einschnitte, weshalb denn auch die Schraubenzieher dazu kleiner und dünner sein müssen. Außer der Wahl des Schraubenziehers kommt aber auch der Gebrauch desselben sehr wesentlich in Betracht; man muß denselben stets senkrecht zur Ebene des Kopfes und fest ansetzen, dann während des Drehens so halten, daß er unter keinen Umständen ausgleitet. Die Schraubenzieher sind an ihrer Bahn gehärtet und wieder so angelassen, daß sie nicht wegen Sprödigkeit ausbrechen. Ein Schraubenzieher mit schartiger Bahn muß frisch angeschliffen werden, wobei man darauf zu achten hat, daß man die abgeschrägten Flächen nicht zu steil schleift. Die Schraubenzieher der gewöhnlichen Handwerker sind meist unrichtig zugeschliffen, weil sie auch die Einschnitte in die Köpfe ohne alle Genauigkeit machen.

Der Schraubenschlüssel gibt es verschiedene Formen. Der einfachste Schlüssel ist ein gerader cylindrischer Stahlstab, der in eine eben solche Durchbohrung des Schraubenkopfes gesteckt wird, um denselben mit desto größerer Hebelkraft drehen zu können. Die Weite der Durchbohrung, wie die Dicke und Länge des Stabes richten sich natürlich nach der Größe der Schraube und der auf ihre Bewegung zu verwendenden Kraft.

Die Schraubenköpfe und Muttern sind manchmal vier-, sechs- oder achteckig gearbeitet; dann bedient man sich solcher Schlüssel, die den Kopf entweder von zwei, oder von allen Seiten umfassen; sie sind nur bei größern Schrauben in Gebrauch; für jede Größe des Kopfes gehört ein besonderer Schlüssel. Die sogenannten englischen Schlüssel sind eigentlich Universalschlüssel dieser Art, indem sie zu Schrauben aller Größen passen; bei Meßwerkzeugen kommen solche Schlüssel selten in Anwendung. Aber einer andern, häufig gebrauchten Art der Schlüssel müssen wir noch erwähnen. Die Mutter ist cylinderförmig und hat auf ihrer von der Spindel abgewendeten, also äußern Fläche zwei Löcher; der Schlüssel besteht aus zwei Stahlstiften (Fig. 140), in welche der Schaft ausläuft, der oben mit einem Heft

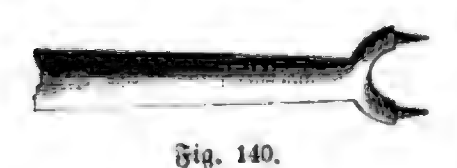


Fig. 140.

versehen wird. Die Stifte werden in die Löcher der Mutter gesteckt; durch Umdrehung des Schlüssels schraubt sich die Mutter auf oder ab.

§. 129. Eine richtig gefertigte Schraube kann sich nur in einer solchen Lage in die Mutter schrauben lassen, bei der die Achse der Spindel mit der Achse der Mutter zusammenfällt; man muß daher beim Aufsetzen der Schraube auf diesen Umstand Rücksicht nehmen, widrigenfalls die Schraube, besonders bei Anwendung überflüssiger Gewalt, unfehlbar durch das sogenannte Ueberschrauben verdorben wird; durch schiefes Aufsetzen greift nämlich einerseits der erste Gang der Spindel in den zweiten Gang der Mutter, auf der entgegengesetzten Seite aber der erste Gang der Mutter in den zweiten der Spindel ein; mit mäßiger Kraft läßt sich natürlich die Schraube in dieser Lage gar nicht herumdrehen; Ungeübte wollen aber in der Regel durch übermäßige Kraftanstrengung wieder gut machen, was ihnen aus Unaufmerksamkeit und aus Mangel an Augenmaß mißlungen ist.

Bei manchen Instrumenten kommen so kleine Schrauben vor, daß man sie gar nicht mit den bloßen Fingern in die Mutter bringen und bis zum eigenen Festhalten anschrauben kann: ebenso die kleinen Muttern nicht auf die Spindel; sie fallen oft herunter und gehen dann verloren. Solche Schräubchen muß man sorgfältig mit einer Pincette fassen, deren eine Spitze in den Einschnitt für den Schraubenzieher gesetzt wird, also dünn genug ist, um darin Platz zu finden; auch kann man einen Schraubenzieher wählen, der sich etwas in den Einschnitt einklemmt und so die Schraube festhält.

§. 130. Von den verschiedenen Arten der Schrauben werden wir hier nur die erwähnen, welche gewöhnlich bei Meßinstrumenten vorkommen. Die gewöhnlichsten Schrauben sind die, welche zur Befestigung zweier Körper an einander dienen; sie können füglich Druckschrauben heißen. Die Schraube wird auch vielfach dazu gebraucht, einen Körper in Bewegung zu versetzen. Ist die dadurch hervorgebrachte Bewegung eine geradlinige, so heißt eine solche Schraube im allgemeinen eine Stellschraube; wenn sie dazu bestimmt ist, einen einzelnen Theil eines Instruments in eine vorgeschriebene Lage zu bringen, so heißt sie Corrections- oder Justirschraube. Greift eine Schraube mit einigen ihrer Gänge in ein gezahntes Rad ein und dreht dieses, wenn sie selbst um ihre Achse bewegt wird, im Kreise herum, so heißt sie eine Schraube ohne Ende. Sehr eng geschnittene Schrauben, welche zur Erzeugung einer sehr langsamen, der sogenannten feinen Bewegung bei der Stellung der Instrumente, oder auch zur Messung kleiner Linien oder Winkel dienen, heißen Mikrometerschrauben. Besonders unter den Mikrometerschrauben kommen auch solche vor, bei denen auf derselben Spindel zwei

Gewinde von ungleicher Ganghöhe eingeschnitten sind. Solche Schrauben heißen Differentialschrauben; wir werden ihren Zweck weiter unten kennen lernen.

§. 131. 1) Druckschrauben. Sollen zwei Körper an einander befestigt werden, so geht entweder die Spindel ohne Gewinde durch den ersten hin-

Fig. 141.

Fig. 142.

Fig. 143.

durch und schraubt sich in den zweiten (Fig. 141). Eine solche Schraube heißt eine Klemmschraube. Oder die Spindel geht durch beide Körper ohne Gewinde und wird hinter dem zweiten durch eine Mutter festgehalten (Fig. 142). Die Köpfe solcher Schrauben werden oft versenkt, d. h. auf dem Körper auf der Seite des Kopfes wird die Durchbohrung kegelförmig erweitert, so daß der ebenfalls kegelförmige Kopf ganz in diese Vertiefung hineingeht und kein Theil über die ebene Fläche der dem Kopfe zugewendeten Platte vorragt (Fig. 143). Die Köpfe werden besonders dann versenkt, wenn sich ein anderer Körper über dieser Fläche bewegen soll.

Fig. 144.

Konische Zapfen werden in Hohlkegeln durch eine durch die Wand des letztern geführte Druckschraube festgestellt, so daß die bei gelüfteter Schraube mögliche Achsendrehung des Konus nach Anziehung der Schraube gehindert wird. Eine solche Schraube heißt Bremsschraube (Fig. 144); ebenso heißt dann auch jede Schraube, welche, wenn sie angezogen ist, das Aneinanderhingleiten zweier beliebiger, also auch ebener Körper hindert, während es möglich wird, wenn die Schraube gelöst worden (Fig. 145). Eine Bewegung durch eine solche Schraube hemmen, heißt sie bremsen.

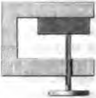


Fig. 145.

§. 132. 2) Corrections-, Justir- und Stellschrauben. Diese Art der Schrauben werden auf die mannichfachste Weise angewendet, so daß es kaum möglich sein wird, alle Formen der Anwendung aufzuzählen und zu beschreiben; wir beschränken uns daher auf die üblichsten.

Die gewöhnlichsten Schrauben dieser Art sind die einfachen Stellschrauben,

Digitized by Google

wo die Schraube durch die davon getragene Platte (oder sonstigen Körper) geht und mit ihrem Ende auf jeder beliebigen Unterlage ruht, wie Fig. 146. Es sind die gewöhnlichsten Vorrichtungen, auf denen man die aufzustellenden Instrumente ruhen läßt; sie bilden den Fuß der Instrumente. Bei schwerern Instrumenten und solchen, von denen mehr Genauigkeit gefordert wird, ruhen die Enden der Schrauben in besondern Unterlagen (Fig. 147); die Schrauben

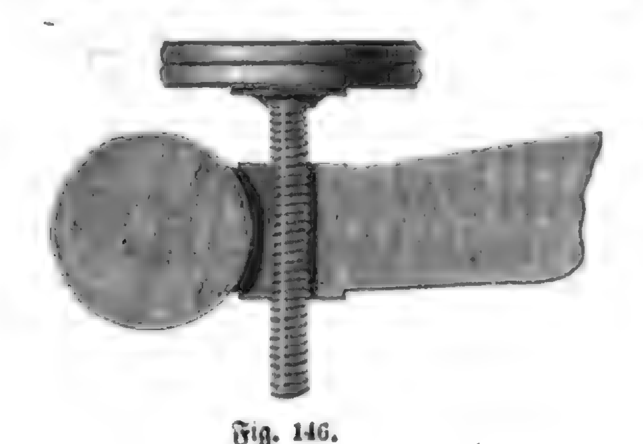


Fig. 146.

Fig. 147.

haben stumpfe Spitzen und reichen in eben solche konische Einsenkungen der Unterlage u; die Mutter m ist aufgeschlitzt, jeder Theil mit einem Lappen (l l, Fig. 146) versehen (geflantscht), und beide Theile werden wieder durch eine Schraube s verbunden, um sowol todten Gang, als auch ein Drängen der Schraube zu vermeiden. Manchmal sind die Köpfe der Schrauben nach unten gekehrt, die Spindel nach oben; die Köpfe tragen dann an ihren untern Flächen wieder Stahlspitzen, mit welchen sie in die Unterlagsplatte eingreifen (Fig. 148). Herr Breithaupt in Kassel versieht den Stahlstift mit einer Kugel, welche in die Unterlage eingreift und beim Verstellen sich nicht daraus losmachen kann; die Unterlagsplatte wird noch auf drei Spitzen gestellt (Fig. 148).

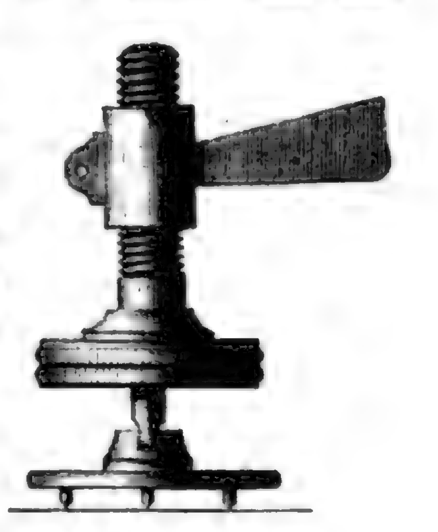


Fig. 148.

Einige Correctionsschrauben stehen auf dem zu bewegenden Gegenstande stumpf auf, stoßen ihn beim Hineinschrauben vor sich her, können ihn sich aber nicht wieder heranholen; dann muß eine zweite Schraube da sein, um die entgegengesetzte Bewegung zu bewirken. Andere greifen in den zu bewegenden Körper ein und können ihn daher vor- und rückwärts bewegen, besonders wenn sie sich am Ende verdicken und in eine gleichgeformte Höhlung des Körpers mit Verschluß eingesenkt sind. Am häufigsten werden beide Arten verbunden angewendet, wobei die stumpf aufstehenden hauptsächlich dazu da sind, um den Körper so fest zu klemmen, daß

die Schraube nicht etwa durch zufällige Erschütterungen in Bewegung geräth. Bei dem Fadenkreuze der Fernröhre sind solche Schraubenpaare beschrieben worden.

Zuweilen soll ein Körper durch eine stumpf aufstehende Schraube von einem andern in der Art entfernt werden, daß sich der eine von beiden um eine außerhalb der Schraube liegende Achse dreht; meist liegt die Drehachse in einer andern durchgehenden Schraube (Fig. 149). In andern Fällen wird ein Körper durch zwei Muttern an einer Spindel hin- und herbewegt und zuletzt festgehalten (Fig. 150).

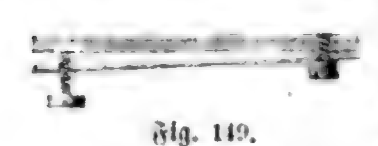


Fig. 149.

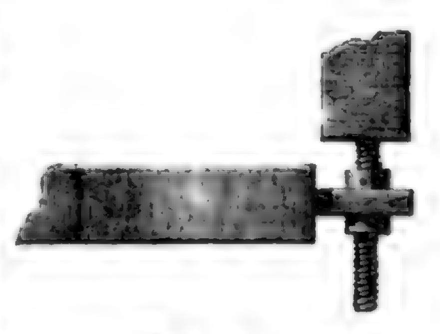


Fig. 150.

§. 133. 3) *Die Schraube ohne Ende* kommt bisher bei Meßwerkzeugen nur in einer Form vor. Der Centralzapfen des Instruments ist von einer Hülse h (Fig. 151) umgeben; rechtwinkelig gegen die Hülse ist eine concentrische Platte p angegossen, in deren Umfangs- oder Randfläche Zähne eingeschnitten sind, in welche die Gänge einer Schraube v eingreifen. Die Schraubenspindel selbst ist in zwei Lagern a, b ohne Gewinde drehbar, so daß sie der Spindel nur als Führung dienen; die Lager stehen mit dem Fuße oder mit der Achse des Instruments in fester Verbindung. Bei einer einmaligen Umdrehung der Spindel dreht sich die Platte p um einen Zahn herum, daher die Bewegung eine sehr langsame wird und gewöhnlich die *feine Bewegung* des Instruments heißt (§. 130), weil dieselbe Platte mit sammt der Schraube ohne Ende nach Lösung einer Bremsschraube, welche sie an den Centralzapfen h h befestigte, auch aus freier Hand beliebig viel gedreht werden kann, was man dann, im Gegensatz zur vorigen, die *grobe Bewegung* nennt. Im einen Falle, wie im andern, dreht sich natürlich jeder mit der Platte p in fester Verbindung stehende Körper mit dieser zugleich.

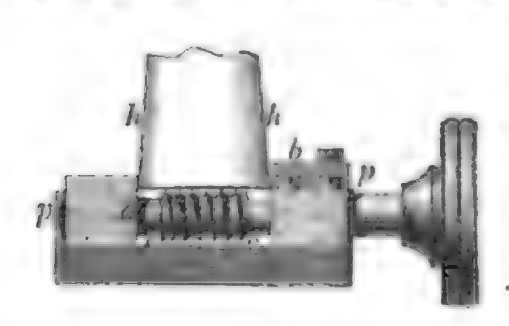


Fig. 151.

§. 134. 4) *Die Mikrometerschraube* dient dazu, kleine Größen zu messen, oder feine Eintheilungen zu machen. Es ist indeß üblich geworden, jede Schraube mit engem Gange, mit der man eine langsame Bewegung hervorbringen kann, Mikrometerschraube zu nennen. Jede Schraube bewegt sich oder ihre Mutter während einer vollen Umdrehung um die Größe ihrer Ganghöhe in der Richtung ihrer Achse fort (§. 127). Hat daher die

Schraube n Gänge auf einen Zoll ihrer Länge, so rückt sie bei einer Umdrehung um $\frac{1}{n}$ Zoll fort, bei zwei Umdrehungen um $\frac{2}{n}$ Zoll u. s. w. Bringt man dann an der Schraubenspindel A B (Fig. 152) einen geränderten Kopf C an, bei welchem die Spindel gedreht wird, und eine am Umfange in m gleiche Theile getheilte, mit dem Kopfe C sich zugleich drehende Scheibe D E, mit einem unverrückbaren Zeiger z, so kann man die Scheibe und damit die Schraube auch $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m} \ldots \frac{m-1}{m}$ Umdrehung machen lassen; die Mutter F G rückt dann $\frac{1}{mn}, \frac{2}{mn}, \frac{3}{mn} \ldots \frac{m-1}{mn}$ Zoll vor- oder rückwärts, je nachdem die Schraube rechts oder links herumgedreht wird. Hierin liegt das Princip der geradlinigen Theilmaschine. Verbindet man mit der Mutter F G einen Arm mit Gelenk, der für Messungen eine feine Nadel, für Theilungen auf Metall einen harten stählernen Reißhaken, für Theilungen auf Glas einen Diamantsplitter trägt, der nicht schneidet, sondern nur ritzt, so hat man eine vollständige Theilmaschine.

Fig. 152.

Bringt man neben der Theilscheibe D E (Fig. 153) noch eine feststehende Scheibe H K an, die der Theilscheibe als Nonius dient, auf der also etwa 11 oder 9 Theile der Theilscheibe D E in 10 Theile getheilt sind, so kann man noch kleinere Theile einer Umdrehung ablesen. Der Index des Nonius dient hier statt des Zeigers z der vorigen Figur. Meines Wissens ist diese Vorrichtung zur Zeit noch nirgends zur Ausführung gekommen, sie dürfte aber den Verfertigern geodätischer Instrumente sehr zu empfehlen sein.

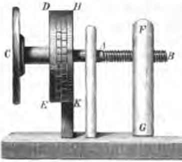


Fig. 153.

§. 135. 5) Hat die Schraubenspindel A B (Fig. 154), zweierlei Gewinde, d. h. ist sie nach §. 130 eine eigentliche Differentialschraube mit einem weitern Gewinde A D und einem engern D B, und steht die Mutter E des erstern fest, während die des letztern, F G, beweglich ist,

Digitized by Google

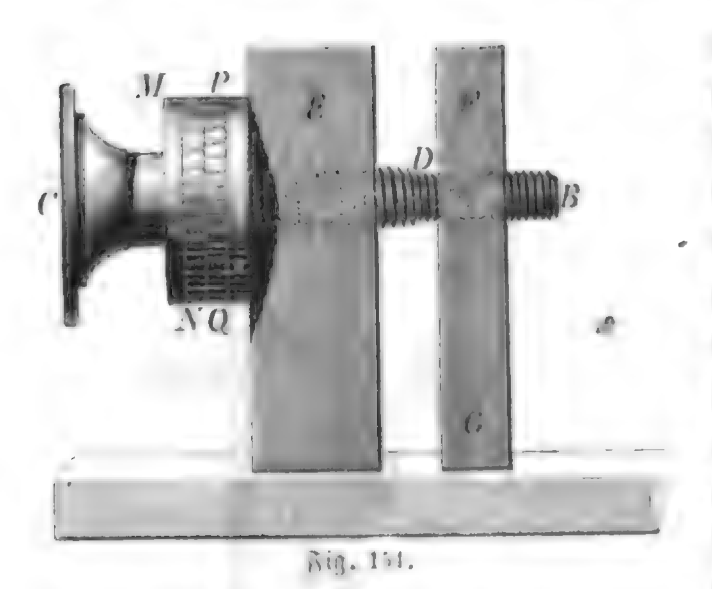


Fig. 154.

und man dreht nun den Kopf C einmal herum, so rückt das Gewinde A D in der Mutter E um die Ganghöhe h dieses Gewindes vor; dabei dreht sich aber auch D B einmal herum; also rückt dieses Gewinde in seiner Mutter F G um die Höhe h′ seiner Schraubengänge vor; D B muß sich aber, weil es mit A D einen Körper ausmacht, gerade ebenso viel vorwärts bewegen als A D, d. h. bei einer Umdrehung der Spindel um die Größe h. Nun ist aber $h > h'$; daher nähert sich bei einer Umdrehung der Spindel die Mutter F G der Mutter E um die Größe $h - h'$. Gehen nun vom ersten Gewinde m Gänge, vom andern n Gänge auf den Zoll, so bewegt sich die Mutter F G bei einer Umdrehung um die Größe $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{mn}$ Zoll in der Richtung A B oder B A, je nachdem man rechts oder links herumdreht, und diese Größe ist um so kleiner, je größer m und n selbst sind, und je kleiner $n - m$ ist. Dadurch bekommt man es also in seine Gewalt, die Bewegung der Mutter F G während einer Umdrehung der Spindel so klein zu machen als man wünscht, ohne gerade sehr enge Schraubengänge anzuwenden, deren genaue Anfertigung mit großen Schwierigkeiten verbunden ist; und gesetzt, man hätte wirklich eine Schraube mit etwa 100 Gängen auf den Zoll so zu Stande gebracht, daß sie den Anforderungen entspräche, so würde sie, wegen der Feinheit ihrer Gänge, durch Staub und andere schädliche Einwirkungen, ja selbst durch einen vollkommen ordnungsmäßigen Gebrauch und bei aller nur möglichen Vorsicht sich doch bald ausarbeiten und unbrauchbar werden. Die Anwendung der Differentialschraube muß daher zu den wichtigsten Mitteln, eine feine Bewegung zu erzielen, gerechnet werden. Verbindet man mit der Differentialschraube noch eine Zähl- und eine Noniusscheibe M N und P Q, wie sie §. 134 beschrieben worden, so kann man die Genauigkeit der Ablesung weiter treiben, als es, wegen der Unsicherheit des Einstellens, selbst nöthig ist.

§. 136. Die Längenbestimmung gerader Linien mittels der beschriebenen Vorrichtungen, Differentialschraube nebst Theil- und Noniusscheibe, ist von selbst verständlich, nachdem oben (§. 134) eine Idee der geradlinigen Theilmaschine gegeben worden; sie kommt aber in der Meßkunde viel weniger in Betracht als die Winkelbestimmung. Denken wir uns zunächst, es handle sich blos darum, sehr kleine Winkel zu messen, und a C b (Fig. 155) stelle

einen solchen Winkel vor. Ist nun an dem Instrumente, dessen man sich bedient, eine der beschriebenen Mikrometervorrichtungen angebracht, so überzeuge man sich durch wiederholt angestellte Versuche, aus deren Resultaten man das arithmetische Mittel nimmt, welchem Winkelwerthe w eine ganze Umdrehung der Mikrometerschraube entspricht, wenn diese senkrecht auf den Schenkel, d. h. hier auf den Zeiger der Kreistheilung wirkt; schiebt die Schraube bei einer Umdrehung den Zeiger C a bis zur Lage C b vor sich her (was wir hier in vergrößertem Maßstabe zeichnen), so hat C a den Winkel a C b = w beschrieben. Es ist aber der von der Schraube angegriffene Punkt d um d c = h vorgerückt, und:

$$\frac{dc}{Cc} = \frac{h}{r} = \operatorname{tg} w.$$

Fig. 155.

Für so kleine Winkel, wie hier vorausgesetzt werden, sind aber die Tangenten den Winkeln proportional; also kann man dann jedenfalls schließen, wenn die Schraube in einem andern Falle $\frac{1}{n}$ einer Umdrehung machte, so habe der Zeiger den Winkel $\frac{w}{n}$ beschrieben; und wenn man nicht über 23 Minuten hinausgeht, so bleibt derselbe Schluß auch noch für die Vielfachen des Winkels w wahr, d. h. n Umdrehungen der Schraube entsprechen dem Winkelwerthe n w, wenn nur $n\,w \leqq 23$ Minuten bleibt. Soll dann mit der Mikrometervorrichtung ein beliebig großer Winkel gemessen werden, so stelle man den Zeiger des Instruments genau auf den zu messenden Winkel ein, lese die ganzen, halben und Viertelgrade von der Theilung ab und bestimme den Ueberschuß dadurch, daß man den Zeiger auf den von der Theilung abgelesenen Punkt zurückschraubt, die ganzen Umdrehungen und etwaige Bruchtheile derselben von der Zählerscheibe abliest, den Winkelwerth w einer ganzen Umdrehung damit multiplicirt und den so gefundenen Winkelwerth zu der von der Kreistheilung schon abgelesenen Gradzahl addirt. *)

Es könnte bei dieser Vorrichtung die Schraube den Fehler ungleicher Ganghöhen haben. Man prüft dies leicht dadurch, daß man auf die vorhin angegebene Weise den Winkelwerth einer Umdrehung in verschiedenen Gegenden der Schraube sucht; erhält man ungleiche Werthe, so ist die Schraube unrichtig geschnitten. Eine Verbesserung ist natürlich nicht möglich; sie muß dann durch eine neue ersetzt werden.

---

*) Der Verfasser hat diese Mikrometervorrichtung in ihrer Anwendung auf Theodoliten und Nivellirinstrumente zuerst beschrieben in Poggendorff's „Annalen der Physik und Chemie", CIV, 443.

G. Das Diopter.

§. 137. Eine in der Meßkunde immer wiederkehrende Aufgabe ist, die Gerade zwischen dem Auge und einem gesehenen Punkte zu fixiren, d. h. auf das Papier, oder auf eine getheilte Kreisebene überzutragen. Die genannte Gerade heißt die **Gesichts-** oder **Visirlinie, Absehlinie,** auch **Collimationslinie.** Beim Fernrohr haben wir gesehen, daß mittels des Fadenkreuzes dem Fernrohr die verlangte Richtung gegeben werden kann. Diejenigen Vorrichtungen, welche, ohne Fernrohr, uns in Stand setzen, einem Körper die Richtung einer beliebigen Gesichtslinie zu geben, heißen **Diopter.**

§. 138. Jedes Diopter besteht aus zwei Theilen, dem **Ocular-** und dem **Objectivdiopter,** von denen jenes beim Visiren dem Auge, dieses dem anvisirten Punkte zugekehrt ist. Im übrigen sind die Einrichtungen verschieden. Es sei ABCD (Fig. 156) ein gerades Lineal; ABEF und CDGH seien zwei auf demselben senkrechte ebene Platten; in jener befinde sich die ganz kleine Oeffnung O als Oculardiopter, in dieser eine quadratische Oeffnung,

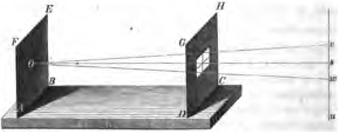


Fig. 156.

durch deren Mitte zwei Kreuzfäden gehen, so daß der Kreuzpunkt mit dem Oculardiopter O in genau gleicher Höhe über ABCD sich befindet. Es leuchtet ein, daß man dann das Lineal ABCD so drehen kann, daß ein hinter O befindliches Auge die Gerade von O zum Kreuzpunkte in die Gesichtslinie Os eines gesehenen Punktes s bekommt, oder daß die verticale Ebene durch O und den lothrechten Faden mit der Ebene Ovw, die ein verticaler Gegenstand uv mit dem Orte des Auges bestimmt, zusammenfällt.

Eine andere Einrichtung der Diopter stellt Fig. 157 vor. Das Ocular ist eine enge Spalte, das Objectiv eine länglich viereckige Oeffnung, durch deren Mitte vertical von oben nach unten ein Haar gespannt ist. Jede der beiden Platten trägt ein Ocular und ein Objectivdiopter, um sowol vor- als rückwärts visiren zu können; bei der einen Platte ist jenes oben, dieses unten; bei der andern ist es umgekehrt. Das Haar der Objectivdiopter wird oben

Digitized by Google

um ein Schräubchen gewickelt und durch dieses festgeklemmt; unterhalb der Spalte wird es durch eine feine Oeffnung gezogen, gehörig angespannt und dann durch einen in die Oeffnung gesteckten Holzstift festgeklemmt.

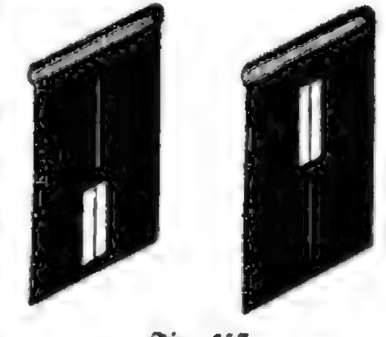


Fig. 157.

Professor Stampfer in Wien hat umfängliche Versuche über die zweckmäßigste Einrichtung der Diopter angestellt*); danach gewähren runde Ocularlöcher größere Genauigkeit beim Visiren als Spalten; sie können selbst $1/2$ par. Linie weit sein, während Spalten höchstens eine Breite von $1/3$ par. Linie haben dürfen; die geringste Weite ist für jene $1/3$, für diese $1/5$ par. Linie. Was die Dicke des Objectivhaars anlangt, so soll sie am geeignetsten sein, wenn sie vom Ocular aus unter einem Winkel von 1 bis 2 Minuten erscheint. Dies gibt bei 8 Zoll Entfernung eine Dicke von 0,04 Linie dd.
" 12 " " " " 0,06 " "
" 24 " " " " 0,09 " "
" 36 " " " " 0,13 " "

§. 139. Die Prüfung der Diopter hat auf folgende Punkte Rücksicht zu nehmen:

1) Die Ocularspalte und der Objectivfaden sollen in eine Verticalebene fallen. Um dies zu prüfen, verschaffe man sich durch die weiterhin (bei der Libelle) zu beschreibenden Mittel eine horizontale Ebene, setze das Diopter darauf und hänge in großer Entfernung davon ein Senkloth auf, d. h. einen dünnen Faden, an dem ein beliebiger ihn beschwerender Körper hängt. Wenn das Senkloth zur Ruhe gekommen ist, richte man das Diopter auf den Faden. Deckt das Haar des Objectivs den verticalen Faden der ganzen Länge nach, mag das Auge sich höher oder tiefer stellen, so entspricht das Diopter allen Anforderungen. Weichen aber beide Linien von einander ab, so muß untersucht werden, ob der Fehler im Objectiv, im Ocular, oder in beiden zugleich stecke.

Um den Objectivfaden zu prüfen, verwandle man die Ocularspalte in ein bloßes Ocularloch, indem man ein undurchsichtiges Papier überdeckt, an einer Stelle ein kleines Loch als Ocular in dasselbe sticht und zusieht, ob der Objectivfaden überall mit dem Loth zusammenfällt. Ist dies der Fall, so ist der Faden richtig, sonst muß man ihn da, wo er durch den Stift festgehalten wird, lösen, etwas nach einer Seite schieben und wieder festklemmen, bis er die wiederholte Probe aushält.

---

*) „Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts", Bd. 18., nach der Mittheilung in Bauernfeind's „Elementen der Vermessungskunde", I, 34.

Nachdem der Objectivfaden so berichtigt ist, läßt sich nun auch die Ocularspalte leicht prüfen, indem, wenn sie jetzt nicht überall mit dem Faden parallel geht, der Fehler an ihr liegen muß. Eine Berichtigung derselben ist aber nicht möglich, wenn sie mit dem Objectiv auf *einer* Platte befindlich ist, und das Diopter, wie Fig. 157, zur Doppelvisur eingerichtet ist, weil durch solche Berichtigung der Objectivfaden wieder verstellt würde. Bei einfacher Visur indessen, wo die Diopterplatte zum rechten Winkel umgebogen, wie Fig. 158, und durch Schrauben a, b, c, d an das betreffende Instrument befestigt ist, läßt sich durch Anziehen oder Loslassen einzelner Schrauben und Unterlegen dünner Papierblättchen an geeigneter Stelle die Diopterplatte nach und nach in die gehörige Lage bringen. Im andern Falle, bei doppelter Visur, wie Fig. 159, ist es zweckmäßig, für die Ocularspalte besondere Platten auf die Diopterplatte aufzuschrauben und die Schraubenlöcher darin etwas länglich zu machen, um die angeschraubte, die Ocularspalte tragende Platte zur Berichtigung etwas verschieben zu können, wie Fig. 159, wo dieselbe Diopterplatte von beiden Seiten dargestellt ist.

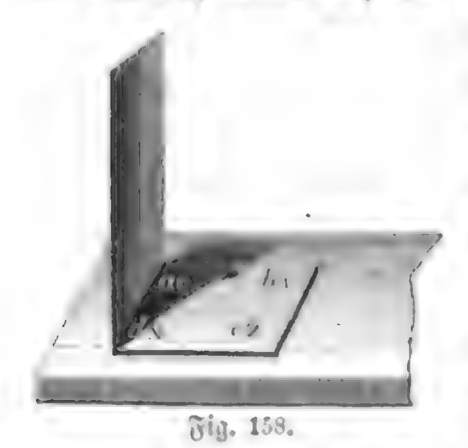


Fig. 158.

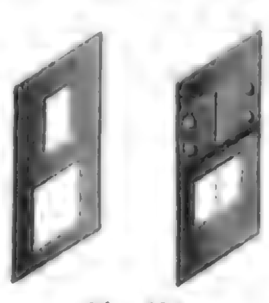


Fig. 159.

2) Die Diopterebenen müssen auf ihren Unterlagen senkrecht und mit einander parallel stehen. Es hat zwar eine kleine Abweichung von diesen beiden Forderungen, so lange nur der Forderung ad 1 genügt ist, keinen so bedeutenden Einfluß, daß sie das Einvisiren unrichtig machte, aber sie würde doch den Gebrauch der Diopter oft auf störende Weise beschränken. Das erstere findet man, wenn man die Unterlage des Diopters auf eine horizontale Ebene stellt und die Kante nach allen Richtungen auf einen lothrechten Faden einvisirt; ist das nach allen Richtungen möglich, so steht die Platte senkrecht zur Unterlage; eine Abweichung kann nur der Mechaniker verbessern. — Ob aber die Platten mit einander parallel seien, dürfte man, bei beschränktem Raume, im Zimmer etwa, nur dadurch finden können, daß man die Entfernungen der einander gegenüberstehenden Kanten mißt und zusieht, ob diese gleich seien; es soll aber die gerade Verbindungslinie von der Oculardiopter-Oeffnung zum Objectivfaden auch auf beiden Diopterplatten senkrecht stehen, was durch die vorige Prüfung noch nicht gefunden werden konnte. Es dürfte dies nur dadurch möglich werden, daß man beider Diopter Mitten auf die Grundebene projicirt, die Verbindungslinie der Fußpunkte oder Projectionen zeichnet und mit einem genauen rechten Winkel prüft, ob sie auf beiden Flächen senkrecht stehe. Im Freien, wo man eine weite Aussicht hat, kann man die Paralle-

lität der Diopterebenen auch noch dadurch prüfen, daß man das Instrument, woran die Diopter angebracht sind, auf eine horizontale Ebene stellt, dann nach der Linie FE (Fig. 156) visirt und zusieht, welchen Punkt des weit entfernten Horizonts die Visirlinie trifft; ist der getroffene Punkt nicht so markirt, daß man ihn leicht im Auge behält, so richte man die Visirlinie auf einen solchen; dann lasse man das Instrument unverrückt stehen, visire auch in der Richtung der Kante GH und sehe zu, ob diese Visirlinie denselben Punkt des Horizonts treffe. Sind die Platten parallel und der Punkt weit entfernt, so muß dies immer der Fall sein. Ein Fehler der Diopter in den hier erwähnten Punkten dürfte nur vom Mechanikus abgestellt werden können.

H. Das Senkloth.

§. 140. Das Senkloth oder Bleiloth ist eine an einer dünnen Schnur oder an einem Faden hängende Blei- oder Messingkugel (Fig. 160). Vermöge der Schwere der Kugel nimmt die Schnur die Richtung frei fallender Körper an und kann also dazu dienen, theils den senkrechten Stand eines Gegenstandes, z. B. einer aufgestellten Stange, zu prüfen, theils Gegenständen einen senkrechten Stand zu geben oder sie senkrecht über gewissen Punkten einzustellen. Wo es auf große Genauigkeit ankommt, besteht das Senkloth aus einem feinen Seidenfaden oder Silberdraht, der mit einem birnförmigen Messingkörper beschwert ist, damit die daran befindliche Spitze genau den Punkt vertical unter dem Aufhängepunkt angebe (Fig. 161); dann kommt es aber auch darauf an, daß der Befestigungspunkt des Fadens an dem schweren Körper genau in der Achse dieses Körpers liege, weil sonst die Spitze sich seitwärts neigt. Sollen im Freien Instrumente mittels des Senkloths vertical gestellt werden, so läßt man das Gewicht in ein Glas Wasser hängen, um zu verhindern, daß das Loth durch den Luftzug bewegt werde (Fig. 161). Sehr zweckmäßig wird das Bleiloth an sorgfältiger gebauten Apparaten mit einem Gegengewicht eingerichtet, wie Fig. 161a, wo indeß zu bemerken, daß die kurze Schnur ab mit ihren Enden in dem Körper c festgemacht, bei d die eigentliche Lothschnur daran gebunden ist; oder aber die Lothschnur theilt sich bei d in die beiden Enden da und db; bei e ist sie an den Haken gehängt, geht dann durch den Körper c hindurch und trägt an ihrem andern Ende das Loth hk, indem sie durch eine Durchbohrung der Schraube f geht und im Innern mittels eines Knotens festgehalten wird.

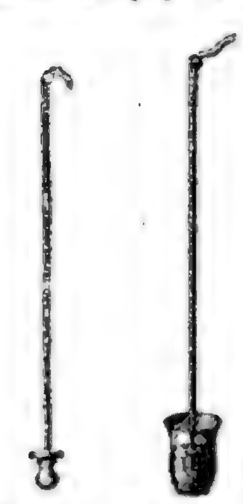


Fig. 160. Fig. 161.

Fig. 161a.

I. Die Libelle.

§. 141. Die Libelle, oder das Niveau mit Luftblase, auch Wasserwage genannt, ist ein Instrument, welches dazu dient, Linien und Ebenen in eine horizontale Lage zu bringen, oder doch sie auf ihre horizontale Lage zu prüfen. Sie besteht aus einem mit einer tropfbaren Flüssigkeit so weit angefüllten Gefäße, daß nur noch eine kleine Luftblase Raum darin findet, die, weil sie specifisch leichter ist als die tropfbare Flüssigkeit, obenauf schwimmt. Das Gefäß ist von allen Seiten verschlossen und die obere Bedeckung so eingerichtet, daß, wenn das Instrument auf einer horizontalen Unterlage ruht, die Mitte der höchste Theil des innern Raums ist, sodaß die leichte Luftblase in diesem Falle in der Mitte stehen bleiben muß, man also umgekehrt die horizontale Lage aus dem Standpunkte der Blase in der Mitte des Deckels schließen kann, aber ebenso auch, daß, wenn die Blase seitwärts von der Mitte stehen bleibt, man schließen muß, daß dieser Punkt des Innern höher liegt als alle andern Punkte, die Unterlage der Libelle also schief liegen muß. Als tropfbare Flüssigkeit nimmt man jetzt gewöhnlich Alkohol oder, der größern Beweglichkeit wegen, Schwefeläther. Der Form der Gefäße nach gibt es aber zweierlei Libellen, nämlich: Röhrenlibellen und Dosenlibellen.

a. Röhrenlibellen.

§. 142. Die Röhrenlibellen sind für die Meßkunde am wichtigsten, weil sie zur Horizontalstellung der feinsten Meßwerkzeuge dienen, größere Empfindlichkeit haben als die Dosenlibellen und selbst auch zur Messung kleiner Winkel gebraucht werden können.

Die Röhrenlibelle besteht aus einer Glasröhre, die, bis auf einen kleinen Ausschnitt a b (Fig. 162) von einer messingenen Fassung umgeben ist; in dem

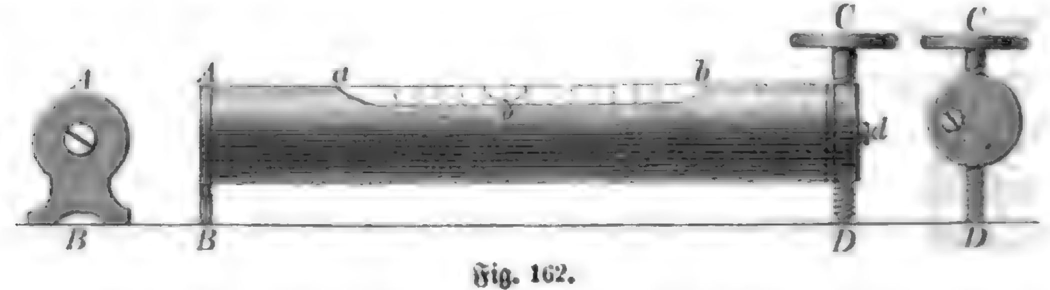


Fig. 162.

Ausschnitte a b kann man den Stand der Luftblase beobachten. Das Ganze erhält einen angemessenen Fuß B, D, wie derselbe dem jedesmaligen Zwecke, wozu die Libelle bestimmt ist, entspricht und wovon nachher noch die Rede sein wird.

Damit aber eine nebst einer tropfbaren Flüssigkeit in eine Röhre geschlossene Luftblase bei horizontaler Stellung der Röhre in der Mitte stehen bleibe, muß

die Röhre nach der obern Seite hin gewölbt, und damit die Luftblase bei schiefer Lage der Röhre um eine der Neigung der Röhre proportionale Größe von der Mitte abweiche, muß sie regelmäßig gekrümmt sein. Während daher eine gewöhnliche Glasröhre cylinderförmig ist, und in- und auswendig der Achse des Cylinders parallele, gerade Seitenlinien hat, muß bei einer Libellenröhre wenigstens die innere Fläche der obern Seite in der Mitte ausgebaucht sein; die Seitenlinien der innern Fläche müssen also an dieser Stelle nach innen zu concav sein, weil nur bei dieser Form die Mitte der Röhre der höchste Punkt wird, so lange die geometrische Achse der Libelle horizontal liegt. Dies kann auf verschiedene Weisen erreicht werden. Entweder man gibt der ganzen Röhre eine Biegung wie Fig. 163 ABDC. Man gelangt dazu, wenn man eine mehrere Fuß lange Röhre so weit erhitzt, daß sie anfängt weich zu werden; wird sie dann an beiden Enden festgehalten, so senkt sich die Mitte etwas durch ihre eigene Schwere und erstarrt in dieser Lage. Man theilt sie dann in Abschnitte von der Länge der Libelle, bezeichnet an jedem Abschnitt die convexe Seite (weil die Krümmung so gering ist, daß sie sich am einzelnen Stück nicht bemerken ließe), und schneidet sie dann in die einzelnen Stücke. Oder man erweicht eine längere Röhre vorherrschend in der Mitte, stößt sie von beiden Seiten etwas zusammen, so nimmt sie die Gestalt der innern Fläche der Fig. 164 an. Diese beiden Verfahrungsarten werden aber nie eine vollkommen regelmäßige Krümmung geben; daher werden die genauern Libellen heutzutage immer von innen ausgeschliffen. Man verfertigt sich einen stählernen Dorn, dessen Seitenlinien, d. h. die Durchschnitte aller durch die Achse gehenden Ebenen mit der äußern Fläche, Kreisbogen mit nach außen gekehrter Convexität sind; der größte Durchmesser dieses Körpers ist etwas geringer als der der Röhre, aus welcher die Libelle gemacht werden soll. Diesen Dorn steckt man auf die Drehbank, steckt eine Glasröhre von schicklicher Weite über den Dorn, nachdem man auf diesen einen Brei von Schmirgel und Oel aufgetragen hat, und schleift nun in der Weise, daß man während der Drehung des Dorns die Röhre immer von derselben Seite sanft gegen den Dorn drückt. Erst wird mit grobem Schmirgel geschliffen, bis die Röhre die richtige Form erhalten hat, dann mit feinerm, nachher mit gepulvertem und geschlemmtem Bimsstein, endlich mit Eisenoxyd, um das Glas wieder zu poliren und durchsichtig zu machen. Die ausgeschliffene Seite der Röhre wird bei der Befestigung in ihrer Fassung nach oben gerichtet.

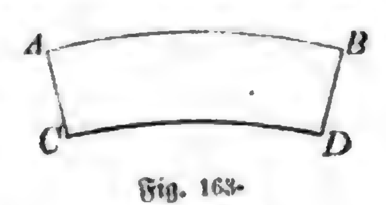


Fig. 163.

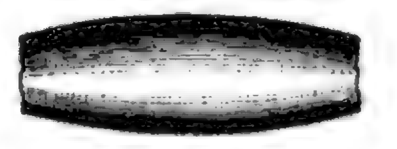


Fig. 164.

§. 143. Die Füllung der Libellen bestand sonst aus Wasser, da aber selbst destillirtes Wasser wegen darin zurückgebliebener organischer Stoffe nach

längerer Zeit faul wird, so nimmt man jetzt Alkohol oder Schwefeläther; letzterer ist flüssiger, gestattet daher der eingeschlossenen Blase auch mehr Beweglichkeit als der Alkohol und eignet sich deshalb besonders für sehr genaue und empfindliche Libellen. Um den höchsten Grad der Empfindlichkeit hervorzubringen, wird die Luftblase in den mit Aether gefüllten Libellen durch eine Dampfblase dieser Flüssigkeit selbst ersetzt. Zu diesem Zwecke wird das Rohr bis auf eine feine Spitze am einen Ende zugeblasen, mit Aether gefüllt, indem man das Rohr etwas erwärmt, mit der Oeffnung unter Aether taucht, wo dann beim Abkühlen des Rohrs der Aether durch den äußern Luftdruck in das Rohr hineingetrieben wird; man füllt so viel hinein, daß bei gewöhnlicher Temperatur noch ein kleines Volumen Luft darin bleibt, erwärmt das Ganze über heißem Sande, Asche oder in heißem Dampfe so weit, daß die im Rohr enthaltene Flüssigkeit wegen ihrer Ausdehnung durch die Wärme den ganzen innern Raum ausfüllt, und bläst dann die Spitze an der Schmelzlampe zu. Beim Abkühlen zieht sich der Aether wieder zusammen und der von flüssigem Aether freie Raum füllt sich mit Aetherdämpfen.

Die Libellen mit Luftblase sowol wie die mit Dampfblase erleiden gewisse Veränderungen, wenn sie durch die darauf scheinende Sonne oder durch Anfassen mit den Fingern erwärmt werden. In jenen dehnt sich der Alkohol, wegen der viel größern Menge desselben, beträchtlich mehr aus als die kleine Luftblase, obgleich sonst die Luft sich durch Erwärmung mehr ausdehnt als ein gleiches Volumen Alkohol. Die eingeschlossene Luft wird daher, ungeachtet ihrer Erwärmung, auf ein kleineres Volumen zusammengedrängt und geräth dadurch in nicht geringe Spannung. Bei der Dampfblasenlibelle entsteht bei steigender Temperatur ein vermehrter Druck, ein Theil des Aetherdampfes verwandelt sich daher in tropfbar flüssigen Aether; da aber der Siedepunkt des Aethers (etwa 30° R.) niedriger ist als der des Alkohols (64° R.), so ist auch, bei gleicher Temperatur beider, der Druck im Aether größer als im Alkohol *), besonders in mit Wasser verdünntem Alkohol, wie solcher zu Libellen immer genommen wird. Fürchtet man also irgend einen Nachtheil von dem durch zufällige Erwärmung der Flüssigkeit hervorgerufenen Drucke, so sind in dieser Beziehung die Alkohollibellen denen mit Aether vorzuziehen.

§. 144. Der Verschluß der Libellen ist im Laufe der Zeit auf verschiedene Weisen bewirkt worden. Das gewöhnlichste Verfahren ist, daß man

*) Alle Dämpfe üben beim Siedepunkt der Flüssigkeit, aus der sie entstanden, einen gleichen Druck aus, nämlich gleich dem Luftdrucke; je mehr die Temperatur unter dem Siedepunkt der betreffenden Flüssigkeit steht, desto geringer ist der Druck. Bei 20° R. z. B. übt Aetherdampf einen größern Druck aus als Alkoholdampf, weil diese Temperatur nur 10° unter dem Siedepunkt des Aethers, dagegen 44° unter dem des Alkohols ist.

das eine Ende der Libelle vor dem Füllen halbkugelförmig zuschmelzt, das andere Ende an der Schmelzlampe zu einer feinen Spitze auszieht, die Röhre mit der Flüssigkeit füllt und die Spitze zubläst. Weil aber das Zuschmelzen, während das Innere mit einer leicht verdampfbaren und selbst leicht entzündlichen Flüssigkeit gefüllt ist, seine Schwierigkeiten hat, und die Luftblase bald zu groß, bald zu klein wird, ist ein anderes Verfahren üblich geworden. Man schleift den innern Rand der Röhre kegelförmig aus und schleift dann einen in die Oeffnung passenden Glasstöpsel, der, nachdem die Röhre gefüllt worden, auch wol noch von außen verkittet wird. Ein bei genauen Libellen jetzt oft angewendeter Verschluß besteht darin, daß man den Rand der Oeffnung eben schleift, eine ebenfalls eben geschliffene Glasplatte auflegt und nasse Blase darüberzieht. Da sich indeß dieser Verschluß, auch selbst wenn man die Glasplatte verkittet, nicht dauerhaft erweist, so hat der Mechaniker Paul in Kassel den Verschluß mit der Glasplatte noch mit einer Hülle galvanisch niedergeschlagenen Kupfers überzogen; die Erfahrung muß erst noch herausstellen, ob dieses Mittel sich als zweckmäßig erweise.

§. 145. Ist die Libellenröhre mit der Flüssigkeit gefüllt und zugeblasen, so wird auf der Seite des nach außen convexen Bogens eine Scala angebracht. In der Mitte der Krümmung wird der Nullpunkt bezeichnet, von dem aus, nach der Länge der Libelle, nach beiden Seiten hin, gleiche, sonst willkürliche Theile aufgetragen werden. Die Theilstriche werden mit Diamant ins Glas geritzt. Zu gewissen, später noch anzuführenden Zwecken ist es rathsam, den aufzutragenden Theilen ein bestimmtes Maß zu geben, z. B. eine par. Linie, oder ein Millimeter u. s. w.

Die so weit vorbereitete Libelle muß nun mit einer Fassung versehen werden; je nach dem Zwecke ist diese verschieden. Libellen werden aber gebraucht:

I. um Instrumente oder Theile derselben horizontal zu stellen; dabei können sie:
   1) auf eine Ebene gesetzt,
   2) auf ein cylindrisches Rohr gestellt werden,
   3) an verschiedene Instrumententheile, besonders an cylindrische Röhren (Fernröhre) oder deren Drehachsen angehängt werden;

II. um kleine Winkel zu messen.

I. Libellen zur Horizontalstellung.

1. Die Libelle wird auf eine Ebene gesetzt.

§. 146. Man faßt das Glasrohr in einen oben offenen Messingcylinder, so daß die Oeffnung die Theilung der Libelle abzulesen, also auch den Stand

der Blase in der Nähe des Nullpunktes zu beobachten gestattet (Fig. 162). Am einen Ende ruht die Fassung auf einem Fuße AB, am andern auf einer Stellschraube CD, durch welche sich die Libelle auf einer Seite heben und senken läßt, indem sie sich dabei um die eine Kante der untern Fläche B des Fußes dreht. Um den Gang der Schraube C zu reguliren ist die Mutter zur Hälfte eingesägt (aufgeschlitzt), die so entstandenen beiden Backen der Mutter werden aber wieder durch eine Klemmschraube d zusammengehalten, wodurch erreicht wird, daß ein zu schwerer Gang beseitigt werden kann, indem man die Schraube d etwas löst, und ein todter Gang, indem man sie etwas anzieht. Von a bis b ist die Fassung ausgeschnitten und von 0 aus die Theilung auf die Glasröhre aufgetragen.

Fig. 165.

Eine andere Form dieser Libelle stellt die Fig. 165 vor, wo statt des Fußes bei AB ein Gewinde angebracht ist, in welchem die Libelle sich dreht, wenn sie auf der andern Seite durch die Schraube CD gehoben oder gesenkt wird.

Bei dem Gebrauche einer schon richtig gestellten Libelle von der Form der eben beschriebenen geschieht es oft, daß die Schraube CD sich etwas verstellt, ein- oder ausschraubt, wodurch dann der Libelle wieder eine unrichtige Stellung gegeben wird. Um dies zu verhindern, umgibt man den untern Theil der Schraubenspindel mit einer elastischen Stahlfeder, die sich oben gegen die Mutter der Schraube stützt; unten greift dann die Schraube in die Unterlagsplatte ein und die Feder stützt sich auch hier gegen diese Platte (Fig. 166). Dadurch wird bewirkt, daß sich die Gänge der Spindel und Mutter fest an einander drücken, und eine freiwillige Bewegung der Spindel unmöglich wird.

Fig. 166.

2. Die Libelle wird auf eine cylindrische Röhre gesetzt.

§. 147. Unter allen zu diesem Zwecke ausgedachten Constructionen dürfte die der Fig. 167 am meisten zu empfehlen sein. Die Röhre ruht auf zwei unten

Fig. 167.

Digitized by Google

bogenförmig ausgeschnittenen Füßen M, N, mit welchen sie auf die Röhre gesetzt wird; die messingene Fassung abcd umfaßt die Röhre gh zur Hälfte, und ist letztere durch die Bänder mn, m′n′ an die Fassung befestigt; die Füße M, N sind mit der Fassung nur durch die verschiebbaren Ansätze k, k′ verbunden; diese können durch die Schräubchen x, x′, y, y′ bewegt werden, und zwar k in der Verticalebene, k′ in der Horizontalebene, beides senkrecht zur Achse der Libelle. Das Schräubchen x greift in den Ansatz k ein, während x′ nur stumpf auf demselben aufsteht. Löst man das Schräubchen x etwas, so senkt sich der Körper k und damit die Libellenachse tiefer, da x nur in seinem untern Theile Gänge hat und M ihm nur als Führung dient; zur Befestigung schraubt man dann x′ nach, so daß es wieder auf k aufsitzt, oder nöthigenfalls k so weit vor sich herschiebt, als die Schraube x gestattet. Die entgegengesetzte Bewegung der Schräubchen x, x′, wobei jedoch x′ erst gelöst werden müßte, würde den Körper k und somit die Libellenachse heben. Die Schräubchen y, y′ stehen beide auf dem Körper k′ stumpf auf. Löst man y′ und schraubt y ebenso viel nach, so rückt k′ und damit die Libellenachse nach hinten zu; löst man y und schraubt y′ nach, so rückt die Achse nach vorn.

3. Die Hängelibelle.

§. 148. Von der Hängelibelle gibt Fig. 168 eine Vorstellung. AB ist ein cylindrisches Rohr oder eine massive cylindrische Achse. Mittels der

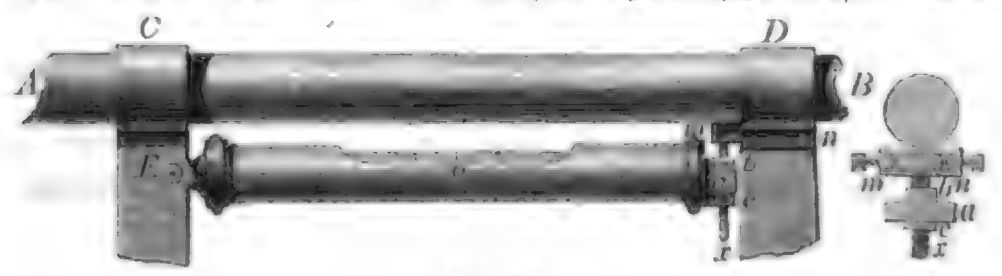


Fig. 168.

Bänder C, D ist die Libelle damit verbunden. Am einen Ende bewegt sie sich im Gewinde E um einen runden Stift, am andern ist eine Schraube x fest mit dem Querstück mn verbunden; die Schraube geht durch den Ansatz a, der keine Gänge hat, hindurch; über a ist die Mutter b, unter a die Mutter c. Soll die Libellenachse gehoben werden, so schraubt man erst b, dann c aufwärts; soll die Achse tiefer gerückt werden, so schraubt man erst c, dann b abwärts. Das Querstück mn kann auch so wie bei Fig. 167 eingerichtet sein, wie die beistehende Vorderansicht zeigt, um die Libelle dadurch in der Horizontalebene berichtigen zu können.

§. 149. Die Abweichung der Luftblase vom Krümmungsmittelpunkte der Libelle heißt der Ausschlag der Blase. Es soll nun ein analytischer Ausdruck für die Größe des Ausschlags gefunden werden. Es sei (Fig. 169)

CB = r der Krümmungsradius der innern Glasfläche FBAD der Libelle, B die Mitte der Krümmung, also der Ort der Luftblase bei horizontalem Stand der Libelle, folglich dann auch BC ein verticaler Radius der Krümmung; FG sei eine zur Achse der Libelle parallele, also gegen CB senkrechte Sehne. Neigt man die Libelle so, daß die Achse in derselben Verticalebene bleibt, und FG die Lage ED annimmt, in welcher sie mit FG den Winkel GHD = α macht, und ist A die Mitte des Bogens ED, also die neue Lage des Punktes B, so hat B den Bogen BA = b beschrieben, dem der Centriwinkel ACB = φ zukommt. Da FG auf CB und ED auf CA senkrecht steht, so ist α = φ und Bogen AB oder

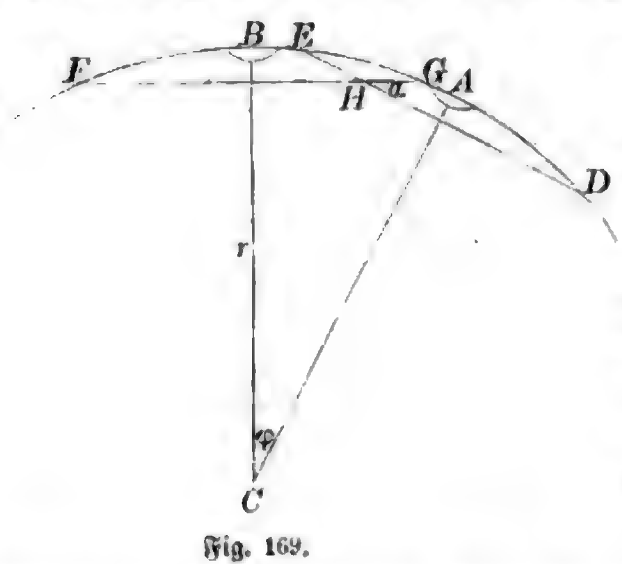


Fig. 169.

$$b = \frac{\varphi r}{\omega},$$

wodurch der Ausschlag b der Blase bei gegebener Neigung φ der Libellenachse bestimmt ist. Der Ausdruck zeigt, daß der Ausschlag dem Krümmungsradius direct proportional ist; je größer der Radius der Krümmung, desto größer wird der Ausschlag bei gleicher Neigung, desto empfindlicher ist die Libelle. Der Bruch

$$\frac{b}{\varphi} = \frac{r}{\omega}$$

(wo ω = 206264,8) heißt die Empfindlichkeit der Libelle.

Aus der eben gewonnenen Gleichung findet man den Radius für einen gegebenen Ausschlag und Neigungswinkel, nämlich, wenn die Libelle bei der Neigung φ den Ausschlag b geben soll, so muß:

$$r = \frac{b}{\varphi} \cdot \omega$$

sein. Bei manchen Libellen findet man eine Aufschrift etwa wie: „16 par. Linien = 1 Minute“, wobei 16 Linien den Bogen b, 1 Minute die Neigung φ oder α bedeutet; also gibt die Aufschrift eigentlich die Empfindlichkeit der Libelle an. Diese Empfindlichkeit erfordert also einen Radius

$$r = \frac{16}{60} \cdot 206264{,}8 \text{ par. Linien}$$
$$= 381 \text{ Fuß } 11 \text{ Zoll } 7{,}9 \text{ par. Linien.}$$

§. 150. Zur Prüfung der Libelle bedarf man unumgänglich eines kleinen Apparats, den wir Justirplatte nennen wollen. Sie ist in Fig. 170 vorgestellt. ABCD ist eine länglich viereckige Platte von Glas oder Metall; es kann auch eine Holzplatte sein, die oben mit einer Glas- oder Metallplatte gedeckt ist. An den Ecken A, B und in der Mitte der Seite CD sind

die Stellschrauben v′, v″ und v angebracht, wodurch die Platte horizontal gestellt werden kann. Die Schrauben v′, v″ sind mit einfachen Köpfen versehen; v aber hat außerdem noch die getheilte Zählerscheibe mm mit dem Zeiger n. Letzteres ist ein Elfenbeinstäbchen, das an die Außenfläche der Seite CD angeschraubt ist und mit dem zugeschärften Rande die Zählerscheibe mm beinahe berührt, so daß sie stets auf irgend einen Theilstrich derselben zeigt. Das wesentlichste Erforderniß dieses Instruments ist nun, daß die obere Fläche der Platte eine möglichst vollkommene Ebene bilde.

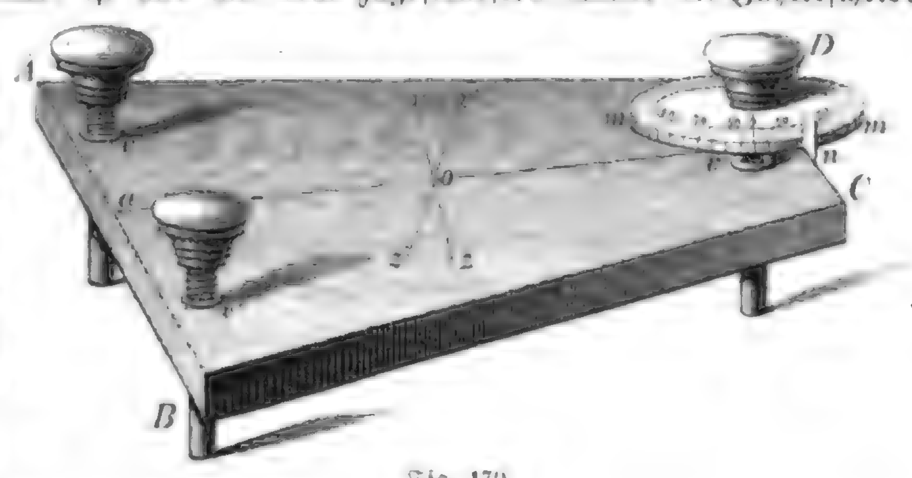


Fig. 170.

Man ziehe auf der Platte die Linie v′v″ zwischen den Achsen der Schrauben v′v″, bestimme die Mitte a der Linie v′v″ und ziehe die Gerade av von a nach der Achse der Schraube v. Ueberdies messe man, weil es zu den folgenden Untersuchungen oft gebraucht wird, die Höhe eines Schraubenganges der Schraube v. Dies geschieht dadurch, daß man die Länge mißt, welche eine größere Anzahl Schraubengänge einnimmt, und diese Länge, in einem beliebigen Maße ausgedrückt, durch die Anzahl der Schraubengänge dividirt. Wir bezeichnen die so gefundene Höhe eines Schraubenganges durch k.

Man messe dann die Linie $av = e$ auf der Justirplatte, schraube mittels der Schraube v die Platte um die Höhe $vc = h$ in die Höhe, zähle die Zahl der Umdrehungen n, so ist:

$$nk = h.$$

Ist dann Winkel $vac = \psi$, so hat man:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{e} = \frac{nk}{e}.$$

Da aber ψ immer nur sehr klein sein wird, so kann man dafür setzen:

$$\psi = \frac{nk}{e},$$

also:

$$\psi = \omega n \cdot \frac{k}{e} \text{ Secunden.}$$

Hierdurch ist der Neigungswinkel der Justirplatte, welcher n Umdrehungen der Mikrometerschraube v entspricht, bestimmt. Es versteht sich von selbst, daß die Platte bei diesem Versuche nicht viel von der Horizontalen abweichen darf; man wird sie also vor dem Versuche nach dem Augenmaße annähernd horizontal stellen.

§. 151. Es ist nun bei der Röhrenlibelle zu untersuchen:

1) der Grad der Empfindlichkeit;
2) ob die Empfindlichkeit in der ganzen Länge der Scala dieselbe bleibe, ob also die Krümmung der Röhre regelmäßig sei;
3) ob die Achse der Libelle mit der Unterlage parallel sei; bei den auf Cylindern stehenden oder an einem Cylinder hangenden Libellen ist zu prüfen, ob die Libellenachse mit der Cylinderachse parallel sei.

1) Die Prüfung ad 1 ist auf folgende Weise vorzunehmen. Man stelle die Justirplatte annähernd horizontal und setze die Libelle so darauf, daß sie die Richtung der Linie av erhält. Nun beobachte man genau den Ausschlag der Blase an der Scala. Hierbei muß man den Theilstrich am Anfang und am Ende der Blase ablesen, beide Ablesungen addiren und ihre Summe durch 2 dividiren, so hat man den richtigen Ausschlag. Sollte der Nullpunkt der Scala innerhalb des von der Blase eingenommenen Raumes fallen, so müßte man die eine Ablesung als positive, die andere als negative Zahl in Rechnung bringen und dann ebenfalls das arithmetische Mittel nehmen. Hat man so den genauen Ausschlag b der Blase bestimmt, so schraube man die Mikrometerschraube v einigemal herum, zähle die Zahl n der Umdrehungen, so wird die Neigung der Platte sich um

$$\psi = n \cdot \frac{k}{e}$$

verändert haben, und der Ausschlag wird in b' übergehen, sodaß der Neigungswinkel ψ dem Ausschlage $b' - b$ oder $b - b'$ entspricht, je nachdem $b' \gtrless b$, d. h. je nachdem man durch das Drehen der Schraube die schon vorhandene Neigung der Platte vergrößert oder verkleinert hat.

2) Die Prüfung des zweiten Punktes ist nun sehr leicht zu führen; man braucht nämlich nur die Neigung der Platte wiederholt zu verändern, aus der Zahl der Umdrehungen der Schraube v die Aenderung der Neigung zu berechnen und jedesmal die Aenderung des Ausschlags von der Scala abzulesen. Bleibt der Ausschlag dem Neigungswinkel proportional, so ist die Libelle in dieser Hinsicht untadelhaft; sonst aber ist ihre Krümmung unrichtig und es muß das Libellenrohr mit einem andern vertauscht werden.

3) Prüfung der Lage der Libellenachse. Man setze die Libelle auf die Justirplatte und zwar so, daß die Libellenachse mit der Linie av annähernd in eine Ebene fällt, und bringe die Blase durch Heben oder Senken der Schraube v zum Einspielen im Nullpunkte der Theilung. Hat man diese Lage erreicht, so ist die Libellenachse horizontal; man setze dann die Libelle um, d. h. man drehe sie auf der Justirplatte um 180° herum, so daß sie also wieder nach der Linie av zu stehen kommt, jedoch das Ende, welches nach a hin gerichtet war, nach v, und umgekehrt. Spielt nun die Blase wieder ein, so

ist die Achse wieder horizontal, fällt also mit derselben Achse in ihrer vorigen Lage zusammen, d. h., wenn man in der Fig. 171 DN nach BM bringt und umgekehrt, so fällt, AC als Libellenachse angesehen, C in A und A in C, falls AB, CD senkrecht auf die Unterlage PQ gedacht werden; also ist dann AB = CD, folglich AC ∦ BD.

Fig. 171.

Spielt aber die Luftblase nach dem Umsetzen der Libelle nicht wieder ein, so ist auch AC nicht mit BD parallel, also war auch die Unterlage der Libelle, BD, nicht horizontal. Es sei daher für diesen Fall (Fig. 172) AH die Horizontale durch einen beliebigen Punkt A, AD die Unterlage der Libelle BMNC, so gestellt, daß die Blase der Libelle einspielt, also MN, welches wir hier, um die Figur in einfacher Gestalt zu lassen, statt der Libellenachse nehmen, horizontal, so ist, nach der in der Figur gewählten Bezeichnung der Winkel, da MD ∦ AH, Winkel $x = \beta$. Setzt man nun die Libelle um, so kommt C nach B und B nach C zu liegen; BN′ ist das vorige CN, CM′ das vorige BM also auch $x = \alpha$; folglich $y = \alpha + \beta$, oder $y = 2x$. Der Winkel y gibt aber den Ausschlag der Luftblase in Winkelmaß an, x die Neigung der Libellenachse gegen die Unterlage; also ist der **Ausschlag immer doppelt so groß als die Neigung der Libellenachse gegen die Unterlage.**

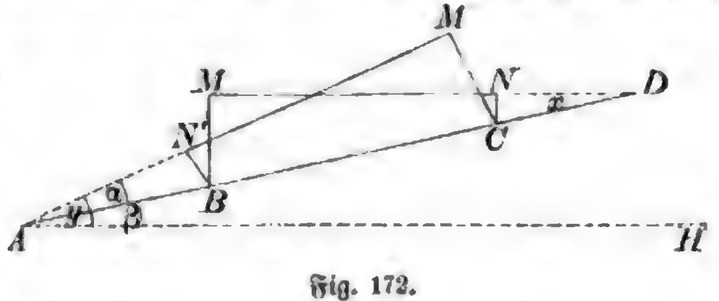


Fig. 172.

Die Neigung x macht den **Fehler der Libelle** aus. Um ihn zu **berichtigen**, wird man die Stellschraube der Libelle zur Hälfte dieses Fehlers heben oder senken, die andere Hälfte aber an der Stellschraube der Justirplatte verbessern, weil diese mit dem Horizonte den Winkel $\beta = x$ macht. Nach solcher ersten Schraubenstellung muß man die Libelle wieder umsetzen und nachsehen, wie viel man noch zu verbessern haben werde. Der noch vorgefundene Fehler wird wieder zur Hälfte an der Libelle, zur andern Hälfte an der Unterlage verbessert, und dieses Verfahren so lange fortgesetzt, bis die Blase auch nach dem Umsetzen einspielt.

§. 152. Zur Prüfung von Libellen von der Form der Fig. 167 bedarf man noch eines Hülfsapparats, den man sich dadurch verschafft, daß man auf die Justirplatte (Fig. 170), wie die Fig. 173 zeigt, zwei gabelförmige Träger aufschraubt, T und T′. Ist nämlich ABCD die Justirplatte, wo

jedoch die Schrauben v′, v″, v nur angedeutet sind, während sie in der Wirklichkeit gerade so ausgeführt sein sollen, wie in Fig. 170, so ist von m bis n eine Spalte in die Platte längs der Linie a v geschnitten; durch diese Spalte werden die Füße der Träger T, T′ gesteckt, bis sie mit der Wulst auf der Platte aufliegen und von unten mit einer Mutter angezogen werden können.

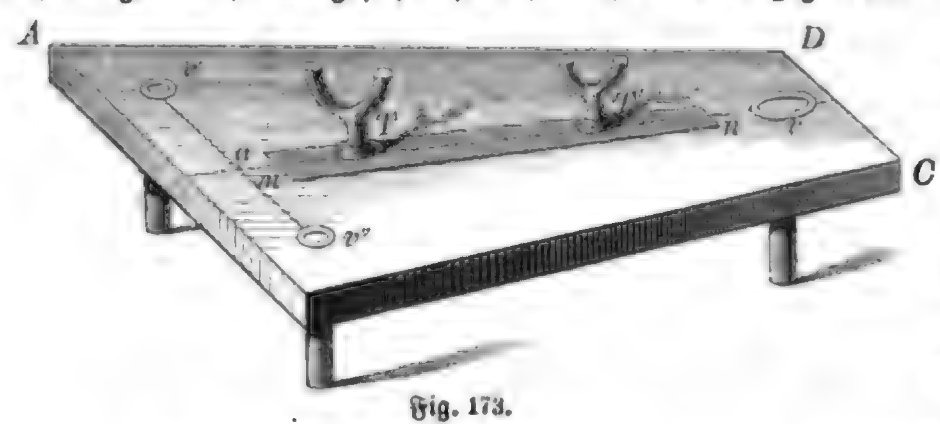
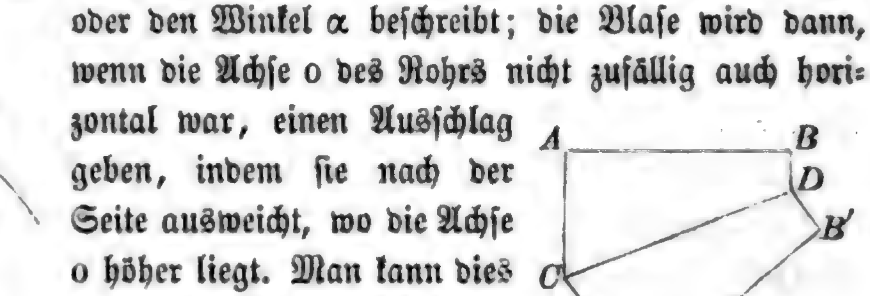


Fig. 173.

Diese Träger T, T′ dienen nun dazu, das Rohr oder die Achse, auf welche die Libelle (Fig. 167) aufgesetzt werden soll, aufzunehmen. Wenn die Libelle so auf das in den Gabeln liegende Rohr gesetzt ist, so bringe man mittels der Schraube v die Blase zum Einspielen; dann ist die Libellenachse horizontal, mag die Achse des Rohrs es sein oder nicht. In beiden Fällen, nämlich wenn die Rohrachse horizontal ist, und auch wenn sie nicht horizontal ist, sind noch zweierlei Lagen zur Libellenachse möglich: sie kann nämlich mit dieser in einer Ebene liegen oder nicht.

Liegt die Achse des Rohrs mit der Libellenachse in einer Ebene, und man hat die Blase zum Einspielen gebracht, so drehe man die Libelle m (Fig. 174) so auf dem Cylinder o herum, daß ihre Achse den Bogen m n oder den Winkel α beschreibt; die Blase wird dann, wenn die Achse o des Rohrs nicht zufällig auch horizontal war, einen Ausschlag geben, indem sie nach der Seite ausweicht, wo die Achse o höher liegt. Man kann dies an der Fig. 175 deutlich sehen, wo AB die horizontal gestellte Libellenachse, CD die in derselben Ebene, aber schief liegende Achse des Rohrs, welches der Libelle zur Unterlage dient, vorstellt (für den Fall nämlich, daß AB und CD nicht parallel sind).



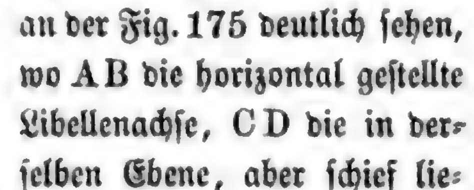


Fig. 174.

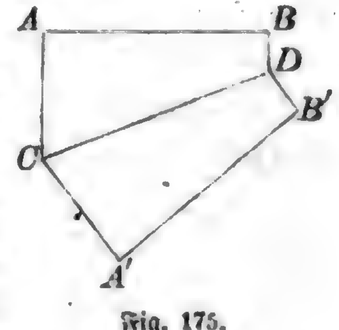


Fig. 175.

Dreht man die Figur ABDC um CD herum, so daß jeder Punkt einen Bogen von 180° beschreibt, so kommt ABDC in die Lage A′B′DC, also B′ höher zu liegen als A′. Daß dasselbe bei einer geringern Drehung als 180° auch schon geschieht, wenn auch in geringerm Maße, leuchtet von selbst ein. Auch macht es in der Bewegungsrichtung der Blase keinen Unterschied, ob man AB nach

rechts oder nach links hin drehe, weil in beiden Fällen das Ende B höher zu liegen kommt.

Liegen also beide Achsen in einer Ebene und ist die der Libelle horizontal, so bewegt sich die Blase stets nach der Seite, wo die Rohrachse o höher liegt, man mag die Libelle auf dem Rohre nach der einen oder andern Seite bewegen.

Liegen dagegen die Achsen m und o (Fig. 174) nicht in derselben Ebene, so wie Fig. 176 solches vorstellt, wo die Libellenachse mm′ horizontal, also die Rohrachse oo′ nicht horizontal ist, die Rohrachse aber in der Zeichenebene liegt, während für den Beschauer der Zeichnung das Ende m der Libellenachse hinter der Zeichenebene zurücksteht und m′ vor dieselbe (gegen den Beschauer hin) heraustritt, und man bewegt die Libelle um oo′ herum, gegen den Beschauer hin, so hebt sich offenbar m, während m′ sich senkt; bei dieser Bewegung rückt daher die Blase aus dem Centrum nach m zu; bewegt man dagegen die Libelle in der entgegengesetzten Richtung, vom Beschauer abwärts, so senkt sich m, und m′ hebt sich; die Blase begibt sich daher aus dem Centrum nach m′ hin. Denkt man sich nämlich eine Verticalebene durch oo′, so liegt bei horizontaler Lage der Achse mm′, m jenseit, m′ diesseit dieser Verticalebene, oder umgekehrt.

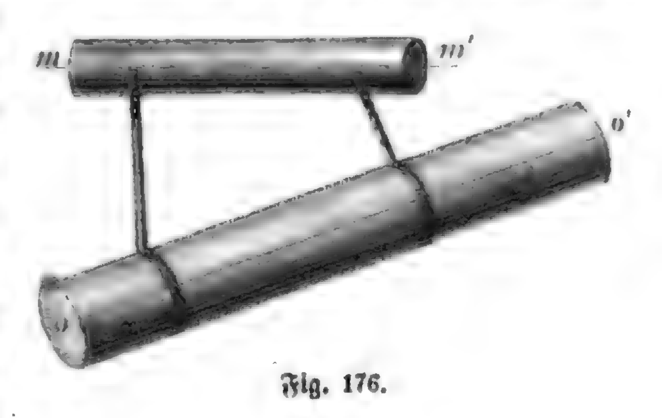


Fig. 176.

Aus dieser Betrachtung entnehmen wir folgenden für die Prüfung und Berichtigung der Libelle höchst wichtigen Satz: **Bewegt sich die Blase der Libelle nach derselben Richtung hin, man mag die Libelle nach der einen oder andern Seite um das Rohr herumdrehen, so liegen die Libellen- und Rohrachse in einer Ebene; fällt dagegen der Ausschlag der Blase nach verschiedenen Richtungen, je nachdem man die Libelle nach der einen oder andern Seite um das Rohr herumbewegt, so liegen die beiden Achsen auch nicht in einer Ebene.**

Hat man sich überzeugt, daß das letztere der Fall ist, so bringt man beide Achsen in dieselbe Ebene mittels der Schräubchen y, y′ (Fig. 167). Findet man dann durch wiederholte Versuche, daß nun beide Achsen in einer Ebene liegen, so müssen sie noch parallel miteinander gestellt werden. Dies geschieht ganz in derselben Weise, wie mit einer auf einer Ebene aufgesetzten Libelle, nur daß hier die Libelle auf dem Rohre oder Cylinder ruht, der selber auf die Träger T, T′ der Fig. 173 gelegt ist.

Die Hängelibelle kann, wenn sie die Construction der Fig. 168 hat, gerade

ebenso geprüft und berichtigt werden, wie bei der Aufsatzlibelle eben gezeigt worden.

§. 153. Die Röhrenlibelle dient dazu, Linien und Ebenen horizontal zu stellen und kleine Winkel zu messen. Wie Linien, z. B. die Achsen der Fernröhre u. s. w. mit einer berichtigten Libelle horizontal gestellt werden, ist nun wol an sich schon klar. Jedenfalls muß das horizontal zu stellende Instrument Vorrichtungen zur Berichtigung haben. Sind solche vorhanden und die aufgesetzte (oder angehängte) Libelle zeigt einen Ausschlag, so erniedrigt man die Seite, welche danach für zu hoch gehalten werden muß, womöglich bis die Libelle einsteht. Einige besondere Winke hierüber, welche sich auf die eigenthümliche Construction einzelner Apparate beziehen, werden bei Gelegenheit der Beschreibung dieser Instrumente gegeben werden. Gewöhnlich sind alle solche Instrumente nach zwei auf einander senkrechten Richtungen verstellbar; ist die Libelle berichtigt, so richte man die Unterlage (das horizontal zu stellende Instrument) erst, mittels der berichtigten Libelle nach der einen dieser Richtungen horizontal, dann nach der darauf senkrechten.

Man kann aber auch die Justirplatte, oder irgend ein anderes auf drei Stellschrauben ruhendes Instrument selbst mittels einer unberichtigten Libelle horizontal stellen. Wir wollen annehmen, es sei dies die Justirplatte; das Verfahren wird sich dann auf jeden andern Fall anwenden lassen. Man setze die Libelle auf die ungefähr, nach dem Augenmaße, horizontal gestellte Platte ABCD (Fig. 170), senkrecht zur Linie av, sie wird meist einen Ausschlag geben. Durch Verstellen der Schrauben v′, v″ bringe man es dahin, daß der Ausschlag irgendwo seitwärts von der Linie av falle; drehe dann die Libelle um 180° herum und verstelle die Schrauben v′ und v″ so, daß der Ausschlag auf die andere Seite von av fällt und zwar so, daß, wenn die Blase vorher über x fiel, sie jetzt über z zu stehen kommt, während xoz ein Loth zu av und ox = oz ist. Um dies zu erreichen wird man, wenn z. B. oz noch größer würde als ox, den Ausschlag oz durch die Schrauben v′, v″ nur um die Hälfte des Unterschieds oz — ox kleiner machen dürfen, weil ox ebenso viel größer wird als oz abnimmt. Hat man es erreicht, daß ox = oz, so ist die Linie v′v″ horizontal. Nun drehe man die Mikrometerschraube v so, daß, wenn die Libelle in der Richtung der Linie av aufgesetzt worden, nach der einen Seite einen Ausschlag gibt, und wenn sie dann um 180° herumgedreht worden, einen ebenso großen Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite macht. Auch dies wird dadurch bewirkt, daß, wenn der Ausschlag anfänglich nach der einen Seite größer ist als nach der andern, der größere Ausschlag mittels der Schraube v um die Hälfte des Unterschieds beider Ausschläge kleiner gemacht wird. Ist dies erreicht, so ist die Platte ABCD horizontal.

Ist es so gelungen, die Platte mittels der unberichtigten Libelle horizontal zu stellen, so könnte man natürlich sehr leicht auch die Libelle danach berichtigen, weil man jetzt an der Platte selbst nichts mehr zu ändern hätte.

II. Gebrauch der Libelle zum Messen kleiner Winkel.

§. 154. Um mittels einer berichtigten Röhrenlibelle kleine Winkel zu messen, ermittle man den Winkelwerth eines Theils der Scala nach §. 150. Er heiße w. Der zu messende Winkel werde nun vorgestellt als der Winkel, welchen zwei Krümmungsradien der Libelle machen, wovon der eine nach dem Nullpunkte der Scala, der andere zum Mittelpunkte der Blase geführt wird, also in Fig. 177, wo ADB die Blase, D ihr Mittelpunkt, C der Mittelpunkt der Libellenkrümmung, O der Nullpunkt der Scala ist, der Winkel OCD, d. h. der Neigungswinkel der Libelle. Gesetzt nun, es seien von A bis O m, von B bis O aber n Scalentheile, und es werden die Theile von O nach A hin als positive, die nach B hin als negative gerechnet, so ist AB = m — n Scalentheile, = (m — n) w Winkeltheile (etwa Secunden); AD = $\frac{1}{2}$ (m — n) w, also OD = [m — $\frac{1}{2}$ (m — n)] w = $\frac{1}{2}$ (m + n) w.

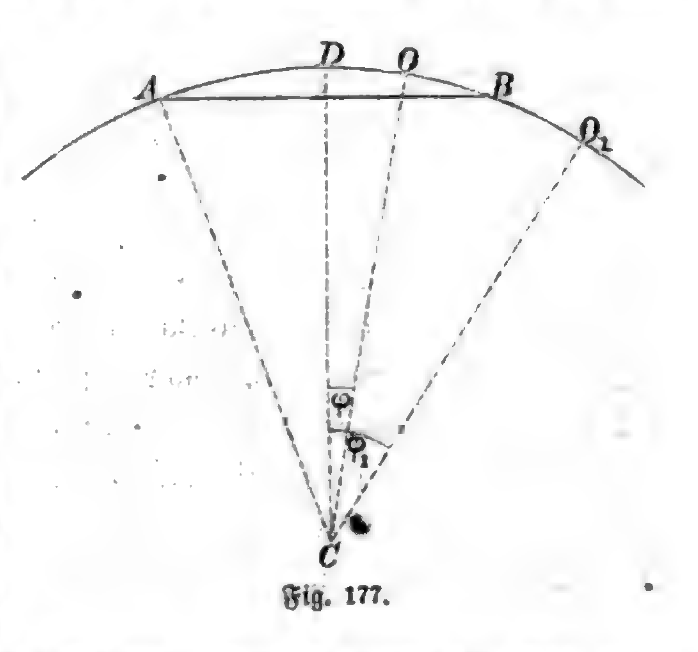


Fig. 177.

Denselben Ausdruck findet man bei jeder andern Stellung der Blase für den Neigungswinkel der Libelle. Wäre O_1 der Nullpunkt, $O_1A = m$, $O_1B = n$, so wäre $O_1CD = BD + O_1B = \frac{1}{2}AB + O_1B = \frac{1}{2}(m - n) + n = \frac{1}{2}(m + n)$, oder im Winkelwerth $= \frac{1}{2}(m + n) \cdot w$.

Um also den Neigungswinkel der Libelle zu finden, beobachtet man, um wie viel Scalentheile der Anfangs- und Endpunkt der Blase vom Nullpunkte der Scala abstehen, und multiplicirt das arithmetische Mittel beider mit dem Winkelwerthe eines Scalentheils; die so gefundene Zahl gibt den gesuchten Winkel in derselben Einheit ausgedrückt, in welcher der Winkelwerth eines Scalentheils ausgedrückt war; dabei werden die Theile der Seite, welcher die Blase sich zugewendet hat, positiv, die der andern Seite negativ in Rechnung gebracht.

b. Dosenlibellen.

§. 155. Die Dosenlibelle oder das Centrumniveau (Fig. 178) besteht aus einem kreisrunden Gefäße ABCD von Messing mit Glasdeckel, der nach außen hin plan, nach innen concav geschliffen ist. Der Durchmesser des Gefäßes beträgt etwa 3, die Höhe $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll. Der Glasdeckel ist luftdicht in den Rand des Gefäßes eingesetzt und verkittet. Der Boden hat einen vorstehenden Rand AD, und in die Mitte des Bodens ist ein durch eine Schraube c verschließbares Loch gebohrt, durch welches die Dose mit Alkohol oder Aether so weit gefüllt wird, daß nur noch eine kleine Luftblase zurückbleibt. Um den Mittelpunkt des Glasdeckels sind einige Ringe in das Glas gedreht, um die Abweichung der Blase vom Centrum desto richtiger beurtheilen zu können.

Fig. 178.

Den Krümmungsradius des Glasdeckels nimmt man bei Dosenlibellen nicht über 3 Fuß; berechnet man daraus nach der Formel des §. 149 die Empfindlichkeit, so erhält man für $\varphi = 1$ Minute:

$$\frac{b}{\varphi} = 0{,}12 \text{ Linien},$$

sodaß sie also bei 1 Minute Neigung 0,12 Linien Ausschlag gibt.

§. 156. Ob die Dosenlibelle der Anforderung genüge, daß die Blase bei horizontaler Lage des Fußes nach dem Centrum gehe, erfährt man dadurch, daß man die zur Unterlage dienende Ebene, die Justirplatte (Fig. 170, §. 150) nahezu horizontal stellt, die Libelle daraufsetzt, um ihren Fuß einen Kreis zeichnet und bei der ihr gegebenen Stellung den Ausschlag seiner Größe und Richtung nach beobachtet, dann die Libelle im Kreise herumdreht, und in jeder Stellung auf die Blase achtet. Bleibt der Ausschlag in allen Stellungen gleich groß und nach derselben Seite gerichtet, so ist die Libelle richtig und der Ausschlag gibt genau die Neigung der Unterlagsplatte an; ändert aber während der Drehung innerhalb des gezogenen Kreises der Ausschlag seine Größe oder Richtung, oder beides, so ist die Libelle unrichtig und muß, um sie zu berichtigen, am Fuße an irgend einer Stelle abgeschliffen werden.

Um die Stelle, die der Nachhülfe bedarf, aufzufinden, verfahre man ungefähr nach §. 154. Man verstelle nämlich die Schrauben v′, v″ der Justirplatte so lange, daß der Ausschlag seitwärts von av fällt, drehe die Libelle um 180° und bewirke durch die Schrauben v′, v″, daß der Ausschlag nach der andern Seite von av geht, und, sowie am angeführten Orte, beiderseits eine gleiche Größe bekomme, auch beide Ausschläge in einem auf av errichteten Lothe xoz liegen, wobei jedoch o nicht gerade die Mitte der Libelle zu sein braucht; wäre also anfänglich etwa oz > ox, so würde man den Ausschlag oz durch

Verrückung der Schrauben v', v'' um die Hälfte des Unterschiedes oz — ox vermindern; ist dann oz = ox, so ist die Linie v'v'' horizontal. Durch Verrückung der Schraube v bewirke man dann, daß xz durch den Mittelpunkt der Libelle geht, wo dann zwar xz kein Loth mehr auf av sein wird, also allenfalls durch x'z' vorgestellt sein kann; ist dann wieder ox' = oz' gemacht, d. h. gibt die Libelle auch jetzt nach beiden Seiten gleiche Ausschläge, so ist die Unterlagsplatte horizontal. Die Libelle wird dann einen constanten Ausschlag geben, wie man sie auch auf der Unterlage herumdrehen mag, und an der Seite, wohin der constante Ausschlag fällt, muß der Fuß der Libelle abgeschliffen werden. Auch hierin ist das Verfahren, eine Platte mittels einer unberichtigten Libelle horizontal zu stellen, enthalten.

Zweites Kapitel.

Instrumente zur Bezeichnung von Punkten im Felde.

§. 157. Punkte, welche als Grenzen von zu messenden Linien dienen, müssen auf sichtbare Weise bezeichnet werden, so daß man sie auch in der Ferne noch leicht wahrnehmen kann. Je nach der Ausdehnung der abzusteckenden Linie und den besondern Zwecken der Bezeichnung bedient man sich hierzu verschiedener Werkzeuge.

1. Absteckstäbe, Fluchtstäbe oder Baken, Jalons, sind 5—6 Fuß lange, $1\frac{1}{2}$ Zoll dicke cylindrische Stäbe von Tannenholz, am untern Ende mit einer kegelförmig zugespitzten eisernen Fassung versehen, dazu bestimmt, mit dieser Spitze fest in die Erde gesteckt zu werden (Fig. 179). Um sie in die Ferne besser sichtbar zu machen, werden sie mit Oelfarbe abwechselnd weiß und roth angestrichen, und um einen solchen Stab im Nothfalle auch zum Messen kleiner Entfernungen gebrauchen zu können; pflegt man dem Raume jeder Farbe die Länge einer Maßeinheit, wie sie bei Vermessungen gewöhnlich zu Grunde gelegt wird, z. B. eines Decimalfußes, zu geben. Zweckmäßig hält man sich hierzu noch einige zur Hälfte weiß, zur Hälfte roth gefärbte Fahnen, die man mit Bändern an die Absteckstäbe anbindet, um ein solches Signal noch auf größere Entfernungen leicht sichtbar zu machen.

Fig. 179.

2. Zuweilen gebraucht man auch einige längere Stangen, an welche oben eine Fahne oder ein Strohbündel, Strohkranz, oder auch ein in vier weiß und rothe Quadrate getheiltes Blech (Fig. 180) befestigt ist. Hierzu

dienen von der Rinde befreite, unten zugespitzte Hopfenstangen von 12 — 16 Fuß Länge, oder kleine Tannen von 30 und mehr Fuß Länge.

3. Eigentliche Signale bei größern Aufnahmen, die sich auf weite Entfernungen erstrecken, sind entweder künstliche oder natürliche. Als künstliche Signale dienen abgeschälte Baumstämme, die in die Erde eingegraben und zur Erzielung eines sichern Standes seitwärts mit Streben versehen werden. Nach Bedürfniß läßt sich oben eine Fahne oder ein sonst leicht sichtbares Signal aufsetzen (Fig. 181). Natürliche Signale sind Thürme oder andere Gebäude, Bergspitzen u. s. w. Man muß sich aber bei der Wahl derselben wohl vorsehen, da im Verlaufe der Messungen leicht Verwechselungen der Signale vorkommen können, wenn die dazu benutzten Gegenstände nicht entschieden leicht unterscheidbar sind.

Fig. 180.

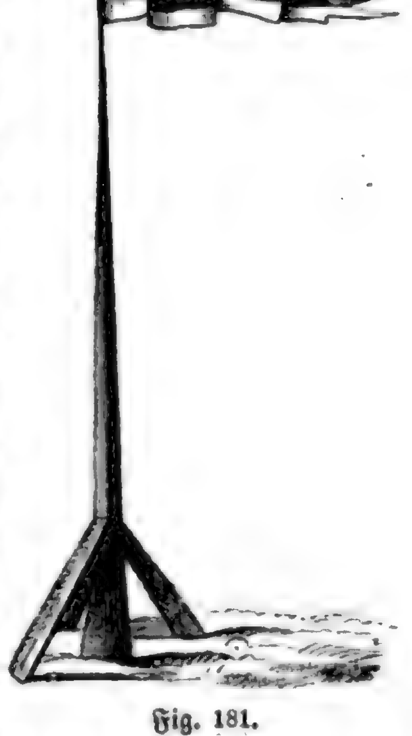


Fig. 181.

4. Alle bisher genannten Bezeichnungsarten von Punkten dienen nur vorübergehend während der Messung und bis diese vollendet ist. Zur bleibenden Bezeichnung nimmt man 1 — 2 Fuß lange Pflöcke von Eichenholz, auf welche mit Oelfarbe die erforderlichen Nummern oder sonstigen Zeichen aufgetragen werden. Wichtigere Punkte werden durch Steine, die in die Erde eingegraben werden, bezeichnet; und soll der Punkt ganz genau darauf angegeben werden, so haut man zwei sich in demselben rechtwinkelig durchkreuzende Linien auf den Stein ein. Andere, nur zu größern Aufnahmen bestimmte Vorkehrungen, als in diesem Werke in Betracht kommen, können wir übergehen.

5. Zeichenstäbe sind 1 — $1^1/_4$ Fuß lange, am einen Ende zugespitzte, am andern zu einem Ring gebogene eiserne Stäbe (Fig. 182), welche man bei der Messung von Linien mittels Ketten und Meßruthen jedesmal am Ende einer Kette oder eines Meßstabes beim wiederholten Abtragen in die Erde steckt, um zu bezeichnen, wo die Kette oder der Meßstab wieder angesetzt werden muß. Zehn solcher Stäbe reichen in der Regel aus. Ein großer eiserner Ring mit elastischem Hakenverschluß (Fig. 183) dient dazu, sie beim Transporte alle aufzunehmen.

Fig. 182.

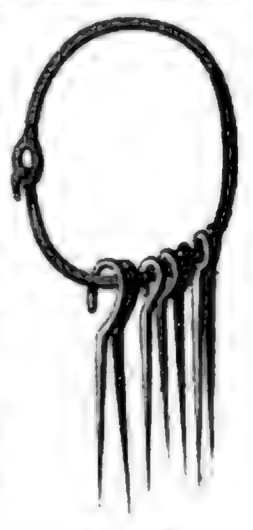


Fig. 183.

Drittes Kapitel.

Instrumente zur Distanzmessung.

1. Meßstäbe.

§. 158. Meßstäbe, auch wol Maßstäbe oder Meßruthen genannt, sind vierseitig prismatische Stangen, von einer Ruthe Länge, 2 bis $2^1/_2$ Zoll Breite und 1 Zoll Dicke; die Länge richtet sich natürlich nach dem jedesmaligen Landesmaß, oder danach, womit bei einer Vermessung die Längen bestimmt werden sollen; beim Metermaß dürften 5 Meter, bei der Toise 2 Toisen u. s. w. eine schickliche Länge für den Meßstab abgeben. Um dem Eindringen der Feuchtigkeit zuvorzukommen, werden sie mit heißem Oel oder Firniß getränkt, und um das Abstumpfen der Enden und dadurch bedingte Verkürzung zu verhindern, versieht man sie an beiden Enden mit eisernen oder messingenen Kappen, deren Endflächen genau senkrecht gegen die Längenkanten stehen und um die genaue Angabe des Maßes von einander entfernt sind. Sie werden gewöhnlich nach Decimalmaß abgetheilt.

2. Meßschnüre.

§. 159. Meßschnüre sind starke, dicht gedrehte Hanfschnüre, die zur Abhaltung des Wassers in Oel gekocht werden. Durch darangenähte farbige Zeugstreifen bezeichnet man die einzelnen Ruthen; die kleinern Abtheilungen werden in der Regel nicht bezeichnet und mit Stäben gemessen. Die Schnur kann beliebig lang genommen und auf eine Rolle aufgewickelt werden. Man bedient sich der Meßschnur besonders auch, um bei Messungen mit Stäben die gerade Linie, in der gemessen werden soll, genau zu bezeichnen.

3. Meßbänder.

§. 160. Meßbänder sind leinene Bänder, die in Leinöl gekocht, dann eine Zeit lang in Leinölfirniß gelegt und an der Luft getrocknet worden sind. Sie tragen eine Eintheilung in Ruthen, Fuß und Zolle, am besten in Decimalmaß, welche sorgfältig mit Druckerschwärze aufgedruckt wird, natürlich geschieht das Eintheilen und Bedrucken erst nach dem Oelbade. Die Bänder werden in eigenen Etuis aufbewahrt, welche man bequem in der Tasche tragen kann. Meßbänder werden zuweilen bei kürzern Distanzen, wo mit Meßstäben weniger leicht anzukommen wäre, zweckmäßig gebraucht.

§. 161. Außer den genannten Distanzmessern sind noch einige andere Vorrichtungen zu besondern Zwecken eingeführt, mit denen man ebenfalls Längen bestimmt. Um eine Linie auf unebenem Terrain, an einem Abhange u. s. w. zu messen, gebraucht man den in Fig. 184 vorgestellten Apparat. AB ist ein unten beschlagener und mit eiserner Spitze versehener vierkantiger Stab, über den sich eine Hülse ab verschieben und durch eine Druckschraube c (in der Seitenansicht sichtbar) in beliebiger Höhe feststellen läßt. Auf der der Schraube c entgegengesetzten Seite trägt die Hülse ab den Ansatz d, mit ihr zu einem Stück verbunden und dazu bestimmt, das eine Ende N des Maßstabes MN aufzunehmen, während das andere Ende M auf einer erhöhten Stelle des Erdbodens ruht. Mittels einer aufgesetzten Libelle oder auch mittels einer Setzwage überzeugt man sich, ob der Stab horizontal sei und hebt oder senkt die Hülse ab nach Bedürfniß; in N legt man während der Messung ein Senkloth NP an, um den vertical unter N liegenden Punkt zu bestimmen. Bringt man auf AB einen Maßstab an, so kann man zugleich die verticale Höhe des Punktes M über P davon ablesen.

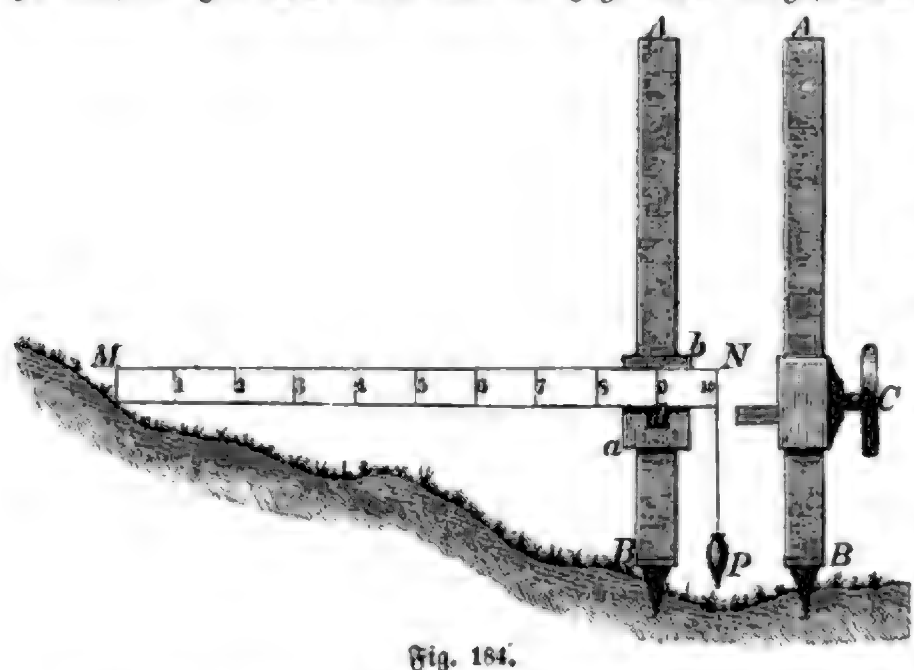


Fig. 184.

Es ist nicht möglich, die Endflächen der Meßstäbe ohne weiteres genau an den Punkt anzulegen, wo die eben zu bestimmende Stablänge anfangen soll. Bei sehr genauen Messungen mit Stäben hilft man sich dadurch, daß man zwei Stäbe zur Messung benutzt, wenn der eine seine richtige Lage erhalten hat, den andern an seinem vordern Ende daran anlegt, an diesen wieder den ersten, hieran den zweiten u. s. w. Aber es wird nicht fehlen, daß die ebenen Grenzflächen der Stäbe, auch wenn sie von Metall sind, nach und nach durch vielfachen Gebrauch uneben werden, sodaß keine vollständige Berührung der ganzen Flächen mehr möglich wird, die erste Endfläche des zweiten Stabes also nie genau dahin zu liegen kommt, wo die letzte Endfläche des ersten ist, was doch zur genauen Messung durchaus nöthig ist. Mag der Fehler noch so gering sein, so wird doch, weil er sich bei jeder Stablänge wiederholt, der Einfluß desselben auf die Messung einer beträchtlich

langen Linie sehr bedeutend werden können, um so mehr, als dieser Fehler stets in demselben Sinne wirkt, nämlich allemal das Resultat der Messung zu verkürzen. Zur Vermeidung dieses Fehlers pflegt man die Enden der Meßstäbe keilförmig auslaufen zu lassen, wie Fig. 185 zeigt, und zwar die Enden desselben Stabes so, daß die Kanten rechtwinkelig auf einander stehen,

Fig. 185.

die Kante a rechtwinkelig gegen die Ebene der Zeichnung und gegen die Kante bc, d so wie a, ef wie bc. Werden dann bei der Messung zwei Stäbe an einander gelegt, so gibt man den sich berührenden Kanten eine solche Lage, daß sie sich wie bc und d rechtwinkelig kreuzen.

§. 162. Alle Arten Maße bedürfen der öftern Prüfung und Berichtigung. Man prüft sie mittels eines Normalmeßstabes (Etalon), wie solche in den Staatsarchiven der verschiedenen Regierungen zur Sicherung des Landesmaßes aufbewahrt werden, oder doch mit Meßstäben, die nach dem Normalmaße genau geprüft sind. Wo es nicht auf den äußersten Grad der Genauigkeit ankommt, also überall in der gewöhnlichen Feldmeßkunst, genügt es, den zu prüfenden Stab mit dem Probemaße gegen ein und denselben festen Widerhalt zu stützen, beide dicht neben einander zu legen und genau nachzusehen, ob auch ihre andern Endflächen genau neben einander zu liegen kommen. Man lege daher an die Endflächen einen Winkelhaken an und sehe zu, ob der andere Schenkel genau längs des einen Stabes läuft. Ist dies nicht der Fall, so ist der zu prüfende Stab zu lang oder zu kurz. Oder umgekehrt, man lege den Winkelhaken mit einem Schenkel längs des ersten Stabes und sehe zu, ob er dann beide Endflächen mit dem andern Schenkel berühre; ein Nichtstattfinden solcher Berührung würde ebenfalls den Stab als unrichtig erkennen lassen. Ist der zu prüfende Stab zu lang befunden, so kann man durch Abschleifen der metallenen Endfläche nachhelfen; ist er zu kurz, so müßte man den Beschlag lösen und hinausrücken. Ist derselbe durch Schrauben an den Stab befestigt, so muß man Schraubenlöcher an andern Stellen machen, weil sonst die Schrauben theilweise in die alten Löcher des Stabes fallen, also nicht festhalten würden; oder man leimt in die alten Löcher des Stabes Holzstifte ein und bohrt neue Löcher da, wo die des Beschlags nach der Berichtigung es erfordern. Es darf jedoch bei dieser Berichtigung nicht außer Acht gelassen werden, daß die einzelnen Abtheilungen des Stabes unrichtig bleiben.

Die Ausdehnung hölzerner Meßstäbe durch die Wärme ist nur gering, nämlich für jeden Grad Réaumur nur 0,000005 der Länge des Stabes bei 0°, was also immer vernachlässigt werden kann. Eine viel häufigere Quelle

der Unrichtigkeit ist das Krümmen des Stabes, was durch einseitige Absorption von Feuchtigkeit veranlaßt wird, daher öftere Prüfung des Stabes nöthig macht, da alle Vorsichtsmaßregeln doch nicht ausreichen, das Holz ganz gegen das Eindringen der Feuchtigkeit zu sichern. Einen so krumm gebogenen Stab macht man wieder gerade, wenn man die convexe Seite längere Zeit dem Sonnenlichte aussetzt.

Hölzerne Stäbe krümmen sich aber auch, wenn man sie lange schief angelegt stehen läßt; man sollte dies bei ihrer Aufbewahrung, wenn sie nicht gebraucht werden, vermeiden. Die beste Art, lange Meßstäbe aufzubewahren, ist, sie horizontal hinzulegen und in Entfernungen von höchstens 2 Fuß von einander durch Holzklötzchen zu unterstützen. Ein durch unrichtige Aufbewahrung krumm gebogener Stab biegt sich wieder gerade, wenn man ihn ebenso lange mit der concaven Seite anlehnt.

Es ist nicht immer möglich, einen unrichtig befundenen Meßstab zu berichtigen; in solchem Falle muß man sich damit begnügen, den Fehler nach jeder vollendeten Messung in Rechnung zu bringen. Gesetzt, ein Meßstab von a Fuß Länge würde um n Linien zu kurz oder zu lang befunden, und man hätte damit eine Linie von b Fuß gemessen, so findet man die wahre Länge x dieser Linie aus der Proportion:

$$x : b = 144 \cdot a : 144 \cdot a \pm n$$

$$x = \frac{144 \cdot a}{144 \cdot a \pm n} \cdot b,$$

wo das + oder — Zeichen zu setzen ist, je nachdem der Stab bei der Prüfung zu lang oder zu kurz befunden wurde, und 144 die Zahl der Linien in einem Duodecimalfuß bedeutet; für Decimalmaß hätte man 100 dafür zu setzen.

Meßschnüre und Meßbänder werden ebenso durch genaues Anlegen eines richtigen Meßstabes geprüft. Die Berichtigung ihrer ganzen Länge ist leicht zu machen, falls sie zu lang befunden werden; sonst muß man sie gegen andere vertauschen.

§. 163. Soll ein Meßstab genau geprüft werden, so muß man noch andere als die angegebenen Wege befolgen. Man bedient sich dazu eigener Instrumente, Comparateure genannt. Folgende Construction eignet sich besonders, die ganze Länge eines Stabes mit der eines Normalmaßes zu vergleichen. S S′ (Fig. 186) ist eine Messing- oder Eisenschiene, so dick, daß sie sich nicht biegt, und jedenfalls länger als die Meßstäbe. Bei S′ ist ein prismatischer Stift mit der Schiene in unverrückbarer Verbindung. Gegen die

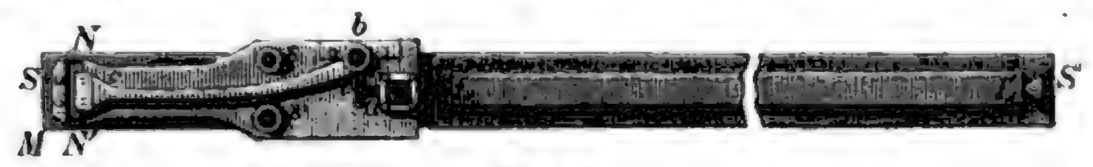


Fig. 186.

Kante dieses Stiftes lege man den einen der zu vergleichenden Stäbe mit seiner Endfläche L′ an; die andere Endfläche sei L. Ueber die Schiene SS′ schiebe man nun den Rahmen RM. Bei b trägt derselbe eine gegen die Ebene der Zeichnung senkrechte Achse, an welcher sich der Winkelhebel abc befindet und um b sich drehen läßt; der Arm bc ist vielmal, z. B. 10 Mal so lang als der Arm ba. Der Arm ba ist mit dem Stifte vv′ verbunden; vv′ hat in dem kleinen viereckigen Rahmen die Führung, und durch eine in der Zeichnung nicht sichtbare Feder wird der Arm ba so gegen den Stift vv′ gedrückt, daß dieser letztere stets mit seiner Spitze v′ gegen die Endfläche des Stabes LL′ anliegt. Der längere Hebelarm bc läuft über einen Gradbogen NN′; der Gradbogen ist aber nach Längeneinheiten, z. B. nach Millimeter, Linien u. s. w. getheilt, und der Arm bc trägt bei c einen über NN′ laufenden Nonius, auf dem 11 Theile des Bogens in 10 Theile getheilt sind, so daß man $^1/_{10}$ der Theile des Bogens ablesen kann. Man schiebt nun den Rahmen RM so weit rechts, daß die Spitze der Schraube v′ gegen den aufgelegten Meßstab LL′ stößt, und befestigt ihn in dieser Lage mittels der Schrauben ss′ auf der Schiene SS′; dann liest man die Stelle des Index am Nonius ab und notirt sie. Nun wird der Meßstab LL′ von der Schiene SS′ heruntergenommen und der zweite $L_1 L_1'$ aufgelegt, ohne daß man an dem Rahmen RM etwas ändert. Die schon genannte Feder wird den Arm ba, und damit den Stift vv′ wieder gegen die Endfläche S_1 des jetzt aufliegenden Stabes drücken. Liest man dann vom Nonius ab, bei welchem Theilstrich der Index jetzt stehen bleibt, so wird man sehen, ob die jetzige Ablesung mit der vorigen übereinstimmt oder nicht. Im ersten Falle sind die Stäbe gleich lang, im andern Falle aber nicht, und der wahre Unterschied wird durch den Winkelhebel nach dem Verhältniß der Länge der Arme vervielfacht. Gäbe z. B. der Nonius einen Unterschied von 2,7 Millimeter, und wäre $ba : bc = 1 : 10$, so betrüge der wahre Unterschied der Stäbe $0^{mm},27$.

Um die Abtheilungen eines Meßstabes zu prüfen, verfertige man zu dem zu prüfenden Stabe einen genauen Nonius, der etwa $^1/_{10}$ der kleinsten Abtheilungen des Meßstabes angibt; legt man diesen Nonius mit dem zu prüfenden Meßstabe zusammen, so daß der Nullpunkt des Nonius mit dem des Meßstabes zusammenfällt, so muß der erste Theilstrich des Nonius um 1, der zweite um 2, der dritte um 3 Zehntellinien (oder Millimeter u. s. w.) von den entsprechenden Theilen des Stabes abweichen, endlich muß der zehnte Theilstrich des Nonius mit dem elften des Stabes zusammenfallen. Legt man dann denselben Nonius an das Normalmaß, so muß, wenn die Eintheilung des ersten Stabes richtig war, sich dasselbe Resultat ergeben, d. h. jeder Theilstrich des Nonius muß um ebenso viel vor dem entsprechenden des Stabes voraus sein, wie bei dem zu prüfenden Meßstabe, und der zehnte des Nonius

muß mit dem elften des Meßstabes zusammenfallen. Ist dies nicht der Fall, so ist der zu prüfende Stab falsch getheilt und man wird die Größe des Fehlers leicht vom Nonius ablesen. Um andere Theile des Meßstabes zu untersuchen, schiebt man den Nonius weiter und verfährt ebenso. Es leuchtet ein, daß man hierzu jeden für dieselbe Längeneinheit construirten Nonius gebrauchen kann.

Hätte man es, was freilich für die Maße in der Geodäsie seltener der Fall ist, mit metallenen Stäben zu thun, so müßte man auch die Ausdehnung durch Temperaturveränderungen berücksichtigen. Wir wollen beispielsweise annehmen, man hätte einen Metermeßstab aus Messing mit einem Etalon aus Platin zu vergleichen, beide aber nicht bei ihrer Normaltemperatur, bei welcher sie die richtige Länge haben sollen. Der Ausdehnungscoëfficient des Messings sei μ, der des Platins π, der Meßstab aus Messing sei für die Temperatur t°, der von Platin für t'° verfertigt; die Temperatur, bei der sie verglichen werden, sei aber τ°; es fragt sich, wie viel der Messingstab bei dieser Temperatur kürzer oder länger sein müsse als der Platinstab.

Die Länge des Messingstabes bei 0°, t°, τ° sei beziehlich λ_0, λ_t, λ_τ, die des Platinstabes bei 0°, t'° und τ° λ'_0, λ'_t, λ'_τ, so ist:

$$\lambda_t = \lambda_0\,(1 + \mu t); \qquad \lambda_\tau = \lambda_0\,(1 + \mu\tau);$$
$$\lambda'_{t'} = \lambda'_0\,(1 + \pi t'); \qquad \lambda'_\tau = \lambda'_0\,(1 + \pi\tau).$$

Nun soll der Messingstab bei t° so lang sein wie der Platinstab bei t'°, also ist:

$$\lambda_0\,(1 + \mu t) = \lambda'_0\,(1 + \pi t')$$
$$\lambda_0 = \frac{1 + \pi t'}{1 + \mu t}\cdot\lambda'_0.$$
$$\lambda_\tau = \frac{1 + \pi t'}{1 + \mu t}\cdot\lambda'_0\cdot(1 + \mu\tau)$$
$$\lambda'_\tau = \lambda'_0\,(1 + \pi\tau).$$

$$\lambda'_\tau - \lambda_\tau = \lambda'_0\left[(1 + \pi\tau) - \frac{1 + \pi t'}{1 + \mu t}\cdot(1 + \mu\tau)\right].$$

Nun ist $\mu = 0{,}00001823$, $\pi = 0{,}00000856$, d. h. um den sovielten Theil, als diese Brüche ausdrücken, dehnt sich beziehlich eine Messing- und Platinstange aus, wenn man sie, von 0° ausgehend, um 1° Celsius erwärmt; ferner sei $t = 16^\circ{,}3$, $t' = 0^\circ$ und $\tau = 8^\circ$ Celsius, so gibt die Rechnung, daß der Messingstab bei der Temperatur von 8° Celsius beider Stäbe um $0{,}00021775$ des Platinstabes kürzer sein muß als dieser; stellt der Stab einen Meter vor, so beträgt diese Größe $0^{mm}{,}21775$, woraus man sieht, daß nur für den äußersten Grad der Genauigkeit die Berücksichtigung der Temperatur nöthig ist.

4. Die Meßkette.

§. 164. Die Meßkette, französisch chaine d'arpenteur, englisch nach ihrem Erfinder Gunter's chain (Fig. 187), ist eine Kette aus gutem, eine Linie dickem Eisen- oder Stahldraht verfertigt, deren Glieder nahe 1 Fuß lang und durch Ringe aus demselben Drahte mit einander verbunden sind; die Entfernung von dem Mittelpunkte eines solchen Ringes bis zu dem des nächsten beträgt genau 1 Fuß, und zwar gewöhnlich Decimalmaß. Die ganze Kette ist 5 Ruthen (50 Decimalfuß) lang und jede Ruthe durch ein an den Ring angehängtes Messingblech bezeichnet, das ebenso viele Spitzen hat, als die Zahl der Ruthen vom Anfange der Kette beträgt. In Frankreich sind die Ketten 1 oder auch 2 Dekameter lang, die einzelnen Glieder, pièces, halten $0^m,5$ oder auch $0^m,2$; in England beträgt die Länge der Kette 4 poles = 22 yards = 66 Fuß; sie hat 100 einzelne Glieder, links. Die Mitte der Kette ist noch durch ein messingenes Verbindungsstück A B (Fig. 188) besonders bezeichnet; es hat in der Mitte einen Querstab, um durch die Schärfe der Kante desselben den Theilungspunkt genau zu bestimmen; soviel als die Hälfte dieses Verbindungsstücks beträgt, ist jedes der angrenzenden Glieder kürzer als die übrigen. Auch die beiden äußersten Glieder der Kette sind etwas kürzer als die andern, da sie noch einen Ring R (Fig. 187) tragen, mit welchem dann jedes Glied die Länge der übrigen erreicht. Diese Ringe dienen dazu, die Kette beim Gebrauche auf zwei etwa 5 Fuß lange Kettenstäbe (Fig. 189) zu stecken und dadurch gehörig anzuspannen, damit die ganze Kette in eine gerade Linie gebracht werde. Diese Stäbe sind am untern Ende mit Eisen beschlagen und haben dort die Form der Ringe, während sie nach oben zu cylindrisch sind. Von dem eisernen Beschlage geht noch eine 8 Zoll lange eiserne Spitze aus, welche in die Erde gesteckt wird, während quer durch den Eisenbeschlag hindurch, oberhalb der Spitze, ein starker vierkantiger Eisenstab a b durchgeführt ist, auf welchem der auf den Kettenstab aufgesteckte Ring seinen Stützpunkt findet. Das Ende des Stabes bildet mit seinem Eisenbeschlage nach unten hin einen breiten und flachen Absatz, bis zu welchem die Spitze in die Erde kommt,

Fig. 187.

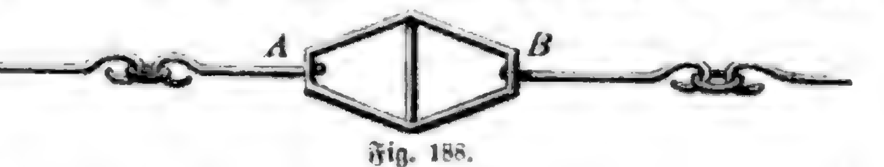


Fig. 188.

Fig. 189.

da der Stab daran einen Ruhepunkt hat und so beide Stäbe leicht in gleicher Höhe gehalten werden können. Damit durch die Kette genau die Entfernung zwischen den Spitzen der Kettenstäbe gemessen werde, haben diese Spitzen eine solche Lage, daß, bei verticaler Stellung des Kettenstabes, das äußerste Ende des Ringes genau vertical über die Spitze zu liegen komme.

§. 165. Wenn sich bei der Meßkette schon zu oft ursprüngliche Fehler einschleichen, die auf Rechnung des Verfertigers kommen, so geschieht dies noch mehr durch den alltäglichen Gebrauch, wobei die Kette oft übermäßig gestreckt wird, so daß sich die Ringe der Glieder in die Länge ziehen und die Kette sich verlängert; noch öfter werden einzelne Gliederstäbe bei dem Transporte, wo die Kette mit andern, oft schweren Gegenständen zusammengepackt wird, krumm gebogen und dadurch die Kette verkürzt. Eine dritte Fehlerquelle liegt in dem Umstande, daß die Ringe durch längern Gebrauch sich ausschleifen und dadurch die Kette sich verlängert.

Bei so wandelbarer Beschaffenheit der Meßkette ist es um so nöthiger, sie öfter einer genauen Prüfung zu unterwerfen; ja, da die Fehlerquellen derart sind, daß jeden Tag neue Fehler entstehen können, so sollte man jeder beginnenden Messung eine Prüfung der Kette vorangehen lassen.

Die Prüfung der Meßkette geschieht dadurch, daß man die Kette auf vollkommen ebenem Boden ausstreckt, dabei gerade so stark anzieht, als es bei jeder Messung zu geschehen pflegt und mittels der Kettenstäbe oder besonderer Pflöcke in dieser Spannung erhält; man messe dann die ganze Länge der so gespannten Kette mit einem berichtigten Meßstabe und bezeichne gleich die einzelnen Ruthen, wo sie nach dem Meßstabe anfangen und enden sollten, um sie nachgehends mit denen der Kette zu vergleichen. Oder man messe einige, 3—4 Kettenlängen erst mit berichtigten Stäben genau ab und messe dann dieselbe Strecke mit der Kette nach; dadurch erhält man den Fehler der Kette drei- bis viermal vervielfacht. Findet man die Kette unrichtig, so sehe man zuerst nach, ob einzelne Glieder und Ringe verbogen sind, und helfe, wo dies der Fall ist, durch Biegen mit der Hand nach. Was man durch dieses Mittel nicht zurecht bekommt, berichtige man mit einem hölzernen Schlägel auf hölzerner Unterlage, aber niemals mit eisernem Hammer auf eiserner oder Steinunterlage, weil sich die Stäbe dabei unfehlbar verdünnen und dabei verlängern würden; verbogene Ringe werden mit einer starken Drahtzange wieder rund gebogen. Was sich so ohne weiteres nicht in Ordnung bringen läßt, muß der Schlosser im Feuer behandeln. Dann prüfe man die Kette nochmals; wird sie noch unrichtig befunden, so bleibt nichts anderes übrig, als den Fehler nach §. 162 in Rechnung zu bringen. Für künftige Arbeiten muß dann die Kette vom Schlosser gründlich verbessert werden, indem er etwa ausgeschliffene oder sonst nicht mehr herstellbare Glieder durch neue ersetzt.

Es sind allerdings auch solche Einrichtungen der Meßkette angegeben worden, bei denen die Berichtigung eines vorgefundenen Fehlers sehr leicht bewirkt werden kann, indem bei diesen die Verbindungsglieder, welche die Ruthen bezeichnen, durch Schrauben mit einander verbunden sind. Aber diese Einrichtung hat das Nachtheilige, daß sich während des Gebrauchs der Kette die Muttern dieser Schrauben sehr leicht aufdrehen, selbst auch dann, wenn sie durch eine zweite Mutter, die Versicherungsmutter, geschützt werden. Macht man wirklich an eine Messung die Anforderung einer so bedeutenden Genauigkeit, daß Ketten wie die oben beschriebene nicht genügen, so muß die Messung mit Meßstäben vorgenommen werden. Eine Kettenmessung ist dann überhaupt nicht zulässig.

Viertes Kapitel.

Instrumente zum Abstecken, Aufnehmen und Messen der Winkel.

§. 166. Nächst der geradlinigen Entfernung zweier Punkte von einander bilden die Winkel zweier Geraden, wie in der theoretischen Geometrie, so auch in der praktischen, das wichtigste Element zur Bestimmung der Figuren. Es treten hierin folgende Fälle ein:

a. Es soll ein gegebener Winkel im Felde abgesteckt werden, und zwar ist der Winkel gegeben
   α. durch Zeichnung auf dem Papier;
   β. durch die Gradzahl.
b. Es soll ein im Felde durch deutliche Objecte bezeichneter Winkel bestimmt werden, und zwar entweder:
   α. direct durch Zeichnung auf dem Papier (graphisch), oder
   β. durch die Gradzahl.

Die zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben bestimmten Instrumente werden hiernach eine verschiedene Einrichtung bekommen; dazu kommt indeß noch der Umstand, daß gewisse Winkel, wie z. B. Rechte, halbe Rechte u. s. w. öfter vorkommen als andere, auch gewöhnlich leichter bestimmt werden können, weshalb man denn für solche *bestimmte* Winkel noch besondere Instrumente ausgedacht hat.

Die Winkel selbst unterscheidet man nach ihrer Lage im Raume, bezogen auf den Horizont des Beobachtungsortes. Man unterscheidet hierin folgende Fälle:

a. Beide Schenkel des Winkels liegen in derselben Horizontalebene; ein solcher Winkel heißt ein *Horizontalwinkel*.

b. Beide Schenkel des Winkels liegen in derselben Verticalebene; der Winkel heißt dann ein **Verticalwinkel**; als besondere Fälle sind hier noch hervorzuheben:

   α. der eine Schenkel des Verticalwinkels ist horizontal und der andere Schenkel liegt **über** diesem; der Winkel heißt dann ein **Höhen-** oder **Elevationswinkel**;

   β. der eine Schenkel des Verticalwinkels ist ebenfalls wieder horizontal, aber der andere liegt **unter** ihm; dann heißt der Winkel ein **Tiefen-** oder **Depressionswinkel**;

   γ. der eine Schenkel des Verticalwinkels ist vertical; wie auch der andere Schenkel gelegen sei, heißt der Winkel dann allemal eine **Zenithdistanz**.

c. Beide Schenkel liegen in einer Ebene, die weder horizontal noch vertical ist; der Winkel heißt dann ein **schiefer** oder **schiefliegender Winkel**. Von schiefliegenden Winkeln wird in der Regel nicht ihre wahre Größe, sondern die ihrer Horizontalprojection verlangt. Von einem in einer schiefen Ebene liegenden Winkel die Horizontalprojection ihrer Größe nach graphisch oder im Gradmaß finden heißt: den schiefen Winkel **auf den Horizont reduciren** (§. 8).

A. Instrumente zum Abstecken bestimmter Winkel.

I. Das Winkelkreuz.

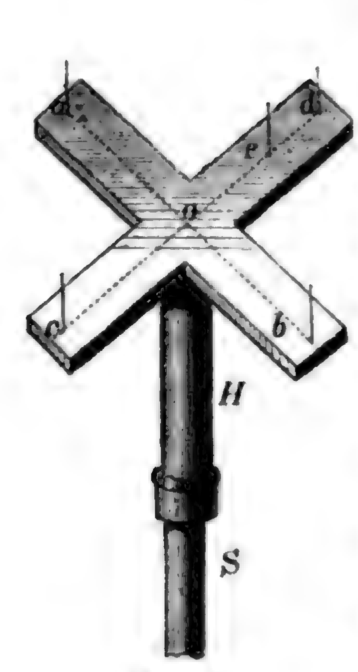
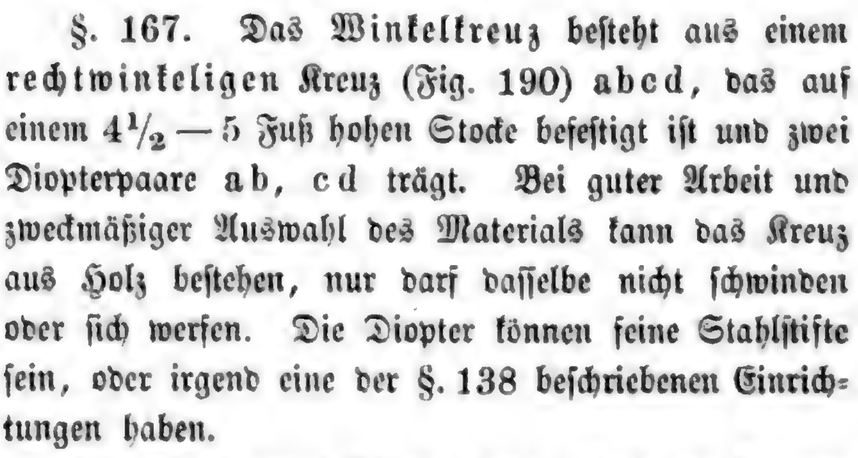


Fig. 190.


§. 167. Das Winkelkreuz besteht aus einem **rechtwinkeligen Kreuz** (Fig. 190) **abcd**, das auf einem $4^1/_2$ — 5 Fuß hohen Stocke befestigt ist und zwei Diopterpaare **ab**, **cd** trägt. Bei guter Arbeit und zweckmäßiger Auswahl des Materials kann das Kreuz aus Holz bestehen, nur darf dasselbe nicht schwinden oder sich werfen. Die Diopter können feine Stahlstifte sein, oder irgend eine der §. 138 beschriebenen Einrichtungen haben.

Es leuchtet von selbst ein, daß, sobald der Ständer HS mittels eines Senkloths oder nach dem Augenmaße genau vertical gestellt ist, und man dreht das Kreuz so, daß die Diopter ab in eine im Felde abgesteckte gerade Linie fallen, cd das durch o gehende Loth zu dieser Linie bezeichnen wird.

§. 168. Die **Prüfung** des Instruments hat einfach darauf auszugehen, den rechtwinkeligen Stand beider Visirebenen zu untersuchen. Hat man in o (Fig. 191) mittels des Kreuzes den Winkel xoy abgesteckt, so drehe man das Instrument so, daß ob (oder eigentlich ab) in die Richtung ox fällt, und sehe zu, ob dann oc (d. h. dc) auf y trifft. Ist dies der Fall, so sind die Nebenwinkel bod und boc des Kreuzes gleich, also Rechte; im entgegengesetzten Falle müßte man einen Stift oder ein Diopter so lange verrücken, bis das Kreuz die angegebene Probe aushielte.

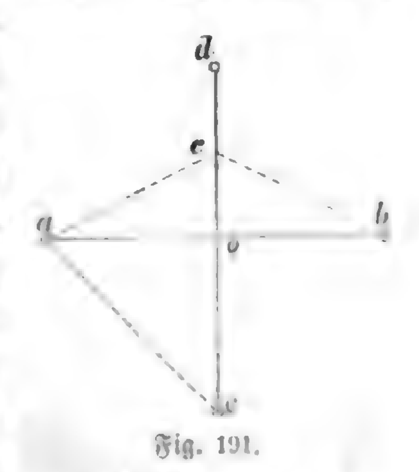


Fig. 191.

Sind die Abstände der Diopter vom Mittelpunkte o alle einander gleich, so bilden abcd ein Quadrat; visirt man also einmal nach der Diagonale ab und das andere Mal nach der Seite ac, so ist W. bac = 45°; und setzt man in od einen Stift oder ein Diopter e so ein, daß oe = $\frac{1}{2}$od, so wird W. oae = 30°, oea = 60°. Man kann also mit dem Winkelkreuz Winkel von 30°, 45°, 60°, 75° (eac) und 90° abstecken.

II. Die Winkeltrommel.

§. 169. Die **Winkeltrommel** ist nichts weiter als das Winkelkreuz in anderer Form. Ein messingener Hohlcylinder ABCD (Fig. 192), etwa 4 Zoll im Durchmesser und ebenso hoch, ist mit mehreren einander diametral gegenüberstehenden Diopterspalten a, b, c, d, f versehen; diese bestehen aus einer engen Ocularspalte und, darunter oder darüber, einer etwas weitern Spalte mit lothrechtem Haar, als Objectivdiopter dienend; die einander diametral gegenüberstehenden Spalten haben das Ocular und Objectiv immer in umgekehrter Lage, bei der einen ist die enge Spalte oben, bei der andern unten. **Ein** Diopter, c, ist indeß nur eine von oben bis unten gehende enge Spalte und wird allemal als Ocular gebraucht. Dieser Cylinder, die **Trommel** genannt, trägt an seiner untern Fläche eine Hülse E, mit welcher sie auf einen Stock gesteckt werden kann, dessen anderes Ende mit einer eisernen Spitze versehen ist, womit er in die Erde eingesteckt wird. Die Trommel hat in der Regel vier Diopterpaare, so daß man also damit Winkel von 90° und von

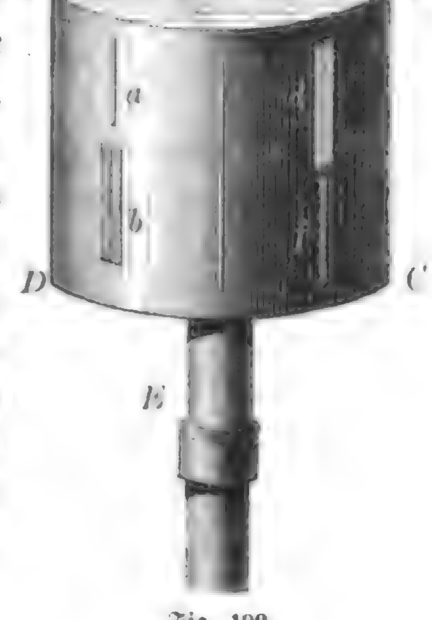


Fig. 192.

45° abstecken kann. Prüfung und Gebrauch der Winkeltrommel sind gerade so wie beim Winkelkreuze. Eine Berichtigung des Instruments, im Falle es sich unrichtig erwiese, dürfte kaum ausführbar sein; höchstens dürfte der Mechanikus einzelne Diopter zulöthen und neue daneben machen können.

III. Der Winkelspiegel.

§. 170. Der Winkelspiegel (Fig. 193) besteht aus zwei kleinen ebenen Glasspiegeln a, b, die unter einem Winkel von 45° in einer messingenen Fassung m r′ r n q s′ s p zusammengestellt sind, so daß also m r′ und n r, ebenso q s′ und p s unter 45° gegen einander geneigt sind. Die Spiegel sind an den innern Seiten der Wände m r′ s′ q und n r s p angebracht, so daß in der Figur von a ein Theil der spiegelnden Fläche zu sehen ist, von b aber nur die Rückseite. Die Fassung ist unterhalb der Spiegel über diese hinaus fortgesetzt und beiderseits mit einer rechtwinkeligen Oeffnung c, d versehen. Die Bodenplatte der Fassung trägt den Griff e, bei welchem man das Instrument während seines Gebrauchs in der Hand hält.

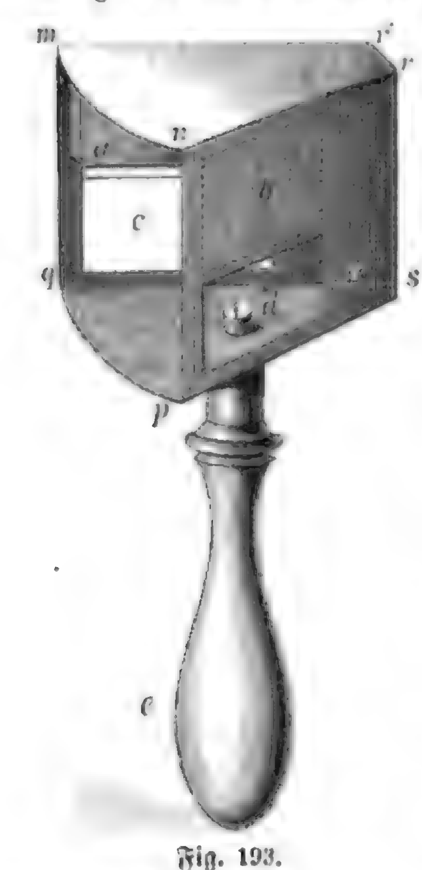


Fig. 193.

Die Anwendung des Winkelspiegels beruht auf dem katoptrischen Gesetze (§. 63). Da der Winkel der Spiegel 45° beträgt, so werden der einfallende und der zweimal zurückgeworfene Strahl mit einander einen rechten Winkel bilden.

§. 171. Soll mit dem Winkelspiegel in irgend einem bezeichneten Punkte Z einer deutlich bezeichneten Linie MN (Fig. 194) ein Loth zu dieser Linie errichtet werden, so stelle man sich mit dem Spiegel in der Hand in den Punkt Z, richte die Oeffnung m n p q (Fig. 193) nach einem am Ende der Linie MN befindlichen Signale M, sehe durch die Oeffnung m n p q, am Rande n p vorbei und nicht etwa durch eine der Oeffnungen c, d, so sieht man darin jenes Signal M im Spiegelbilde durch einen zweimal reflectirten Strahl, nämlich in Fig. 59 das Signal L durch den Strahl LABV, der in A und in B reflectirt worden. Man legt zu diesem Zwecke die Kante n p (Fig. 193) an die rechte Nasen-

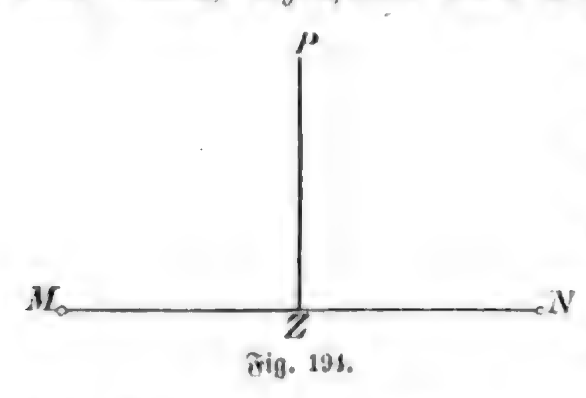


Fig. 194.

seite, so gewendet, daß von M ein Strahl auf den Spiegel b fallen kann; dieser wird nach dem Spiegel a reflectirt, von da nach dem bei n p vorbeisehenden linken Auge des Beobachters. Durch die Oeffnung c unter dem Spiegel a kann man gleichzeitig auch direct, d. h. ohne Mitwirkung der Spiegel, einen seitwärts von der Linie MN befindlichen Gegenstand P (Fig. 194), etwa einen von einem Gehülfen eingesetzten Absteckstab, erblicken; wenn beide Stäbe sich decken, so bildet die Gerade ZP ein Loth zu MN, weil der von M kommende Strahl durch die zweimalige Reflexion um das Doppelte des Winkels der Spiegel, d. h. um $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ abgelenkt wird; fällt also das Bild von M mit dem Gegenstande P zusammen, so machen, in der Wirklichkeit, die von M und P nach dem Auge führenden Richtungen einen rechten Winkel. Wäre, statt M, N das eine Object, oder läge P auf der andern Seite von MN, so hätte man in dieser Erklärung überall blos „links“ mit „rechts“, und die Kante np mit mq, den Spiegel a mit b, und b mit a zu vertauschen.

Wäre P gegeben und Z in der Geraden MN gesucht, so würde man, mit dem Winkelspiegel in der Hand, längs MN hingehen, immer das Bild von M im Auge behaltend, so weit, bis man das Object P mit dem Spiegelbilde von M zusammenfallen sähe.

§. 172. Zur **Prüfung** des Winkelspiegels untersucht man, wie beim Winkelkreuz, ob, wenn man MZP (Fig. 194) absteckt, und dann auch NZP, die letzten Schenkel dieser beiden Winkel in ZP zusammenfallen. Fielen die beiden Winkel theilweise über einander, so wäre der Neigungswinkel der Spiegel zu groß, und kämen sie gar nicht zusammen, machten sie also zusammen weniger als 180°, so wäre der Neigungswinkel der Spiegel zu klein. In beiden Fällen bedarf das Instrument einer Berichtigung.* Um diese möglich zu machen, sind die Spiegel auf ein Messingplättchen fghkvw (Fig. 195) gefaßt, das bei gv umgebogen ist und federt, so daß es sich durch einen geringen Druck noch zu einem kleinern Winkel biegen läßt, aber wenn dieser Druck nachläßt, sich von selbst wieder öffnet. Der Neigungswinkel der beiden Flächen ist daher größer als 45° und muß durch die Befestigung in der Fassung mittels besonderer Justirschrauben auf diese Größe heruntergebracht werden.

Fig. 195.

Bei fk, hw schließt das Plättchen dicht an die Fassung an, nach der Rückseite zu, bei gv aber hat es freien Spielraum, da fg der Fig. 195 kürzer ist als nr' der Figur 193. Der kleine Spiegelrahmen fghkvw wird nun in der Fassung mr'rupss'q durch ein Schräubchen μ festgehalten, das durch die Rückwand rss'r' der Fassung durchgeht und wozu die Krümmung

Digitized by Google

des Rahmens die Mutter bildet, indem an der innern Seite des Rahmens ein Stückchen Metall angelöthet ist, in das die Schraube hineingeht, weil der Rahmen an sich nicht genug Metallstärke hat, um als Mutter dienen zu können; die Figur zeigt diese Mutter. Mit diesem Schräubchen μ zieht man den Rahmen fghkvw nach der Rückwand gv (d. h. rss'r' der Fig. 193) hin und verkleinert also durch Einschrauben von μ den Winkel der Spiegel, während man durch Oeffnen des Schräubchens μ dem Rahmen mehr Willen läßt, sich etwas zu erweitern. Unterhalb μ befindet sich ein zweites Schräubchen ζ, wozu die Rückwand der Fassung rss'r' (gv der Fig. 195) die Mutter bildet, und welches blos mit seinem Ende auf dem Rahmen stumpf aufsitzt; es dient dies dazu, dem Rahmen einen festen Gegenhalt zu geben und jedes Verschieben der Spiegel durch mechanischen Druck zu verhindern. Sollen die Spiegel mehr nach der Rückwand hin gezogen werden, so muß man ζ erst lösen, μ einschrauben und dann ζ wieder fest gegen den Rahmen anschrauben; sollen aber die Spiegel sich mehr öffnen, also nach vorn geschoben werden, so löst man μ und schraubt ζ nach. Ersteres verkleinert den Winkel der Spiegel, letzteres vergrößert ihn. Nach solcher Veränderung des Neigungswinkels der Spiegel muß man natürlich den Probeversuch, ob die Spiegel nun gleiche Nebenwinkel geben, abermals anstellen und je nach Ausfall dieses Versuchs mit der Justirung weiter verfahren.

Der Winkelspiegel hat vor dem Winkelkreuz und der Winkeltrommel den Vorzug, daß man keines Stativs bedarf, ihn also auch da anwenden kann, wo ein Stativ sich gar nicht aufstellen ließe; ferner ist die Beobachtung viel einfacher als das doppelte Visiren bei den genannten Instrumenten, und das Instrument leichter zu transportiren als diese andern.

IV. Das Prismenkreuz.

§. 173. Das Prismenkreuz von C. M. Bauernfeind in München besteht aus zwei gleichschenkelig rechtwinkeligen Glasprismen, welche so über einander gelegt sind, daß zwei ihrer Kathetenflächen in eine Ebene zu liegen kommen und ihre Hypotenusenebenen sich rechtwinkelig kreuzen, ihre Achsen, also auch die Prismenkanten, aber mit einander parallel sind.

Um nachher das Instrument desto leichter verstehen zu können, rufen wir uns zunächst ins Gedächtniß zurück, was §. 74 über die Wirkung eines einzelnen gleichschenkelig rechtwinkeligen Prismas auf den Gang eines Lichtstrahls erörtert ist. Legen wir dann die Fig. 196 zu Grunde, wo zwei solche Prismen sich mit den Kathetenflächen kreuzen, und sei der Winkel $BGC' = \delta$, MN eine gerade Linie, bezeichnet durch die Objecte M und N, weit genug

von den Prismen ABC und A′B′C′ entfernt, damit alle von M und N auf die Prismen fallenden Strahlen als unter einander parallel angesehen werden können; ferner seien PD, QE Lothe auf die Kathetenflächen AB, A′B′, so können $\varepsilon = PDM$ und $\varepsilon' = QEN$ als Einfallswinkel der von M und N auffallenden Strahlen angesehen werden. MDP ist ein negativer, NEQ ein positiver Einfallswinkel; heißen also ψ und ψ' beziehlich die Winkel, welche die nach zweimaliger Brechung und einmaliger Reflexion austretenden Strahlen mit den auffallenden machen, so ist:

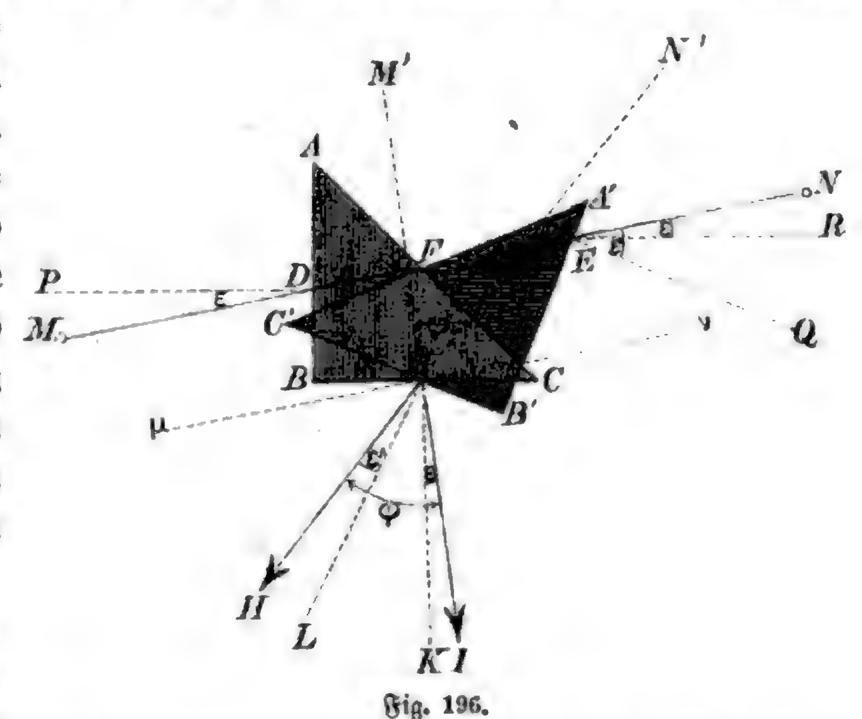


Fig. 196.

$$\psi = 90° - 2\varepsilon$$

und $\psi' = 90° + 2\varepsilon'$,

d. h. wenn $\mu\nu \mp MN$, und GI der von M kommende, GH der von N kommende und nach zweimaliger Brechung und einmaliger Reflexion austretende Strahl ist, so wird:

$$W.\ \mu GI = \psi = 90° - 2\varepsilon$$

und

$$W.\ \nu GH = \psi' = 90° + 2\varepsilon$$

sein. Also ist W. $IGH = 2(\varepsilon' - \varepsilon)$. Aber denkt man sich das Prisma A′B′C′ so um den Punkt G gedreht, daß B′C′ mit BC zusammenfällt, so verschwindet der Winkel δ, und A′B′ wird $\mp$ AB, also auch QE $\mp$ PD, d. h. QE fällt mit RE zusammen, vorausgesetzt, daß RE $\mp$ PD gezogen sei, und es wird $\varepsilon' = \varepsilon$, also auch W. $REQ = \varepsilon' - \varepsilon = \delta$, folglich $IGH = 2\delta$.

Die von zwei leuchtenden Punkten M, N auf die Prismen fallenden Strahlen machen also nach ihrem Austritte, falls die Prismen in der geraden Verbindungslinie MN der beiden Punkte (Objecte) sich befinden, einen Winkel mit einander, der doppelt so groß als der Winkel δ ist, unter welchem sich die Kathetenflächen kreuzen. Der Winkel IGH muß also Null werden, wenn $\delta = 0$ ist; d. h. liegen die beiden Prismen so auf einander, daß zwei ihrer Kathetenflächen in eine Ebene fallen, und die Hypotenusen sich rechtwinkelig kreuzen, so fallen die austretenden Strahlen in einander. Während man also bei gekreuzten Kathetenflächen M in M′, N in N′ erblicken würde, sieht man nun, falls das Prisma ABC seine Lage beibehält, A′B′C′ aber um den Winkel δ herumgedreht wird, so daß B′C′ in BC fällt, M und N in der

Richtung IGM'. Die Bilder beider Objecte decken also einander, sobald die Prismen sich in der Geraden MN befinden.

Daß das Decken der Bilder nicht stattfinden kann, solange die Prismen außerhalb der Geraden MN sich befinden, leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß, nach §. 74, dann ψ und ψ' positive Winkel sind, also $\psi = 90^\circ + 2\varepsilon$ und $\psi' = 90^\circ + 2\varepsilon'$ sein wird, während ε und ε' nicht mehr einander gleich sein werden; also ist dann:

$$\psi + \psi' = 180^\circ + 2(\varepsilon + \varepsilon').$$

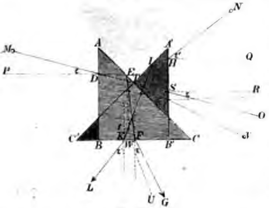


Fig. 197.

Sind MT, NT (Fig. 197) die beiden auffallenden Strahlen, und man verlängert MT bis O und legt in S und H die Einfallslothe SR, HQ an, so bilden sich offenbar wieder die Winkel ε' und ε ab, und es ist $NTO = \varepsilon + \varepsilon'$, also der erhabene Winkel $MTN = 180^\circ + (\varepsilon + \varepsilon')$. Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so erhält man:

$$\varphi = (\psi + \psi') - MTN = \varepsilon + \varepsilon',$$

als denjenigen Winkel, welchen die austretenden Strahlen FG und KL mit einander machen; woraus hervorgeht, daß diese Strahlen nie zusammenfallen können. So oft also die Bilder der beiden Objecte sich decken, befindet sich das Prismenkreuz in der zwischen ihnen möglichen Geraden.

Läge N so, daß ein negativer Einfallswinkel ε'' entstände, wie dies mit dem Objecte V der Fall ist, so wäre der hohle Winkel

$$MTV = 180^\circ - (\varepsilon'' - \varepsilon),$$

und $\psi = 90^\circ + 2\varepsilon,$

aber $\psi' = 90^\circ - 2\varepsilon''$

also $\psi + \psi' = 180^\circ + 2(\varepsilon - \varepsilon''),$

folglich $\varphi' = \varepsilon - \varepsilon'',$

welches, da $\varepsilon \gtrless \varepsilon''$ ist, nicht Null wird.

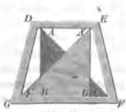


Fig. 198.

§. 174. Die Prismen werden in einem trapezförmigen Gehäuse DEFG (Fig. 198) befestigt. Die Ebene BC, welche beide Prismen als Ka-

thetenfläche gemein haben, ist die Ebene des Strahlenaustritts; sie heißt daher die **Ocularebene**, während die andern beiden Kathetenflächen das Licht von den Objecten empfangen und deshalb **Objectivebenen** heißen. Das Gehäuse hat die Gestalt und Einrichtung von Fig. 199; die Seitenebenen sind ausgeschnitten, die eine oben, die andere unten, nach der Lage der Prismen, damit das Licht auf sie einfallen könne. Pc, P′c′ sind die in einer Ebene liegenden Kathetenflächen der Prismen. Die Schräubchen a, a′, b, b′ dienen dazu, die Prismen parallel zu stellen. Das obere Prisma ist in einen Messingrahmen gefaßt und darin eingekittet; der Rahmen läßt sich sammt dem Prisma etwas in der Horizontalebene herumdrehen. Die Schräubchen b, b′ gehen in Schlitzen durch die Gehäuseplatten AB hindurch und greifen in den Messingrahmen ein, während a, a′ sich durch AB schrauben und auf dem Rahmen stumpf aufsitzen. Wenn durch a, a′ die Achsen der Prismen parallel gestellt werden, macht man mittels b, b′ die Kathetenebenen parallel.

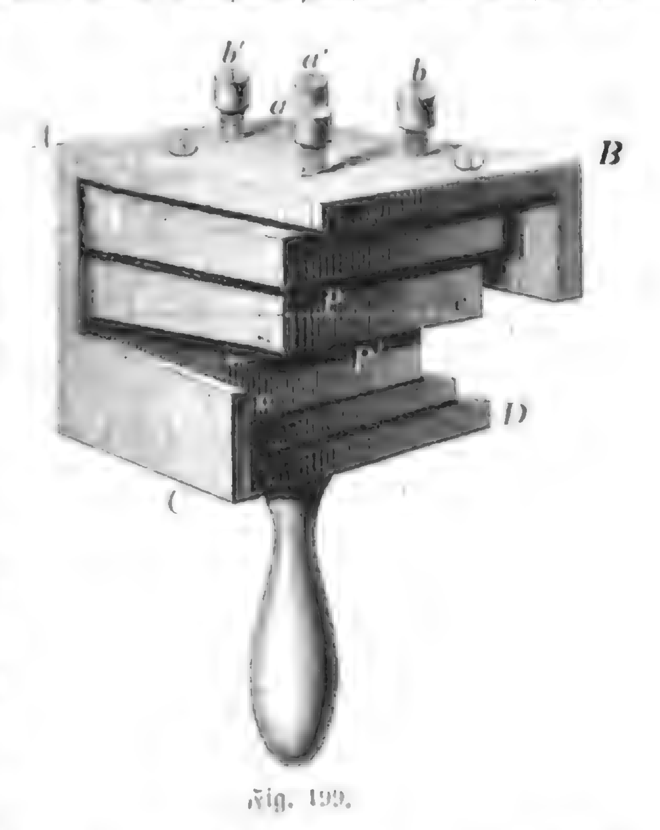


Fig. 199.

§. 175. Das Prismenkreuz muß auf die **Form** der Prismen und auf die **Parallelstellung** der Achsen und der **Kathetenebenen** geprüft werden.

1. Ob die Prismen die richtige Form haben, prüft man dadurch, daß man zwei Winkel mit gemeinschaftlichem Schenkel damit absteckt und untersucht, ob sie sich zu 180° ergänzen. Sollte dies letztere nicht der Fall sein, so müßte der Optiker die Prismen nachschleifen.

2. Wenn die Achsen der Prismen nicht unter einander parallel sind, so bilden zwei parallele Objecte, z. B. zwei lotbrechte Mauerkanten u. dgl. einen Winkel δ mit einander, und $\pm (180^\circ - \delta)$ ist der Fehler in der Achsenlage der Prismen. Um diesen Fehler zu corrigiren, löst man eins der Schräubchen b, b′ etwas, dann auch a, a′, zieht nun von b, b′ dasjenige an, welches nicht gelöst worden, befestigt dann alle übrigen Schrauben und prüft von neuem. Findet sich noch ein Fehler, so muß das Verfahren wiederholt werden.

3. Um die Parallelstellung der Kathetenebenen zu prüfen, stellt man drei Stäbe in gerader Linie und ziemlich großen Entfernungen auf, hält das Prismenkreuz über den mittlern Stab und sieht zu, ob die Bilder der andern Stäbe sich decken und hinter einander bleiben, auch wenn man das Instrument

um seine Achse dreht. Ist dies nicht der Fall, so haben die Prismen eine unrichtige Lage, und der Winkel, um welchen die Bilder von einander divergiren, ist das Doppelte des Fehlers (§. 173). Der Fehler wird mittels der Schräubchen b, b′ verbessert. Liegen die Bilder M′, N′ (Fig. 196) auf der Seite der entsprechenden Objecte, so ist der Winkel AFA′ der Hypotenusenebenen größer als 90°, und liegen die Bilder entgegengesetzt, so ist AFA′ < 90°, woraus in jedem Falle leicht zu sehen, in welchem Sinne das obere Prisma gedreht werden müsse, um AFA′ = 90° zu machen.

§. 176. Mittels des Prismenkreuzes kann man zwischen zwei gegebenen Punkten A, B, welche eine solche Lage haben, daß man vom einen nicht nach dem andern visiren kann, einen dritten Punkt C so einschalten, daß A, C, B in gerader Linie liegen. Man stelle sich nämlich so nahe, als sich nach dem Augenmaße bestimmen läßt, an dem gesuchten Punkte C auf, halte das Instrument, mit den Ocularebenen gegen das Auge, mit den Objectivebenen gegen die Objecte A und B gewendet, und bewege sich so weit vor- oder rückwärts, soviel wie möglich in einem Lothe zur Geraden AB, bis man in einen Punkt C kommt, wo sich die Bilder von A und B decken, so ist C der gesuchte Punkt.

Um in einem gegebenen Punkte C einer abgesteckten Geraden AB ein Loth CP auf AB zu errichten, verfährt man mit dem Prismenkreuz ebenso wie mit dem Winkelspiegel; dasselbe gilt von der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte C außerhalb einer Geraden AB ein Loth auf diese zu fällen, nur daß beim Prismenkreuz jedesmal beide Bilder durch die Prismen gesehen werden, während beim Winkelspiegel das eine Object selbst mit dem Bilde des andern zusammenfällt.

B. Instrumente zur graphischen Verzeichnung der Winkel.

§. 177. Die im Folgenden zu beschreibenden Instrumente dienen einmal dazu, im Felde abgesteckte oder sonst bezeichnete Winkel auf dem Papier zu verzeichnen, ohne ihr Gradmaß zu erfahren; dann aber können sie ebenso gut auch dazu gebraucht werden, beliebige auf dem Papier verzeichnete Winkel, deren Gradmaß also ebenfalls nicht bekannt ist, im Felde abzustecken.

I. Der Meßtisch.

§. 178. Der Meßtisch, la table d'arpenteur, surveyor's table, wurde 1590 vom Professor Prätorius zu Altorf bei Nürnberg erfunden. Er hat im Laufe der Zeit viele Veränderungen in seinem Bau erfahren und wird gegenwärtig von den bessern Mechanikern in großer Vollkommenheit gefertigt.

Die im Folgenden beschriebenen Constructionen haben den Vortheil ausreichender Festigkeit, ohne den Apparat durch überflüssige Künsteleien zu vertheuern.

Der Meßtisch besteht aus einem Reißbrett (Fig. 200), welches auf einem dreifüßigen Stativ ruht; das Verbindungsstück zwischen dem Stativ und dem Reißbrett heißt der Kopf des Meßtisches.

1. Das Reißbrett.

§. 179. Das Reißbrett wird aus trockenem Lindenholze so angefertigt, daß zunächst ein quadratförmiger Rahmen abcd (Fig. 200) von 3 Zoll breiten, 1 Zoll dicken Leisten zusammengefügt wird; durch die Mitte gehen, den Seiten parallel, noch zwei solche Leisten, ef, gh, die sich in der Mitte kreuzen, daher jede derselben an der Kreuzungsstelle auf die Hälfte der Dicke reducirt ist. Die vier dadurch entstehenden Quadrate werden nun durch Blätter aus demselben Holze in der Weise ausgefüllt, daß man sie rings herum in die Leisten einfugt (in Nuth und Feder, wie die Tischler es nennen), damit das Ganze sich nachher nicht werfen oder verziehen kann. Auf der untern Fläche dieses Tischblattes ist in der Mitte eine Messingplatte von $^3/_8$ Zoll Dicke und 5 Zoll Durchmesser aufgeschraubt. Senkrecht zur Ebene dieser Platte und in ihrer Mitte befindet sich ein mit ihr zusammengegossener Cylinder, der in der Richtung seiner Achse konisch durchbohrt ist (Fig. 201), in welchen ein ebenso gestalteter Zapfen des Kopfes genau paßt. Damit das Tischblatt recht sicher auf der Platte des Kopfes aufliege, hat der Hohlkegel einen sorgfältig abgeschliffenen, $^1/_2$ Zoll breit über die Oeffnung des Kegels vorstehenden Rand. Die feste Verbindung dieses Körpers mit dem konischen Zapfen und dadurch mit dem Kopfe des Meßtisches geschieht durch drei seitlich in den Hohlkegel geführte Schrauben, welche sich gegen den konischen Zapfen drücken lassen, wo sie dann jede Bewegung des Blattes um die verticale Achse des Meßtisches hemmen.

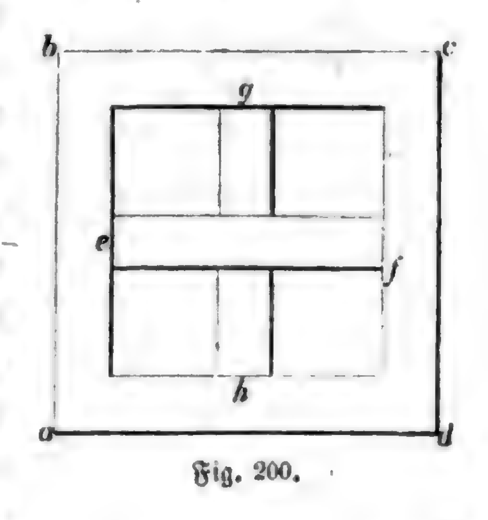


Fig. 200.

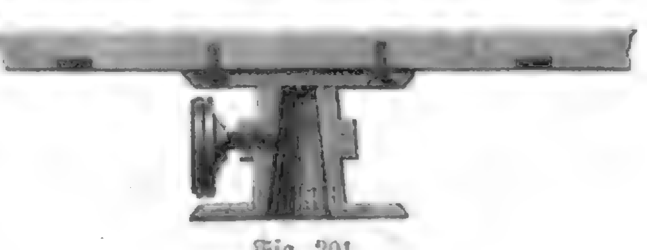


Fig. 201.

2. Das Stativ.

§. 180. Das Stativ des Meßtisches besteht aus einem Cylinder a (Fig. 202) von hartem Holze, dessen unteres Ende ein dreiseitiges Prisma b bildet; der Cylinder ist etwa 4, und das Prisma auch 4 Zoll lang; der Durchmesser des Cylinders beträgt $3^1/_2$ Zoll. An jeder Seite des Prismas

Fig. 202.

b ist ein Fuß c mittels einer Flügelschraube s angebracht, und die drei Füße lassen sich beliebig weit aus einander setzen, behufs des Transportes auch ganz zusammenlegen und mittels eines darübergeschobenen Messingringes fest zusammenhalten. Das untere Ende der Füße ist zugespitzt und mit Eisen beschlagen.

Einen festern Stand gewährt das sogenannte Reichenbach'sche Stativ. P (Fig. 203) stellt eine runde Holzscheibe vor, die aus drei mit gekreuzten Fasern über einander geleimten und durch Schrauben wohl verbundenen eichenen Platten besteht. Der Rand der Platte bildet nach unten zu eine Hohlkehle, die als Pfanne für die kreisförmig abgerundeten Gewinde der Füße dient. Durch die Platte P wird die Schraubenspindel s s geführt, die unten eine Scheibe a mit kreisförmiger Durchbohrung trägt; oben wird sie durch die Mutter m festgehalten, so daß sie also in der Hohlkehle der Platte P festsitzen muß. Die Scheibe a läßt sich in einen Einschnitt des Gewindes am obern Ende der Füße schieben; steckt man dann eine metallene Achse c c durch beide hindurch, so bleiben sie mit einander verbunden, aber die Beine bleiben nichtsdestoweniger um die Achse c c drehbar und können weiter oder enger gestellt werden. Herr Breithaupt in Kassel hat die Muttern m in die Platte P eingelassen; für die Bewegung der Beine ist der Spielraum durch Ausschnitte u u vorgeschrieben (Fig. 204). In Fig. 206 sieht man eine perspectivische Ansicht dieser Vorrichtung.

Fig. 203.

Fig. 204.

3. Der Kopf.

§. 181. Der Zweck des Meßtischkopfes ist, dem Blatte eine Bewegung in horizontaler und verticaler Richtung möglich zu machen und dieselbe erforderlichenfalls zu hemmen. Zunächst auf den Cylinder a des Stativs (Fig. 202) schraubt man eine starke Messingplatte, welche drei etwa 4 Zoll über den Cylinder vorragende Arme A, B, C (Fig. 205) hat, die, wie die ganze Platte, mit der sie einen Körper ausmachen, bei richtiger Stellung des Tisches eine horizontale Lage haben und mit einander Winkel von 120° bilden. Gegen die Enden hin sind die Arme durchbohrt; durch die Durchbohrungen führt man

Digitized by Google

drei starke, 8 Zoll lange Schrauben a a′, b b′, c c′ so von unten nach oben, daß ihre sphärisch abgedrehten obern Endflächen mit der untern Fläche des Meßtischblattes in Berührung kommen können. Diese drei Schrauben haben den Zweck, dem Meßtischblatte als Stützpunkte zu dienen, damit es nicht, wenn man sich beim Zeichnen auf dasselbe auflegt, aus der Horizontalebene herausgebracht werde. Um die bei der Drehung des Tischblattes entstehende Reibung der untern Fläche dieses letztern gegen die Endflächen der drei Stützschrauben zu vermindern, ist ein Messingring in das Tischblatt eingelassen, so daß die Schrauben nur auf diesem schleifen und nie Holz berühren können.

Fig. 205.

Die horizontale Messingplatte mit den drei Armen A, B, C ist mit dem eigentlichen Meßtischkopfe durch Löthung fest verbunden und dieser ganze Körper mittels einer starken Schraube d, welche die nach unten gehende Fortsetzung des Kopfes bildet, auf die obere Fläche des cylindrischen Fußstücks des Stativs geschraubt. Der eigentliche Kopf besteht aus drei Theilen: dem Kugelgewinde, der Mikrometervorrichtung und dem konischen Centralzapfen, der als unmittelbarer Träger des Meßtischblattes dient.

a. Das Kugelgewinde.

§. 182. Das **Kugelgewinde** (Fig. 205) ist eine massive Messingkugel m, die **Nuß** genannt, welche zu drei Vierteln in eine hohle Kugel n von gleichem Durchmesser versenkt ist, und sich darin mit sanfter Bewegung nach allen Richtungen drehen und verschieben läßt. Hat man der Nuß die Lage gegeben, die sie behalten soll, so wird sie in dieser Lage unverrückbar festgestellt. Zu diesem Zwecke ist in den Cylinder e, unterhalb der Nuß m, ein denselben senkrecht zur Achse, also seitlich durchdringender Gang von vierkantiger Form gegossen und sorgfältig ausgefeilt. Von der einen Seite schiebt

sich ein mit der schmalern Seite vorangehender messingener Keil p in diesen Gang. Der Keil trägt an seinem vorangehenden Ende eine Schraubenspindel q, die sich in eine entsprechende Mutter einschraubt, wenn man einen auf das andere Ende des Ganges aufgeschraubten Cylinder r bei seinem Griffe s herumdreht. Dies ist eigentlich ein Doppelcylinder, wovon der äußere mittels einer darangelöthbeten Platte auf dem Körper des Kopfes festsitzt, während der innere, der die Mutter trägt und mit dem Griffe s zusammengelöthet ist, sich in dem äußern drehen läßt. Durch eine nach innen vorgelegte Platte ist, außer der drehenden, jede andere Bewegung des Cylinders, z. B. ein Herausziehen in der Richtung seiner Achse, verhindert. Dreht man den Knebel s s rechts herum, so schraubt sich der Cylinder mit der an seinem vordern Ende befindlichen Schraubenspindel in den die Mutter enthaltenden Keil p ein, zieht den Keil an sich, das dickere Ende p desselben dringt weiter in den Gang ein, hebt einen darüber befindlichen Cylinder, dessen obere Fläche die Nuß m von unten berührt und gegen ihre Wandung n andrückt, wodurch ein Hinderniß gegen jede Bewegung der Nuß in ihrer Höhlung entsteht.

An den Breithaupt'schen Meßtischen ist diese Vorrichtung noch sicherer. Die vom Stativ getragene Platte P (Fig. 206) hat drei starke Arme A, jeder mit einer Stellschraube B versehen, die sich am obern Ende mittels einer Kugel in ein ähnlich gestaltetes Lager der in das Blatt C C eingeschraubten Plättchen c einsenkt; dies sind die Trägerschrauben, die dem Tischblatte die nöthige Festigkeit geben. Die Nuß m wird von unten durch die Druckschraube S bewegt, welche durch eine Mutter n mittels des Knebels r r festgestellt wird.

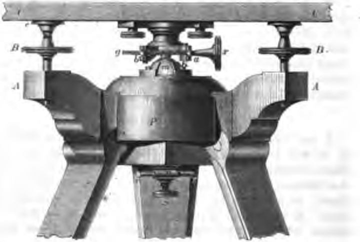


Fig. 206

b. Die Mikrometervorrichtung:

§. 183. Unmittelbar über der Nuß und mit dieser theilweise zu einem Körper verbunden, befindet sich die Mikrometerschraube g h (Fig. 205), durch welche bezweckt wird, dem Tischblatte eine ganz feine drehende Bewegung in der Horizontalebene um den verticalen Centralzapfen k l zu ertheilen. Auf den obern Aufsatz u der Nuß ist eine runde, horizontale Platte t v aufgeschraubt, die sich nach der Vorderseite der Zeichnung hin zu einer rechtwinkeligen Platte von $1^1/_4$ Zoll Breite und 2 Zoll Länge erweitert (vgl. Fig. 151). Auf dieser Erweiterung ruht, in horizontaler Lage, eine Schraube g x mit Kugelhemmung w, d. h. die Spindel der Schraube erweitert sich bei w zu einer Kugel, welche sich in einer entsprechenden Hohlkugel befindet, oder doch in zwei einander gegenüberstehenden Höhlungen, welche die Form von Kugelsegmenten haben; mit der Spindel dreht sich natürlich auch die Kugel in dieser Höhlung; aber da der Körper, welcher die Höhlung trägt, unverrückbar ist, so kann die Spindel nur die drehende, aber keine vor- oder rückwärtsschreitende Bewegung machen; in dem Metallkörper x dreht sich die Spindel ohne Gang, x dient blos zur Führung. Auf der Platte t v sitzt eine zweite Platte i h auf; die Platte i h ist kreisförmig und mit dem Centralzapfen k l zu einem Stück verbunden; an ihrem äußern Umfange, also an der der Schraubenspindel g x zugekehrten Cylinderfläche trägt die Platte i h Zähne, in welche die Gänge der Schraube g x eingreifen. Dreht man am Kopfe der Spindel g x, so bewegt sich der Zapfen k l sammt der Platte i h mit sanfter und langsamer Bewegung herum, rechts oder links, je nachdem der Kopf g in dem einen oder andern Sinne gedreht wird. Hier bildet g x mit der Platte i h eine Schraube ohne Ende; Herr Breithaupt in Kassel hat dafür eine eigentliche Mikrometerschraube (§. 134) eingeführt, wie x g (Fig. 206) zeigt; in a ist die Kugelhemmung, bei b aber schraubt sich die Spindel durch die dort sichtbare Kugel hindurch; die aus den zwei die Kugel fassenden Backen bestehende Klemme bei a ist mit dem untern, die ebenso geformte Klemme bei b mit dem obern Theile des Apparats fest verbunden. Durch das Drehen der Schraube x g in dem einen oder andern Sinne, wird also die Klemme b, und damit der ganze mit ihr verbundene obere Apparat links oder rechts herumgedreht. Um eine noch feinere, langsamere Bewegung zu erzielen, kann hier sehr wohl eine Differentialschraube gebraucht werden (§. 135).

c. Der Centralzapfen.

§. 184. Der Centralzapfen k l (Fig. 205) ist mit der Platte i h in einem Stück gegossen. Der Zapfen k l ist ein Hohlkegel, der über einen massiven, mit der Platte t v in einem Stück gegossenen Kegel gesetzt ist und sich um diesen drehen läßt; am obern Ende ist über einen quadratischen Ansatz

des innern Kegels eine Platte gesetzt, die durch die Druckschraube l festgehalten wird; dadurch wird verhindert, daß der hohle Kegel sich über den andern abhebe. Bei der Drehung der Schraube g x bleibt der massive Kegel stehen und der äußere, hohle dreht sich, also dreht sich denn auch alles, was mit diesem äußern Hohlkegel in feste Verbindung gebracht wird. Bei dem Gebrauche des Meßtisches wird aber das Tischblatt mittels des an seiner untern Fläche befindlichen Hohlkegels (Fig. 201) auf den Centralzapfen k l (Fig. 205) aufgesetzt und durch die drei schon früher erwähnten Druckschrauben befestigt; also dient denn die Mikrometerbewegung des Zapfens dazu, das Tischblatt langsam und gleichmäßig, d. h. mittels seiner Bewegung rechts oder links zu drehen. Damit aber die sorgfältig abgeschliffene Fläche des äußern Kegels am Centralzapfen durch die Druckschrauben nicht verletzt und rauh gemacht werde, wo die Schrauben sie treffen, ist in der davon angegriffenen Zone eine vertiefte Rinne y in den Kegel gedreht; da die Fläche dieser Rinne bei der Drehung des Zapfens in seiner Höhlung (der kegelförmigen Fassung am Tischblatte) die innere Kegelfläche dieser letztern nicht berührt, so werden die von den Schrauben etwa gemachten Eindrücke und Rauhheiten in der Rinne die sanfte Bewegung des Zapfens nicht beeinträchtigen. Sind die Druckschrauben gelöst, so kann man das Blatt aus freier Hand beliebig in der Horizontalebene um den Centralzapfen drehen; die Drehung geschieht dann durch grobe Bewegung; sind die Druckschrauben angezogen, so ist nur noch die feine Bewegung mittels der Schraube ohne Ende möglich. Bei der Breithaupt'schen Construction verhält sich dies im wesentlichen ebenso, nur daß die Bewegung durch die eigentliche Mikrometerschraube noch sicherer geschieht.

§. 185. Die Prüfung des Meßtisches zerfällt in drei gesonderte Untersuchungen: die Prüfung des Stativs, des Kopfes und des Tischblattes.

a. Prüfung des Stativs.

Hat man die drei Füße unter annähernd gleichen Winkeln mit der Verticalen ausgestreckt und auf festem und nahezu horizontalem Boden aufgestellt, so muß das Stativ feststehen und in den Gelenken kein Schlottern und Verrücken gestatten; findet dies doch statt, so ziehe man die Gelenkschrauben fester an; wird das Uebel dadurch nicht beseitigt, so liegt der Fehler entweder in den Schrauben, die dann todten Gang haben, oder in den Gelenken selbst. Im ersten Falle müssen die Schrauben, im letzten die Füße erneuert werden; eine bloße Ausbesserung ist in der Regel nicht möglich; höchstens könnte man vielleicht im letzten Falle danach sehen, ob vielleicht die Löcher, durch welche die Spindeln der Gelenkschrauben durchgehen, sich ausgeweitet haben, in welchem Falle sie mit Messing ausgefuttert werden müßten.

b. Prüfung des Kopfes.

§. 186. Die Fehler am Kopfe können in der Nuß, in der feinen Bewegung oder im konischen Zapfen liegen. Wenn der Keil, welcher das Kugelgewinde festklemmt, fest angezogen und das Tischblatt aufgesetzt ist, aber die Stützschrauben nicht bis an letzteres herangeschraubt sind, so muß sich doch das Blatt, bei einer einseitigen Beschwerung, nicht nach dieser Seite senken, Man sieht es an einer auf das Blatt gesetzten Libelle. Ist der Tisch mit diesem Fehler behaftet, so ist der Keil ausgeschliffen und zu klein geworden, sodaß er die Kugel nicht innig genug berührt; er muß dann herausgenommen und durch einen neuen ersetzt werden. Oder es hat sich die Kugel durch vielen Gebrauch abgeschliffen, so daß sie nicht mehr sphärisch ist; auch in diesem Falle hilft nur eine Erneuerung des betreffenden Theils. Daß die Schuld hierbei am Centralzapfen liege ist kaum anzunehmen, da die Arbeit dann zu schlecht wäre, als daß irgend eine gute Werkstätte sie in der Weise lieferte. Ist ein Meßtisch nur anfänglich in diesen Theilen richtig construirt, so kann er sehr lange gebraucht werden, ehe diese Fehler eintreten, es sei denn, daß ganz sorglos damit umgegangen werde.

Setzt man das Tischblatt auf den Centralzapfen, schraubt es fest, richtet es so ein, daß eine daraufgesetzte Libelle den horizontalen Stand desselben anzeigt, und dreht es dann mittels grober oder feiner Bewegung im Kreise herum, so darf sich die Blase dabei nicht aus dem Centrum entfernen. Vorausgesetzt, daß das Tischblatt an sich richtig gebaut ist, kann der Fehler, wenn ein solcher vorliegt, nur an dem Zapfen, oder an der Platte hi (Fig. 205), oder an der Platte vt liegen. Entweder sitzt nämlich der Zapfen nicht senkrecht auf hi, oder hi und vt sind nicht überall gleich dick. Es müßten denn die betreffenden Flächen von neuem nachgedreht oder abgeschliffen werden.

An der feinen Bewegung kommt nach längerm Gebrauche des Meßtisches manchmal ein ungleichförmiger Gang oder gar ein Schlottern vor, was davon herrührt, daß die Gänge der Schraube ohne Ende oder der Mikrometerschraube sich theilweise oder überall ausgeschliffen haben. Der Fehler läßt sich beseitigen, wenn die Schraube sich dem gezahnten Rade nähern läßt, was ein Versetzen der Lager der Schraube nöthig macht und in der Regel nur vom Mechanikus zu bewerkstelligen ist. Kommt der Fehler bei einer Mikrometerschraube vor, so muß man sie weiter ein- oder ausschrauben, so daß andere Gänge in Gebrauch kommen. Schlottern die Spindeln in ihren Lagern, so hilft man vorläufig durch Anziehen der betreffenden Schrauben; genügt dies nicht, so muß man diese Theile erneuern oder doch die Lager ausfuttern lassen.

Bei einem etwas schweren Gang der feinen Bewegung schreibt man häufig vor, die Gänge zu fetten. Schraubengänge und Radzähne müßten aber füglich auch ohne dieses Mittel immer richtig und gleichmäßig gehen. Ueber-

haupt muß man mit dem Fett bei feinen Instrumenten sehr sparsam sein, und nie Oel irgend einer Art dazu verwenden; Klauenfett und Hirschtalg sind die einzigen für diese Zwecke brauchbaren Fettarten, dürfen aber auch nur zwischen größere sich reibende Flächen, wie Zapfen, Lager u. dgl. gebracht werden.

c. Prüfung des Tischblattes.

§. 187. Das Tischblatt bedarf einer sorgfältigen Prüfung, da es viel öfter Fehler aufweist als alle andern Theile; da das Holz durch abwechselndes Feucht- und Trockenwerden sich leicht verzieht, so muß diese Prüfung auch von Zeit zu Zeit wiederholt werden.

Ob es überall eine richtige Ebene bilde, findet man einfach durch eine an verschiedenen Stellen aufgesetzte Libelle, nachdem das Brett so gestellt worden, daß die Libelle, an einer einzelnen Stelle desselben aufgesetzt, den horizontalen Stand dieses Theils anzeigt. Gewöhnlich weist diese Probe nach, daß das Tischblatt im ganzen keine Ebene, vielmehr eine sogenannte windschiefe Ebene ist; wenigstens trifft dies meist zu, wenn ein Brett schon längere Zeit zu Aufnahmen gebraucht worden ist. In der Regel ist dann kein anderer Rath, als ein solches Blatt entweder durch ein neues zu ersetzen, wozu man immerhin die Metalltheile des alten wird verwenden können, oder doch höchstens noch zu rohern Arbeiten zu gebrauchen.

Um zu erfahren, ob das Tischblatt während der Arbeit unverrückt seine Stellung behalte, zeichnet man eine gerade Linie auf dasselbe, richtet die Diopter des Diopterlineals (§. 189), oder das Fernrohr der Kippregel nach dieser Linie und dreht nun den Tisch so, daß die Gesichtslinie auf ein deutlich wahrnehmbares entferntes Object hinweist. Nun schraubt man das Tischblatt an den Centralzapfen fest und corrigirt bei nochmaligem Visiren die durch das Festschrauben etwa erfolgte Verschiebung mittels seiner Bewegung. Legt man sich dann einigemal auf das Tischblatt, etwa wie wenn man darauf zeichnete, und sieht nochmals durch das Instrument, das immer noch nach der gezogenen Linie gerichtet ist, nach dem entfernten Objecte, so wird sich zeigen, ob das Diopter oder Fadenkreuz noch auf denselben Punkt hinweist oder nicht; im letzten Falle hätte sich der Tisch verrückt und seine Befestigung wäre mangelhaft, müßte daher vom Mechanikus möglichst verbessert werden.

§. 188. Wenn der Meßtisch aufgestellt werden soll, so hat man in der Regel folgenden Bedingungen zu genügen:

1) einen gegebenen Punkt p des Tischblattes senkrecht über einen ebenfalls gegebenen Punkt P im Felde zu bringen;
2) eine von diesem Punkte p ausgehende und durch eine gerade Linie pq auf dem Tischblatte bezeichnete Richtung mit einer entsprechenden Richtung PQ im Felde in eine Verticalebene zu bringen;

3) das Tischblatt horizontal zu stellen.

Diese Aufgabe hat das Eigenthümliche, daß, wenn allen drei Bedingungen genügt werden soll, wie dies gewöhnlich der Fall ist, man sie nicht eine nach der andern erfüllen kann, sich vielmehr damit begnügen muß, sich der verlangten Stellung des Meßtisches, unter Beachtung aller drei Bedingungen, allmählich zu nähern, bis man das Geforderte geleistet, den Tisch in die verlangte Lage gebracht hat.

Man stelle also den Meßtisch so über P auf, daß p, nach dem Augenmaße zu urtheilen, nahe genau über p, pq mit PQ in einer Ebene und das Tischblatt horizontal liegt, alles nur so nahe genau, als es sich nach dem Augenmaße machen läßt. Nun halte man ein Senkloth unten an das Tischblatt in dem Punkte, welcher senkrecht unter p liegt, was sich mit bloßem Auge sehr wohl bewerkstelligen läßt *), und prüfe, ob p über P liege oder nicht. Ist es nicht der Fall, so verstelle man den Meßtisch so viel, daß das richtig gehaltene Loth auf den Punkt P einspielt. Ist die Abweichung groß, so hebe man den Tisch auf und setze ihn an die geeignete Stelle; beträgt sie nur wenig, so versetze man einen Fuß nach dem andern, ohne jedoch an der annähernd horizontalen Stellung und an der Richtung der Linie pq wesentlich etwas zu ändern; es wird so bald gelingen, den Tisch in die richtige Lage zu bringen. Dann stelle man das Blatt vollständig horizontal, indem man das Kugelgewinde löst, die Stützschrauben etwas vom Blatte herunterschraubt, eine berichtigte Dosen- oder Röhrenlibelle auf das Blatt setzt und dieses so lange auf- und niederbewegt, bis die Blase ziemlich nahe im Centrum einspielt, dann das Kugelgewinde zunächst so viel anzieht, daß das Blatt, wenigstens ohne Berührung, von selbst festsitzt, es dann noch so viel auf- und niederdrückt, daß die Blase genau einspielt, endlich das Kugelgewinde fest anzieht und die Stützschrauben bis ans Blatt hinaufschraubt. Mit der Dosenlibelle geht dieses Stellen rascher von statten als mit der Röhrenlibelle, da man mit dieser stets zwei auf einander rechtwinkelige Richtungen des Blattes prüfen muß.

Ist das Tischblatt horizontal, so muß es noch genau in die Richtung

---

*) Man bedient sich zu diesem Geschäfte auch wol der sogenannten Einlothgabel; dies ist eine Gabel aus Messing, welche so an das Tischblatt gesteckt wird, daß das Ende des obern Schenkels auf den Punkt p fällt; an den andern Schenkel, welcher unter dem Tische bleibt, ist ein Senkloth genau senkrecht unter das Ende des obern Schenkels gehängt, woran sich erkennen läßt, ob p über P liegt. Bei einiger Aufmerksamkeit beim Ablothen ist dieser Apparat ganz entbehrlich; überdies muß man ja verschiedene andere Instrumente ebenso wie den Meßtisch über einen gegebenen Punkt aufstellen, ohne daß man dabei etwas anderes als das einfache Loth anwenden könnte.

gebracht werden, in welcher pq mit PQ in eine Verticalebene fällt. Dies kann nur vermittelst eines Diopters oder wenigstens eines Visirs geschehen. Man stecke daher in die Linie pq, möglichst weit aus einander, zwei feine und gerade Nadeln senkrecht ein, löse die drei Druckschrauben am Centralzapfen, sehe längs der Richtungslinie der beiden Nadeln, ob sie auf den Punkt Q treffe; ist dies nicht der Fall, so drehe man das Tischblatt so lange, bis die Visirlinie auf Q weist, befestige die Druckschrauben, und sehe wieder, ob die Nadeln noch auf Q zeigen; sollte es nicht durchaus der Fall sein, so corrigire man den Fehler mittels der feinen Bewegung, indem man die Schraube ohne Ende (oder beziehlich die Mikrometerschraube) links oder rechts herumdreht, je nachdem die Nadeln links oder rechts von Q abweichen.

Durch Drehung des Tischblattes kann aber p wieder aus dem Lothe von P gekommen sein; es wird zwar nicht viel betragen, auch würde eine geringe Abweichung nicht erheblich schaden; wollte man aber den Fehler noch corrigiren, so müßte man mit den Füßen des Tisches etwas nachhelfen, die Horizontalstellung des Blattes wieder vornehmen und zuletzt auch wieder die Linie pq in die Verticalebene von PQ bringen. So muß man mit Prüfen und Abändern abwechseln, bis die dem Tische gegebene Stellung allen drei oben gestellten Forderungen genügt.

Diese ganze Operation begreift man unter dem Namen des **Einstellens** des Meßtisches; wenn man einer Linie pq auf dem Tischblatte die Richtung einer Linie PQ im Felde gibt, so daß P senkrecht unter p liegt, so sagt man: der Tisch werde nach pq **orientirt**. Soll aber der Meßtisch nach einer bereits auf demselben verzeichneten Geraden pq, welche der Geraden PQ im Felde entspricht, orientirt werden, so begeht man leicht kleine Fehler, die im Verlaufe der Messung sich bedeutend vergrößern können; diese entstehen hauptsächlich dadurch, daß die gezeichneten Linien eine Dicke haben, daher das Anlegen des Lineals unsicher machen. Diese Unsicherheit wird aber um so geringer, je länger die Linie auf dem Papier ist; daher sollte man es sich zum Gesetze machen, von jeder Linie, nach welcher später der Meßtisch möglicherweise orientirt werden soll, auf den Rändern des Blattes die beiderseitige Fortsetzung deutlich anzugeben.

II. Das Diopterlineal.

§. 189. Das **Diopterlineal** ist ein genau gearbeitetes Lineal AB (Fig. 207) von Holz oder starkem Messing, $^1/_4$ Zoll dick, 2 Zoll breit und 2 bis $2^1/_2$ Fuß lang. Gegen jedes Ende hin trägt es, senkrecht zu seiner Ebene, ein Diopter; beide Diopter sind gewöhnlich zur Doppelvisur eingerichtet. Die eine Kante des Lineals ist der Länge nach abgeschrägt, wie mn, und

die schräge Fläche und Kante sind matt versilbert, damit sie nicht spiegle und dadurch das Auge blende. Die versilberte Fläche widersteht aber auch besser den Einflüssen der Luft; wollte man die Kante, wie alle übrigen Flächen, lackiren, so würde der Lack durch das Linienziehen doch bald heruntergearbeitet werden, das Messing dann an der Luft oxydirt und dadurch rauh werden, was für das Linienziehen nachtheilig wäre. Die Versilberung schützt das Messing zugleich gegen die Oxydation.

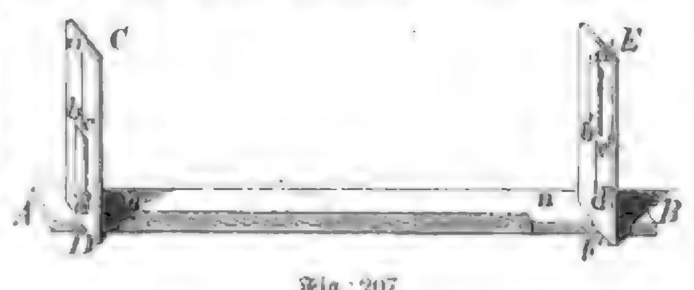


Fig. 207.

Die Verticalebene der Diopter muß eine solche Lage haben, daß die zum Linienziehen bestimmte Kante des Lineals genau in sie fällt. Dies wird von den Mechanikern nicht immer berücksichtigt; es mag daher untersucht werden, in welchen Fällen dies gleichgültig und in welchen es schädlich ist. Sieht man durch die beiden Diopter nach einem fernen Gegenstande, während das Diopterlineal auf dem mittels der Libelle horizontal gestellten Meßtische liegt, so geben die Diopter die durch das Auge und jenen Gegenstand gelegte Verticalebene an, und zieht man längs der Kante des Lineals auf dem Papier eine Linie, so fällt diese nur dann in die durch die Diopter und den anvisirten Gegenstand bestimmte Verticalebene, ist also nur dann die richtige Visirlinie, wenn die Kante selbst in jene Ebene fällt; sonst liegt sie um ebenso viel rechts oder links der wahren, als die Kante selbst von der richtigen Verticalebene abweicht, wie A′a′ (Fig. 208) von Aa, wenn Aa den Grundriß der Verticalebene, A′a′ die nach der Kante gezogene Gerade vorstellt. Visirt man dann von demselben Punkte A aus nach einem andern Punkte b, so erhält man diesen nicht in der richtigen Visirlinie Ab, sondern in der Richtung A′b′, um ebenso viel seitwärts, als man a′ seitwärts von a erhielt; die gegenseitige Lage der Punkte a′ und b′ wird aber dieselbe sein, wie die von a und b, und dies wird allemal der Fall sein, wenn man immer von demselben Ende des Diopterlineals aus visirt. Visirt man aber bei der Bestimmung einer Linie von dem Ende A aus, dagegen bei der Bestimmung einer andern Linie von dem Ende B aus, gebraucht man also das eine Mal das eine Diopterpaar, das andere Mal das andere, so werden die beiden nach dem Lineale gezogenen Geraden entweder einander näher liegen als die Verticalebenen, oder weiter von einander; die Lage der Gegenstände wird also jedenfalls unrichtig werden.

Fig. 208.

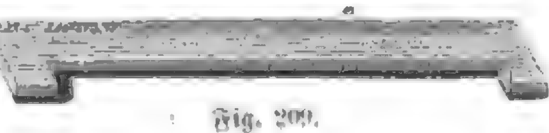


Fig. 209.

Um dies zu vermeiden wird das Lineal an der Zeichenkante eingeschnitten, wie noch deutlicher an Fig. 209 zu sehen ist, wo jedoch die Diopter weggelassen sind.

§. 190. Um zu untersuchen, ob die Diopterebene mit der Kante des Lineals zusammenfällt, richte man die Diopter nach einem beliebigen entfernten Punkte, stelle zwei Absteckstäbe A, B in dieser Richtung aus und ziehe auf dem Meßtische die Gerade ab längs der Kante des Lineals; dann kehre man das Lineal um, lege es von der andern Seite gegen die Linie ab, stelle auch hier wieder zwei Absteckstäbe C, D in die Visirlinie, so daß also der Meßtisch sammt dem Lineal zwischen den beiden Paaren der Absteckstäbe steht, kehre dann das Lineal noch einmal um, es in die vorige Lage zur Geraden ab bringend, um zu sehen, ob die Diopter dann noch auf denselben entfernten Punkt hinweisen; wenn dies nicht der Fall sein sollte, so müßte man das zweite Paar Stäbe (C, D) corrigiren, bis die Probe zeigt, daß der Tisch sich während der Arbeit nicht gerückt hat. Ist dies erreicht, so müssen die vier Stäbe A, B, C, D in derselben geraden Linie liegen, sonst fällt die Diopterebene nicht mit der Kante des Lineals zusammen.

III. Die Kippregel.

§. 191. Weit entfernte Objecte sind oft, namentlich für kurzsichtige Augen und bei schwacher Beleuchtung, durch gewöhnliche Diopter nicht deutlich zu sehen. Daher bedient man sich jetzt viel häufiger eines Fernrohrs AB (Fig. 210), welches auf dem Lineale CD so angebracht ist, daß seine optische

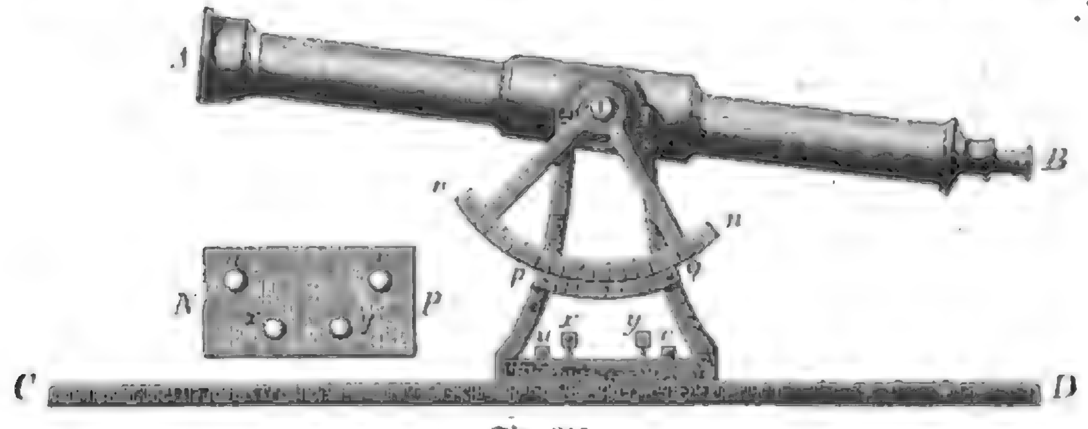


Fig. 210.

Achse mit der Längenkante des Lineals genau in dieselbe Verticalebene zu liegen kommt und sich in dieser Ebene mit sanfter Bewegung um eine feste horizontale Drehachse c auf- und abwärts drehen, heben und senken läßt, um auch Gegenstände anvisiren zu können, die über oder unter der Horizontalen des Meßtisches liegen. Ein solches Instrument heißt, wegen seiner auf- und

abwärts gerichteten Bewegung, eine Kippregel. Da sich das Fernrohr doch schon um eine Achse drehen lassen muß, so verbindet man gewöhnlich einen Gradbogen mn damit, um zugleich die Neigungswinkel ablesen zu können. Der Gradbogen mn ist mit einem Nonius pq verbunden, jedoch bewegt sich hier der Gradbogen mit dem Fernrohr zugleich um die Achse c und der Nonius steht fest, was in dem Gebrauche des Nonius und in der Ablesung der Winkel durchaus keine Aenderung hervorbringt. Der Nullpunkt des Gradbogens mn und der Index des Nonius sind in der Mitte, von wo aus die Theilungen nach beiden Seiten gehen. Endlich ist das Fernrohr mit einem Fadenkreuz versehen, so daß die optische Achse desselben durch den Kreuzungspunkt der Fäden und das Centrum des Objectivglases bestimmt ist. Das Fernrohr vergrößert gewöhnlich nicht über 20 bis 30 Mal.

Zuweilen setzt man oben auf das Fernrohr noch ein paar Diopter, welche zum leichtern Auffinden und vorläufigen Einstellen des Fernrohrs dienen können. In der Zeichnung trägt der Ständer das Fernrohr und die damit fest verbundene etwas konisch geschliffene Drehachse in einem gleichfalls konischen Lager. Bei manchen Instrumenten wird diese Achse und damit das Fernrohr von zwei verticalen Säulen getragen, zwischen welchen die Drehungsebene des Fernrohrs sich befindet. Bei einigen liegt die Drehachse so hoch über dem Lineale, daß das Fernrohr sich ganz herumdrehen, also auch in die entgegengesetzte Lage bringen (um 180° drehen) läßt, was man damit bezeichnet, daß man sagt: das Fernrohr lasse sich durchschlagen; meistens aber liegt das Fernrohr so wenig über das Lineal erhaben, daß es sich nicht durchschlagen läßt. Das Durchschlagen des Fernrohrs gewährt den Vortheil einer leichtern Prüfung. Bei Kippregeln, deren Fernrohr auf zwei Säulchen ruht, gewinnt man denselben Vortheil durch das Umwenden, Umsetzen oder Umlegen, worunter man versteht, daß man das Fernrohr aus seinen Lagern auf den zwei Säulen herausnehme, um 180° in der Horizontalebene herumdrehe und in dieser Lage wieder in seine Lager lege, wobei also die Zapfen ihre Lager mit einander vertauschen. Das Fernrohr wird zuweilen auch so umgesetzt, daß es in dieselbe Lage kommt, wie wenn es durchgeschlagen worden wäre, wobei also die Lager nicht vertauscht werden.

§. 192. Will man die Kippregel prüfen, so muß man zunächst das Fernrohr allen den Proben unterwerfen, welche §. 94 erörtert worden sind, und kann dann erst zu der Prüfung derjenigen Punkte gehen, welche von der besondern Construction des Instruments abhängen. In dieser Beziehung ist aber zu untersuchen:

1) ob bei horizontaler Stellung des Lineals die Visirlinie sich in einer Verticalebene bewege, wenn man das Fernrohr um seine Achse dreht;

2) ob, wenn das Instrument der ersten Forderung genügt, die Visirebene durch die Linealkante gehe oder doch damit parallel sei;

3) ob der Nullpunkt der Theilung und der Index des Nonius sich decken, wenn die optische Achse parallel zur Linealkante gestellt ist.

1) Zur Prüfung ad 1 hänge man in einiger Entfernung ein Senkloth auf, stelle den Meßtisch horizontal, setze die Kippregel darauf und richte den Schnittpunkt des Fadenkreuzes auf das Loth, bewege dann das Fernrohr auf und ab und sehe zu, ob es bei dieser Bewegung fortwährend den Faden des Lothes decke. Weicht der Kreuzpunkt der Fäden vom Lothe ab, so ist die Visirebene nicht senkrecht zur Ebene des Lineals, und der Fehler kann entweder daher rühren, daß die Drehachse nicht senkrecht zur Visirlinie steht, oder der Ebene des Lineals nicht parallel ist, oder von beiden Fehlern zugleich. Da der Fehler am gewöhnlichsten darin liegt, daß die Drehachse nicht parallel zur Ebene des Lineals liegt, so verbessere man vorläufig diesen Fehler. Dazu dienen die vier Schräubchen u, v, x, y, welche im Grundrisse die Lage haben, wie sie links daneben gezeichnet sind; u, v gehen ohne Gewinde durch die Fußplatte und schrauben sich in den Körper des Lineals ein, x, y dagegen schrauben sich blos durch die Platte N P und stehen auf der obern Fläche des Lineals stumpf auf. Mittels der Schräubchen x, y kann also die Fußplatte N P um eine durch u v bestimmte Linie gedreht, folglich die Achse c nach der Vorderseite des Instruments gehoben oder gesenkt werden, ersteres, wenn man x, y löst, letzteres, wenn man x, y anzieht und jedesmal mit u, v die entgegengesetzte Bewegung vornimmt.

Sollte es nach wiederholten Versuchen und abermaligen Prüfungen nicht gelingen, den Fehler hierdurch wegzuschaffen, so ist es wahrscheinlich, daß die optische Achse zur Drehachse nicht senkrecht steht. Letztere läßt sich in ihrer Lage nicht verändern, daher muß man der optischen Achse eine andere Lage geben. Sie ist aber bestimmt durch den optischen Mittelpunkt des Objectivglases und durch den Kreuzungspunkt der Fäden; jener wieder läßt sich nicht verändern, wohl aber der Kreuzpunkt der Fäden; man schiebe also auf die im §. 94 angezeigte Weise den Kreuzpunkt der Fäden seitwärts, links oder rechts, je nachdem die Drehachse auf der Seite des Oculars links vom Beobachter einen stumpfen oder spitzen Winkel bildet.

Bei einer Kippregel, deren Fernrohr sich durchschlagen läßt, ist das Verfahren der Prüfung einfacher. Man stellt das Instrument so auf, daß das Lineal horizontal liegt, richtet dann in 100 bis 200 Fuß Entfernung einen Absteckstab genau in der Visirlinie auf und zieht auf dem Papier des Meßtisches eine Linie längs des Lineals; dann kehrt man das ganze Instrument um, so daß das Ocular gegen den aufgestellten Absteckstab hin liegt, legt es

wieder an die gezogene Linie an und schlägt es jetzt durch; wenn dann der Kreuzpunkt der Fäden nicht wieder auf den Stab weist, so ist die Drehachse nicht senkrecht zur optischen Achse des Fernrohrs.

2) Die Prüfung der Forderung ad 1 setzt jedoch voraus, daß das Instrument in Bezug auf den zweiten Punkt schon richtig sei. Die Prüfung ad 2 aber wird folgendermaßen durchgeführt. Man stelle das Meßtischblatt horizontal, stecke möglichst weit aus einander zwei gerade und feine Nadeln völlig senkrecht in das Tischblatt und visire mittels derselben einen entfernten Stab an, befestige das Meßtischblatt und stelle die Kippregel so auf dasselbe, daß die Linealkante an beide Nadeln anliegt; weisen dann die Kreuzfäden nicht wieder auf den Stab, so geht die durch die optische Achse gelegte Verticalebene nicht durch die Linealkante. Um diesen Fehler corrigiren zu können, gehen die Schrauben u, v in der Fußplatte NP durch längliche Schlitzen; löst man also diese beiden Schrauben, so läßt sich die Fußplatte NP und damit die optische Achse des Fernrohrs etwas drehen, worauf die Schrauben wieder befestigt werden. Die Richtung der Drehung ist leicht aus der Art der vorher gefundenen Abweichung zu bestimmen. Man darf aber nicht versäumen, nachgehends das Instrument wieder auf die Forderung ad 1 zu prüfen und nöthigenfalls zu berichtigen.

3) Soll die Kippregel zur Bestimmung von Höhen- und Tiefenwinkeln gebraucht werden, so muß die horizontale Lage der optischen Achse durch die Coincidenz des Nullpunktes und Index angezeigt werden. Ist dies nicht der Fall, so heißt die Abweichung beider Punkte bei horizontaler Lage der optischen Achse der Collimationsfehler der Kippregel. Man findet den Collimationsfehler, wenn man mit der Kippregel die Neigung eines Abhangs von unten und auch von oben mißt, also Höhen- und Tiefenwinkel bestimmt, wie Fig. 211 zeigt. Man bezeichne zwei Punkte A, B, stelle den Meßtisch über A auf und mache das Blatt horizontal; dann stelle man die Kippregel so auf das Blatt, daß die Achse c lothrecht über A zu liegen kommt, messe die Höhe AE = h, wenn E die Achse c des Instruments vorstellt; bezeichne diese

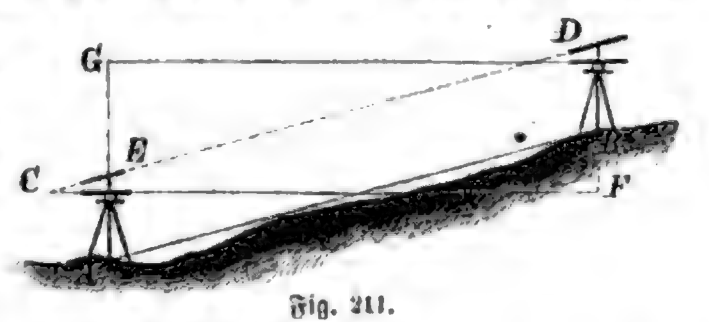


Fig. 211.

Höhe h auf einer Latte, lasse diese Latte in B lothrecht aufstellen, so daß etwa BD = h, und richte über A das Fernrohr nach dem Punkte D, so wird der Kreisbogen einen Winkel w' = DCF angeben. Nun trage man den Meßtisch nach B, stelle ihn dort so auf, daß, nachdem das Blatt horizontal gemacht und die Kippregel daraufgestellt, die Achse c in den Punkt D komme, so daß wieder

BD = h werde, lasse dagegen die Latte in A aufstellen und richte das Fernrohr in D auf die Marke an der Latte über A, so wird die Theilung des Instruments einen Tiefenwinkel w″ angeben. Ist nun w′ = w″, so hat das Instrument keinen Collimationsfehler. Ist aber w′ ≷ w″, so ist die eine dieser Größen größer, die andere ebenso viel kleiner als der wahre Werth w, d. h. es ist, wenn k diesen Unterschied vom wahren Werthe bezeichnet:

$$w' = w \pm k$$
$$w'' = w \mp k$$

also:
$$w = \frac{w' + w''}{2}$$

und
$$k = \pm \frac{w' - w''}{2}.$$

Der wahre Werth des Neigungswinkels ist der halben Summe, der Collimationsfehler der halben Differenz der gemessenen Winkel gleich, letztere positiv oder negativ, je nachdem der Index rechts oder links vom Nullpunkte der Theilung liegt; jenes ist der Fall, wenn w′ > w″, dieses, wenn w′ < w″. Im ersten Falle muß der Betrag des Collimationsfehlers von den Höhenwinkeln subtrahirt, zu den Tiefenwinkeln addirt werden; im letztern Falle dagegen muß der wahre Werth von w umgekehrt berechnet werden.

Soll der Collimationsfehler an der Kippregel verbessert werden, so müssen die Schräubchen bei p, q (Fig. 210) in länglichen Löchern durch den Noniusbogen gehen, damit der Bogen pq sich etwas verschieben kann; dann schiebt man diesen Bogen rechts oder links, je nachdem der Index links oder rechts vom Nullpunkte liegt.

§. 193. Die Fig. 212 stellt eine Kippregel aus der Werkstatt der Herren Breithaupt und Sohn in Kassel vor. Auf dem Lineale AB ist die Fußplatte CD durch Schrauben befestigt; mit CD zu einem Körper verbunden erhebt sich die Tragsäule EF, als Träger des Lagers einer horizontalen Drehachse, die selbst Theil des Fernrohrs GH ist. An der Tragsäule befindet sich der verticale Kreis KK, an dem Fernrohre und mit diesem gleichzeitig drehbar die Alhidade nn′, die bei n einen Nonius trägt, der bei der Drehung des Fernrohrs über die Theilung des Kreises läuft; mm ist die Mikrometerschraube für die feine Bewegung, M die Bremsschraube, wodurch die grobe Bewegung der Alhidade gehemmt wird. LL ist eine auf dem Fernrohr angebrachte Röhrenlibelle; die Schräubchen s reguliren das Fadenkreuz; J ist der Kopf zu einem kleinen Trieb, das in eine im Innern des Rohrs befindliche gezahnte Stange eingreift, wodurch die Ocularröhre ein- und ausgeschoben werden kann, je nachdem die Entfernung des Objects und die Kurz- oder Weitsichtigkeit des Auges solches verlangen, um ein deutliches Bild her-

vorzurufen. Auf dem Lineale AB steht endlich noch eine Orientirboussole o o; x, y sind zwei von den vier vorhandenen Correctionsschräubchen.

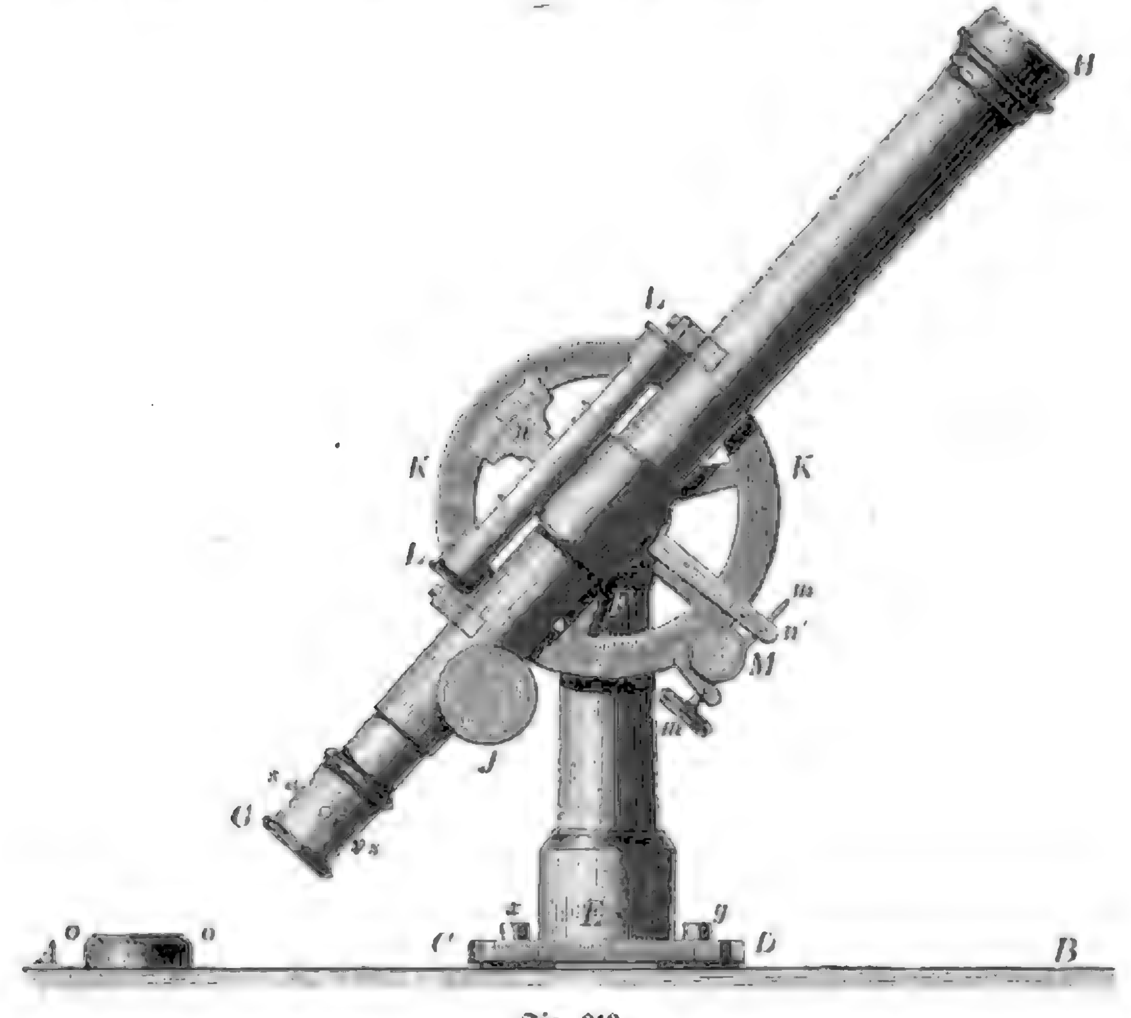


Fig. 212.

Prüfung und Berichtigung dieser Kippregel sind im allgemeinen wie die der oben beschriebenen, können indeß auch ebenso geführt werden, wie weiter unten bei den Theodoliten gezeigt werden wird.

IV. Die Orientirboussole.

§. 194. Bei Aufnahme mit dem Meßtische ist es oft erforderlich, die Lage der im Grundrisse verzeichneten Punkte nach der Himmelsgegend zu bestimmen, d. h. die Richtung des Meridians auf der Karte anzugeben. Da man dies das Orientiren der Karte nennt, so heißt das dazu dienende Instrument die Orientirboussole. Man bedient sich ihrer zu dem genannten Zwecke natürlich nur, wenn es nicht auf den äußersten Grad der Genauigkeit des aufzutragenden Meridians ankommt.

Die Orientirboussole besteht aus einem rechtwinkeligen Kästchen ABCD (Fig. 213), welches etwa 6 Zoll lang, 3 Zoll breit, und oben mit einer Glasplatte zugedeckt ist. Im Innern schwebt eine Magnetnadel NS frei auf

einem harten Stahlstifte; im Zustande der Ruhe gibt die Nadel die Lage des magnetischen Meridians an. Wegen der westlichen Abweichung von 18° im nördlichen Deutschland findet man den astronomischen Meridian, wenn man 18° östlich vom magnetischen einen Durchmesser durch den Stift der Nadel zieht. Auf dem Boden des Kästchens wird eine Gerade durch den Fußpunkt des Stifts und parallel mit den langen Seiten des Kästchens gezogen und an ihren Enden mit N und S bezeichnet; um denselben Punkt beschreibt man an den schmalen Seiten zwei Bogen eines Kreises und theilt sie in ganze Grade; den 18. westlich vom Nordpunkte N markirt man noch besonders als magnetischen Meridian. Da der Meridian NS parallel mit den Längsseiten des Kästchens gezogen ist, so geben diese jederzeit die richtige Lage des Meridians an, sobald das Kästchen so gestellt worden, daß die Nadel auf den vorgezeichneten magnetischen Meridian einspielt. In andern Gegenden, wo die Abweichung eine andere ist, würde man sich natürlich erst die genaue Kenntniß von dieser verschaffen und beim Orientiren der Karte die Nadel auf den Punkt einspielen lassen müssen, der um die Abweichung östlich oder westlich vom Nordpunkte entfernt wäre.

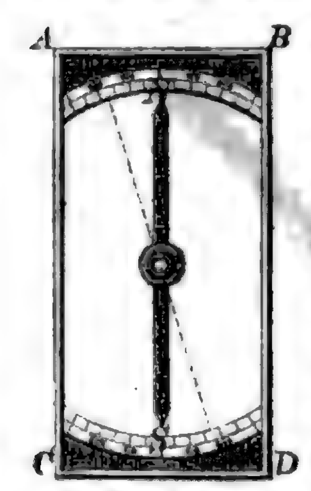


Fig. 213.

Um nun den Meridian auf eine Karte einzutragen, stelle man den Meßtisch mit der Zeichnung über einem beliebigen Punkte des Feldes auf und orientire ihn nach diesem Punkte in horizontaler Lage des Blattes; dann stelle man die Boussole darauf und drehe sie so lange, bis sie auf demjenigen Punkte zur Ruhe kommt, der die magnetische Abweichung anzeigt; endlich zieht man längs einer der längern Außenseiten eine Gerade, so ist diese der Meridian des Ortes.

Weiterhin werden wir noch andere Mittel kennen lernen, den Meridian eines Ortes zu bestimmen und auf die Karte einzutragen.

V. Die Feldboussole.

§. 195. Die Feldboussole oder der Feldmesserkompaß besteht aus dem Kompaß, dem Diopter und dem Fuße. Manchmal ist das Diopter durch ein Fernrohr ersetzt. Wir geben zunächst die Beschreibung der Feldboussole von Ertel in München, weil sie unter den bessern Instrumenten dieser Art die einfachste Construction hat.

Der Kompaß besteht aus einer messingenen Büchse a (Fig. 214) von 4 Zoll Durchmesser, in deren Mitte sich ein Stahlstift erhebt, auf welchem eine Magnetnadel mit Karneol- oder Achathütchen ruht. In der Höhe der

auf der Spitze des Stifts ruhenden Nadel befindet sich der horizontale Gradring, an die Seitenwand der Büchse befestigt. Die Grade werden rechts herum von 0 bis 360 gezählt; kleinere Bogen als ganze Grade werden blos geschätzt. Als Deckel der Büchse dient eine ebene Glasplatte. Um die Stahlspitze, auf welcher die Nadel mit dem Hütchen ruht, möglichst zu schonen, dient eine Vorrichtung, die **Arretirung** genannt, durch die die Nadel, wenn die Boussole nicht gebraucht wird, von der Spitze abgehoben und gegen den Glasdeckel gedrückt wird. Der Stift ist nämlich von einer Hülse umgeben, die mit einem kleinen Hebel in Verbindung steht, dessen eines Ende durch die Wand der Büchse hindurch nach außen hin reicht und dort mittels eines Schräubchens s niedergedrückt oder wieder gehoben werden kann; ersteres hebt die Hülse empor und diese hebt die Nadel von der Spitze ab; die entgegengesetzte Bewegung des Hebels s läßt die Hülse wieder sinken und dadurch die Nadel auf die Spitze zurückkehren.

Fig. 214.

Das **Diopter** ist an einer unter dem Kompaß liegenden Platte angebracht, und zwar Ocular und Objectiv einander diametral gegenüber; zweckmäßig ist, wie d, d' zeigen, dasselbe auf die Doppelvisur einzurichten. In der Visirebene liegen die Gradzahlen 0 und 180, und auf dem Boden des Kompasses ist in derselben Ebene eine mit NS bezeichnete Linie gezogen.

Der **Fuß** der Boussole ist so eingerichtet, daß er ihr eine drehende Bewegung sowol in der Horizontal- als auch in der Verticalebene gestattet. Wie der Durchschnitt (Fig. 215) zeigt, dient nämlich die Unterlagsplatte p p, an welcher auch die Diopter d, d' angebracht sind, zugleich als Bodenplatte des Kom-

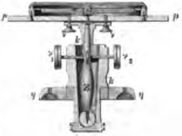


Fig. 215.

passes. Durch die Schräubchen v, v ist diese an den Hohlkegel k befestigt, in dessen Innerm sich der Zapfen Z befindet, der durch vier Schrauben $v_1 \ldots . v_4$ festgestellt werden kann; der Durchschnitt läßt zwei dieser Schrauben sehen, die beiden andern stehen senkrecht auf der Verticalebene, in welcher diese liegen. Der Zapfen endigt unten in eine Kugel r, auf der er, wenn die Schrauben gelöst sind, sich drehen läßt. Dieser ganze Apparat ist mittels der Platte q auf einem Dreifuße befestigt, ähnlich dem des Meßtisches.

§. 196. Die **Prüfung** der Boussole hat auf folgende Punkte Rücksicht zu nehmen:

1) ob die Kompaßbüchse eisenfrei sei;
2) ob die Bodenplatte der Büchse senkrecht zum Centralzapfen stehe;
3) ob die Magnetnadel horizontal auf der Spitze ruht, auch wenn die Büchse etwas geneigt stehen sollte;
4) ob die Stahlspitze und die Bodenplatte des Hütchens, worauf die Nadel ruht, von rechter Beschaffenheit seien;
5) ob die Nadel die gehörige Empfindlichkeit habe.

Prüfung ad 1. Man drehe die Büchse der Boussole vorsichtig herum und sehe zu, ob die Nadel dabei stets ihre Richtung beibehält, oder ob sie zuweilen der Büchse folgt und sich dann plötzlich losreißt und zurückeilt. Im letztern Falle wäre das Messing nicht eisenfrei und es müßte die Büchse gegen eine andere von eisenfreiem Messing oder reinem Kupfer vertauscht werden. Man könnte zwar dadurch, daß man an geeignetem Orte eine kleine Eisenmasse anbrächte, den Einfluß ausgleichen; doch dürfte es schwer fallen, durch dieses Mittel den Zweck vollständig zu erreichen.

Prüfung ad 2. Es stelle pp' (Fig. 216) die Bodenplatte des Kompasses, Ax die Achse des Centralzapfens vor, Ay sei senkrecht zu pp', während Ax mit Ay den Winkel $xAy = \varphi$ bildet, wo dann $pAx = 90° - \varphi$ ist. Der Winkel φ bezeichnet also die Größe des Fehlers in der Lage der Zapfenachse Ax, oder der Platte pp'. Dreht man nun pp' um Ax herum, so daß die Drehung 180° beträgt, so kommt pp' in die Lage $\pi\pi'$ zu liegen, und es wird

Fig. 216.

$$\text{Winkel } pAx = \pi'Ax = 90° - \varphi;$$
$$\pi Ax = p'Ax = 90° + \varphi;$$

also ist: $pA\pi = \psi = \pi Ax - pAx = (90° + \varphi) - (90° - \varphi) = 2\varphi$. Ist daher die Bodenplatte der Boussole nicht rechtwinkelig zum Centralzapfen, und man dreht den horizontal gestellten Kompaß um 180° herum, so macht

er mit dem Horizonte einen Neigungswinkel, der doppelt so groß ist als die Abweichung der Zapfenachse von der Verticalen. Man hat also blos die Büchse des Kompasses mittels einer Röhrenlibelle, an welcher aus dem Ausschlage der Neigungswinkel gefunden werden kann, horizontal zu stellen, die Büchse um 180° zu drehen, so gibt der Ausschlag der Libelle den doppelten Abweichungswinkel des Zapfens von der Senkrechten. Natürlich liegt der stumpfe Winkel $\pi A x$ auf der Seite des Ausschlags. Eine Verbesserung dieses Fehlers erreicht man dadurch, daß man an der geeigneten Stelle kleine Pergament- oder Lederscheibchen um die Spindeln der Schräubchen s legt, welche der Kompaßplatte p eine etwas veränderte Lage zu der Unterplatte des Fußes geben. Ist die Boussole in Bezug auf diesen Fehler der Achse einmal richtig befunden oder berichtigt worden, so kann man annehmen, daß sie stets richtig bleibe.

Prüfung ad 3. Man bringe die Büchse mittels einer daraufgesetzten Dosenlibelle in eine horizontale Lage; schwebt dann die Nadel beiderseits genau in der Ebene des Gradrings, so ist sie richtig aufgehängt; steht die eine Seite der Nadel höher, die andere tiefer als der Gradring, so muß man die letztere Seite der Nadel auf ihrer untern Seite durch etwas Wachs beschweren.

Prüfung ad 4. Man stelle die Boussole ruhig hin, lese den Grad ab, bei welchem die Nadel stehen bleibt, bringe dann die Nadel durch ein ihr genähertes Stück Eisen in Bewegung, entferne das Eisen wieder, und sehe zu, ob die Nadel wieder bei demselben Grade in Ruhe kommt, wie das erste Mal. Ist dies nicht vollkommen der Fall, so muß man die Spitze in die richtige Form schleifen; sollte dies nicht helfen, so muß die Spitze gehärtet werden, weil sie zu weich sein wird. Man schraubt sie zu diesem Zwecke aus ihrer Mutter, faßt sie behutsam beim Schraubenende mit einer Flachzange und erhitzt sie mittels eines Löthrohrs an der Lichtflamme bis zum Rothglühen, worauf man sie schnell im Talg des Lichtes selbst ablöscht und mit feinem Schmirgelpapier abreibt und wieder einschraubt. In der Regel wird dies helfen; sonst muß der Fehler an der Steinplatte im Hütchen liegen, und es kann dann nur der Mechanikus ihm abhelfen, da die Platte herausgenommen und nachgeschliffen werden muß.

Prüfung ad 5. Man visire ein fernes Object an, drehe das Instrument etwas herum, damit die Nadel genöthigt werde, ihre Ruhelage zu verlassen, dann richte man das Diopter wieder auf dasselbe Object und sehe zu, ob die Nadel beidemal dieselbe Abweichung gebe. Ein Mangel an Empfindlichkeit müßte wie bei 4 beseitigt werden.

§. 197. Die Fig. 217 zeigt eine Boussole aus der Werkstatt der Herren Breithaupt und Sohn. Auf einem dreifüßigen Gestell, ähnlich dem des Meßtisches, dessen Kopfplatte pp in der Mitte durchbohrt ist, steht der Fuß

des Instruments auf drei Stellschrauben s. Mit dem Fuße ist die Büchse B verbunden, welche von oben nach unten konisch durchbohrt ist, zur Aufnahme eines ebenso geformten Zapfens; der hohle und der massive Konus sind bis zum genauen Passen in einander ausgeschliffen, so daß sich der Zapfen mit sanfter Bewegung in der Büchse drehen läßt. Durch die Wandung der Büchse ist die Druckschraube S geführt, welche die grobe Bewegung des Zapfens hemmt, wenn sie angezogen wird. Dann kann aber noch eine feine Bewegung mittels der Mikrometerschraube W W bewirkt werden, indem nämlich das Lager c dieser Schraube mit der Büchse B, die Mutter m dagegen mit dem Centralzapfen in Verbindung steht. Der Zapfen geht durch die Platte p p des Untergestelles durch und wird dort durch eine Spiralfeder festgehalten. Die Träger T T sind mit dem Centralzapfen fest verbunden und nehmen die Achse x x des Fernrohrs F F auf. Um diese Achse dreht sich das Rohr in der Verticalebene; es wird durch die aus der Figur erkenntliche Vorrichtung b in seinen Lagern festgehalten. Löst man die Schließen b auf beiden Seiten, so kann das Fernrohr herausgenommen und umgelegt werden. v, v sind zwei Visire, um den Gegenstand zuerst mit freiem Auge anzuvisiren. Oben auf den Trägern T T ruht die Boussole L L; die Nadel ist 5 Zoll lang, das Hütchen von Karneol, der Ring ist in $1/3$ Grade getheilt. D ist eine Dosenlibelle zur Horizontalstellung, a die Arretirung der Nadel.

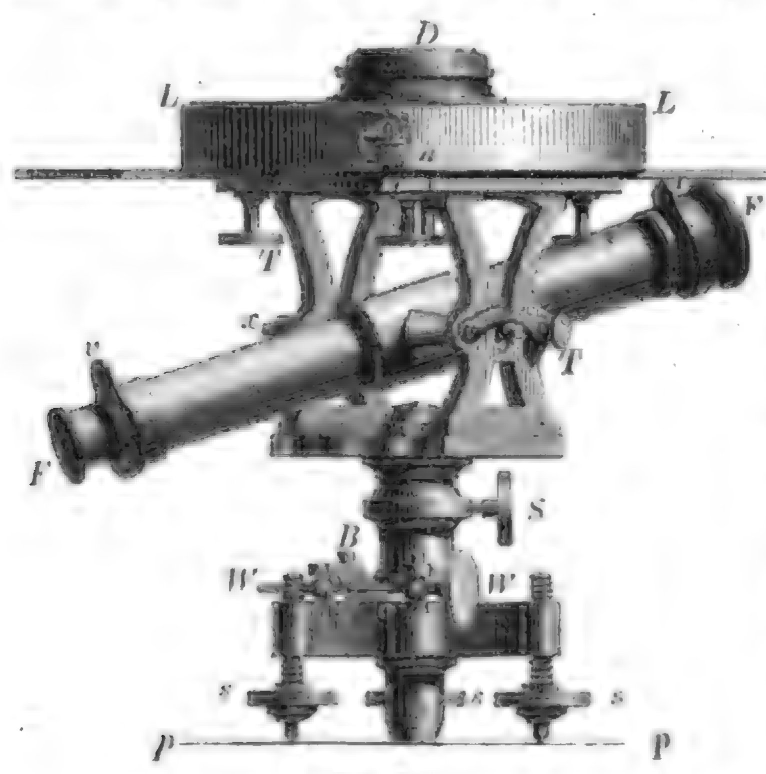


Fig. 217.

Aus derselben Werkstatt ist auch die in Fig. 218 dargestellte Boussole hervorgegangen. Bei dieser ist das Fernrohr F F mit einer Röhrenlibelle b b versehen und zum Durchschlagen eingerichtet; die Boussole B befindet sich seitwärts unterhalb des Fernrohrs; die Nadel hat, wie beim vorigen Instrumente, eine Länge von 5 Zoll. v v ist ein an der Achse des Fernrohrs sitzender Verticalkreis, der in $1/2$ Grade getheilt und mit einem Nonius, der einzelne Minuten angibt, versehen ist. Horizontal- und Verticalbewegung haben Mikrometerschrauben zur feinen Bewegung. Das Uebrige ist mit der Einrichtung der zuletzt beschriebenen Boussole übereinstimmend und das Instru-

ment dient zugleich zum Messen horizontaler und verticaler Winkel, sowie selbst auch zum Nivelliren.

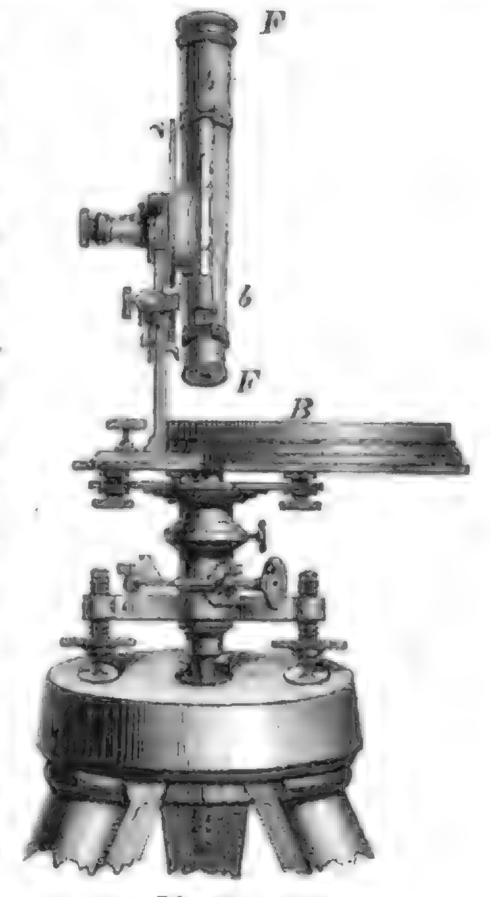


Fig. 218.

Prüfung und Berichtigung dieser Boussolen ist leicht. Man hat bei der Aufstellung nach der Dosenlibelle zu bestimmen, ob die Boussole horizontal stehe. Findet eine Abweichung statt, so wird sie durch die Stellschrauben des Dreifußes berichtigt. — Um dann zu prüfen, ob die Boussole rechtwinkelig zur Drehungsachse stehe, drehe man die Boussole um 180° auf ihrer Drehungsachse herum; zeigt dann die Libelle eine Abweichung an, so wird diese halb durch die Justirschrauben der Libelle und halb durch die Stellschrauben des Dreifußes ausgeglichen. Endlich ist noch zu prüfen, ob die optische Achse des Fernrohrs senkrecht zur Drehachse desselben stehe; da wir aber beim Theodoliten ausführlicher hierüber handeln müssen und diese Prüfung bei der Boussole gerade ebenso geführt werden kann wie dort, so mag hiermit blos darauf verwiesen sein.

§. 198. Soll mit der Boussole ein im Felde bezeichneter Horizontalwinkel ACB (Fig. 219) gemessen werden, so stelle man das Instrument so über C auf, daß der Stift der Nadel, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Achse des Centralzapfens in das durch C gehende Loth fällt, was man durch ein Senkloth leicht bewirken kann. Man gebe dann der Büchse eine horizontale Stellung, indem man sie so lange verändert, bis die Nadel in der Ebene des Gradringes schwingt. Nun stelle man das Diopter oder Fadenkreuz auf den links liegenden Schenkel CA des Winkels ACB und lese am Nordpol der Nadel die Gradzahl ab; sie heiße α; dann mache man auch eine Ablesung am Südpole; diese sei α'. Nun drehe man die Visirlinie in die Richtung des rechts liegenden Schenkels CB und mache am Nord- und Südpole die Ablesungen β und β'. Ist der Stift der Nadel das richtige Centrum des Gradbogens, so werden die Ablesungen am Südpole um 180° von denen am Nordpole verschieden sein, also $\alpha' = \alpha + 180°$ und $\beta' = \beta + 180°$. Liegt aber der Mittelpunkt des Gradbogens nicht im Stifte, ist also die Nadel kein Durchmesser, sondern eine Sehne des getheilten Kreises, so wird $\alpha' \gtrless \alpha + 180°$ und $\beta' \gtrless \beta + 180°$ sein. Man sagt dann: die Nadel sei nicht centrisch, und der senkrechte Abstand der Nadel vom Centrum des Kreises heißt die Excentricität der Nadel.

Soll nun aus den Ablesungen α, β, oder α', β' die Größe des Winkels ACB berechnet werden, so muß man zwei Fälle unterscheiden:

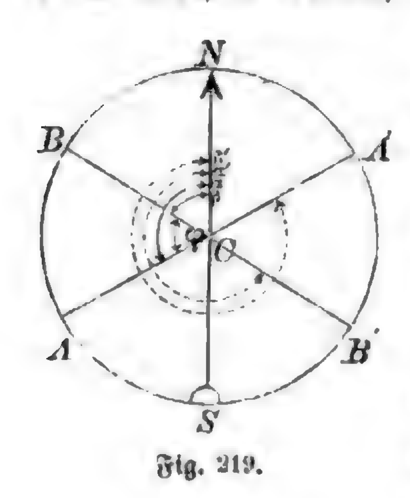


Fig. 219.

1) beide Schenkel des zu messenden Winkels ACB liegen auf derselben Seite der Nadel, übrigens links oder rechts von ihr, wie ACB oder A'CB';

2) von den Schenkeln des Winkels ACB liegt der eine links, der andere rechts von der Nadel, wie BCA' oder ACB'.

Erster Fall. Ist der gesuchte Winkel φ, so ist:
$\varphi = ACB = ACN - BCN = \alpha - \beta$; oder
$\varphi = A'CB = \overline{A'CN} - \overline{B'CN} = \alpha - \beta$.
Und nimmt man die Ablesungen am Südpole, so ist

$$\varphi = (\alpha + 180^\circ) - (\beta + 180^\circ) = \alpha - \beta,$$

wenn die Nadel centrisch ist.

Zweiter Fall. Hier ist für den Winkel BCA' und die Ablesungen am Nordpole:

$$\varphi = BCN + NCA'$$
$$BCN = \alpha$$
$$NCA' = 360^\circ - \overline{A'CN} = 360^\circ - \beta.$$
$$\varphi = \alpha + (360^\circ - \beta) = 360^\circ + (\alpha - \beta).$$

Für den Winkel ACB' hat man:

$$\varphi = ACS + B'CS$$
$$B'CS = \overline{B'CN} - 180^\circ = \alpha - 180^\circ$$
$$ACS = 180^\circ - ACN = 180^\circ - \beta.$$
$$\varphi = (180^\circ - \beta) + (\alpha - 180^\circ) = \alpha - \beta,$$

weil, wenn der hohle Winkel ACB' gemessen werden soll, B' das linke Object ist, für welches die Ablesung α, A das rechte Object, für welches die Ablesung β gilt.

Sollte der erhabene Winkel $\overline{ACB'}$ gemessen werden, so hätte man:

$$\varphi = ACN + NCB' = \alpha + (360^\circ - \beta) = 360^\circ + (\alpha - \beta).$$

Um hier nicht noch verschiedene Fälle zu unterscheiden, wird man wohl thun, statt ACB' lieber $\overline{ACB'}$ zu bestimmen und jenen aus diesem durch die Formel

$$ACB' = 360^\circ - \overline{ACB'}$$

zu berechnen; dann bleiben nur die beiden Fälle zu unterscheiden, die oben genannt und hier näher geprüft worden. Der erste Fall unterscheidet sich aber vom zweiten dadurch, daß dort die Ablesung α vom linken Schenkel größer ist als die am rechten, dagegen im zweiten die Ablesung am linken Schenkel kleiner ist als die am rechten. Diese Betrachtungen führen dann zu der Regel: die Größe des durch die Boussole zu messenden Winkels wird

Digitized by Google

gefunden, wenn man von der ersten Ablesung (am linken Schenkel) die zweite Ablesung (am rechten Schenkel) subtrahirt und, im Falle jene kleiner ist als diese, noch 360° zum Resultate addirt.

Hätte die Nadel Excentricität, wie z. B. $N'S'$ (Fig. 220), wo D den Stift der Nadel, dagegen C den wahren Mittelpunkt des Kreises bedeutet, so gäbe sie für den Punkt A den Winkel ACN' statt ACN; die Abweichung vom magnetischen Meridian wäre also um den Winkel $NCN' = \psi$ zu groß, oder $\alpha' = \alpha + \psi$; und für den Punkt B erhielte man $\beta' = \beta + \psi$. Da nun ACB oder $\varphi = \alpha - \beta$, oder $= 360° + (\alpha - \beta)$, so heben sich die ψ wieder fort und man erhält den Winkel auch ungeachtet der Excentricität der Nadel doch richtig.

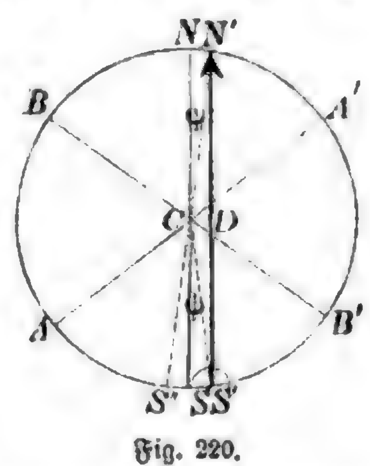


Fig. 220.

Will man übrigens doch die Excentricität der Nadel bestimmen, so geschieht dies leicht mittels der doppelten Ablesungen am Nord- und Südpol. Denn für den Punkt A wird die eine Ablesung $ACN' = \alpha$, die andere $\overline{ACS'} = \alpha'$ sein, und, wenn die Excentricität CD den Winkel $NCN' = \psi$ macht, wo dann $S'CS'' = 2\,\psi$ ist, so ist:

$$\alpha' = (\alpha + 180°) - 2\,\psi,$$

$$\psi = \frac{180° - (\alpha' - \alpha)}{2}.$$

Die Excentricität wird also gefunden, wenn man den Unterschied der Ablesungen am Nord- und Südpol von 180° subtrahirt und den Rest durch 2 dividirt.

C. Instrumente zur Bestimmung der Winkel nach Gradmaß.

I. Der Quadrant.

§. 199. Der **Quadrant** dient zwar nur zum Messen von Verticalwinkeln und wird in geodätischen Werken selten beschrieben, dahingegen er in astronomischen Schriften zur Bestimmung der Zenithdistanzen viel mehr Berücksichtigung findet. Da indeß die Höhenbestimmung doch einmal auch Zweck der Geodäsie ist und der Quadrant wegen seines einfachen Baues ein vorzügliches Mittel zu diesem Zwecke ist, so wollen wir ihm hier volle Berücksichtigung zu Theil werden lassen.

Auf einem festen dreifüßigen Stativ (Fig. 221), das auf drei Stellschrauben c, c', c'' ruht, steht ein verticaler Ständer AB, der einen ebenfalls verticalen Viertelskreis oder Quadranten DEF trägt, dessen Limbus in $^1/_4$

Grade getheilt ist. Um den Mittelpunkt o dieses Kreisbogens dreht sich ein Fernrohr GH mit Fadenkreuz; mit dem Fernrohr ist ein Nonius ab verbunden, der auf einen Arm aufgetragen ist, welcher sich mit dem Fernrohr zugleich über den Limbus fortbewegt, zugleich aber auch mit einem hinter dem Fernrohr befindlichen Kugelgewinde in Verbindung steht; de ist die Klemme, fg die Mikrometerschraube. Auf dem Nonius sind 29 Viertelgrade in 30 gleiche Theile getheilt, so daß man also halbe Minuten ablesen kann. Da bei großen Höhenwinkeln, oder kleinen Zenithdistanzen, wo das Fernrohr fast in die verticale Lage kommt, die Beobachtung in der Richtung der Achse des Fernrohrs unbequem, ja oft unmöglich werden würde, so wird das letzte Bild des gesehenen Objects durch einen unter 45° gegen die Achse des Rohrs gestellten ebenen Spiegel oder durch ein rechtwinkeliges Prisma vermittels der vollkommenen Reflexion nach der Seitenwand des Rohrs geworfen und kann da durch die Oeffnung h beobachtet werden. Das Loth pq dient zur Richtigstellung des Instruments und wird bei Beobachtungen im Freien in ein Glas Wasser gesenkt, das man am Limbus bei F befestigen kann.

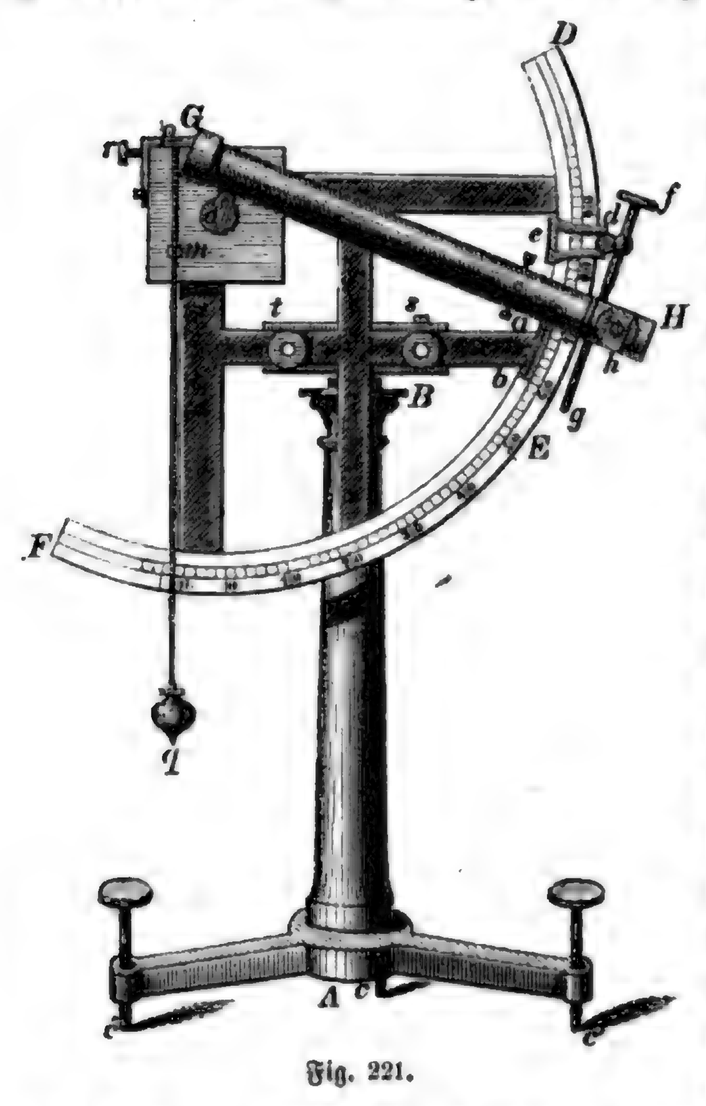


Fig. 221.

§. 200. Um einen Quadranten zu justiren, d. h. zur Winkelmessung aufzustellen, setze man ihn mit den drei Stellschrauben c, c′, c″ auf ein festes Stativ, drehe die Ebene des Quadranten so, daß sie mit zwei der Stellschrauben, z. B. mit c′, c″ parallel ist, hänge das Loth pq an, und sehe zu, ob der Faden des Lothes auf den Punkt n falle, der zu diesem Zwecke auf dem Limbus nahe beim Nullpunkte der Theilung gezeichnet ist. Durch Heben der einen und Senken der andern von den beiden Fußschrauben c′, c″ gelangt man bald dahin, den Faden über den bezeichneten Punkt zu bringen. Nahe an der Achse des Quadranten ist noch ein Punkt m auf einem drehbaren Stifte markirt; fällt der Faden auf den untern Punkt n, trifft aber nicht diesen letzten Punkt m, so drehe man den Stift so weit herum, bis dieser

Punkt ebenfalls in die Linie des Fadens fällt. Nun drehe man den Quadranten auf seinem Ständer um 180° herum; weicht dann das Loth von beiden Marken m, n ab, so verbessere man den Fehler zur einen Hälfte mittels der Stellschrauben c′, c″, zur andern Hälfte dadurch, daß man die Feder p, über welche der Faden des Lothes hängt, der Quadrantenebene nähert oder davon entfernt, wozu eine Correctionsschraube r dient; nach welcher Seite hin das Loth zu bringen ist, sieht man aus der Abweichung des Fadens von den Punkten m und n. Man drehe dann den Quadranten wieder um 180° zurück; trifft das Loth die Marken nicht mehr, so corrigire man wie zuvor, zur Hälfte an den Fußschrauben c′, c″, zur Hälfte an der Correctionsschraube r. Sollten die beiden Marken nicht mehr stimmen, so drehe man die obere, so viel als nöthig ist, herum. Dann drehe man den Quadranten um 90°, so daß seine Ebene nach der Richtung der dritten Fußschraube c läuft, oder zu der die beiden ersten Schrauben c′, c″ verbindenden Geraden senkrecht steht, und hebe oder senke die dritte Schraube c so lange, bis das Loth wieder über beide Marken m und n hängt. Aus dieser Stellung drehe man den Quadranten um 180°; trifft dann das Loth nicht auf die Marken, so corrigire man den Fehler mittels der Schraube s, welche an einem der Querstäbe des Quadranten angebracht ist, und vermöge welcher der Quadrant um einen andern Punkt t in gleicher Höhe gedreht werden kann. Falls aber das Loth, nach der letzten Drehung des Quadranten von beiden Marken nach derselben Seite hin abweicht, muß die Stellung durch die Correctionsschraube r verbessert werden. Ist dies erreicht, so wird man den Quadranten ganz herumdrehen können, ohne daß irgendwo ein Fehler sich zeigte.

Hängt das Loth zu weit von der Ebene des Quadranten ab, oder zu dicht an derselben an, sodaß es sich gegen die Fläche anlehnt, so muß dieser Fehler durch die zwei Schrauben hinter dem Querstabe st oben auf dem Ständer, woran der Quadrant befestigt ist, verbessert werden, indem man die eine löst und die andere etwas fester schraubt.

Hat man den Quadranten so in allen Beziehungen richtig gestellt und dem Fernrohr eine genau horizontale Lage gegeben, so müßte der Index des Nonius auf 0° oder 90° zeigen, je nachdem die Theilung von oben nach unten oder umgekehrt läuft.*) Dies ist auch selbst bei sonst richtiger Stellung des Quadranten nicht immer der Fall. Der Winkel, um welchen der Index bei horizontaler Lage des Fernrohrs von 0° oder 90° abweicht, macht, wie schon bei frühern Instrumenten erwähnt, den Collimationsfehler des Quadranten aus. Gibt der Nonius eine Höhe über der Horizontalen an, so muß

*) Diejenigen Quadranten, welche zur Bestimmung der Zenithdistanzen dienen sollen, gehören in der Regel dieser letztern Klasse an.

diese von allen mit dem Quadranten gemessenen Höhen abgezogen werden; gibt dagegen der Nonius eine Tiefe unter der Horizontalen an, so muß solche zu allen Beobachtungen addirt werden.

Man findet den Collimationsfehler des Quadranten durch folgendes Verfahren. Man messe mit dem Quadranten die Höhe eines entfernten, nahe am Horizonte befindlichen Gegenstandes E (Fig. 222), dann kehre man den Quadranten um, d. h. man löse die Schraubenmuttern auf der Vorderfläche des Quadranten, unterhalb s, t (Fig. 221), ziehe den Quadranten vorsichtig an sich, indem man zugleich das Stativ mit beiden Daumen von sich abdrückt; hat man so den Quadranten vom Stativ getrennt, so wende man ihn so um, daß man zwar immer seine Vorderfläche gegen sich gekehrt hält, daß aber das Loch s im Querstabe des Quadranten vor den Zapfen t der am Stativ festsitzenden Rückplatte, und das Loch t vor den Zapfen s zu stehen kommt, der Quadrant also die Lage bca (Fig. 222) annimmt, stecke den Quadranten in

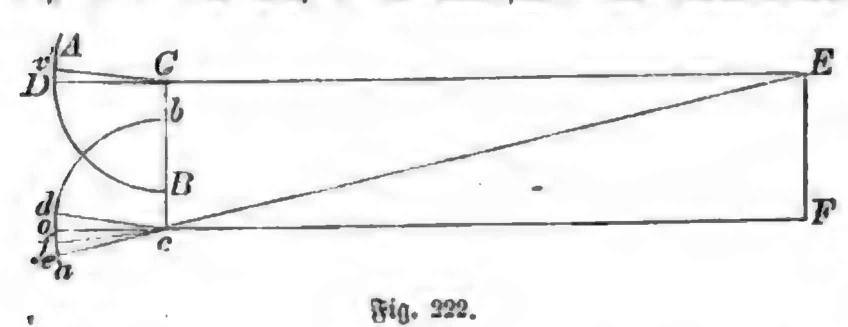


Fig. 222.

dieser Lage auf die Zapfen s, t auf und schraube die Muttern vor. Nun richte man den Quadranten in die Verticalebene des Gegenstandes E, befestige das Loth mittels einer zu diesem Zwecke dabei befindlichen Klemme am Limbus fest (der gewöhnliche Aufhängepunkt ist jetzt nach unten gekehrt), und bringe das Stativ und die Fläche des Quadranten mittels des Lothes in verticale Lage. Dann messe man wieder die Höhe des Gegenstandes E. Der Index des Nonius gibt diese Höhe auf der Außenseite der Theilung, über 0° oder 90° hinaus in e an. Zieht man nun durch den Mittelpunkt c des Quadranten $cf \nparallel CE$, und bezeichnet d in der jetzigen Lage des Quadranten den Punkt D der vorigen Lage, d. h. den Punkt des Limbus, welchen der Index des Nonius bei der ersten Messung einnahm, ist ferner Cc mittels des Lothes senkrecht gestellt, und v'C senkrecht zu Cc, so ist:

$$\text{Winkel } Ccf = cCE$$
also $$\text{〃} \quad v'CD = ocf = ocd$$
$$\text{〃} \quad fce = EcF = CEc.$$

Da der Punkt E sehr entfernt liegt und nur eine geringe Höhe über dem Horizonte hat, so ist Winkel CEc nur klein, also:

$$CEc = \frac{Cc}{CE} \cdot \omega \text{ Secunden},$$

wo $\omega = 206264{,}8$ ist. Winkel $oce - CEc = oce - fce = ocf$. Gibt die Rechnung Winkel $ocf = ocd = v'CD$, so ist der Collimations-

fehler des Quadranten gleich Null. Ist aber Winkel $ocd > ocf$, so ist der Collimationsfehler $= \frac{ocd - ocf}{2}$, und dieser muß von allen gemessenen Höhen abgezogen werden. Ist dagegen $ocd < ocf$, so muß man $\frac{ocf - ocd}{2}$ zu allen gemessenen Höhen addiren.

Ist $\omega \cdot Cc < CE$, so ist Winkel $CEc < 1''$ und der richtige Nullpunkt der Theilung liegt in der Mitte zwischen d und e.

Stellt man in derselben Verticalen zwei Signale auf, E und F, so daß $EF = Cc$, und mißt die Höhe von E in der gewöhnlichen, die von F in der umgewendeten Lage des Quadranten, so ist das Bestimmen des Winkels CEc ganz überflüssig. Ich bediene mich zu Höhenbestimmungen eines Quadranten von Hedley, bei welchem $Cc = 250$ Millimeter ist; soll man also die Linien CE und cE als parallel ansehen können, ohne einen Fehler von einer Secunde zu begehen, so müßte:

$$CE > 250 \cdot 206264{,}8 \text{ Millimeter},$$

oder $CE > 51566$ Meter, also über 6 Meilen betragen. Es wurden also bei diesen Messungen zwei Signale E und F vertical unter einander, das eine 250^{mm} unter dem andern angebracht. Das Object E gab eine Höhe von 26′, F dagegen — 6′ 30″, folglich war der Collimationsfehler

$$k = \frac{0^\circ\ 26' + 0^\circ\ 6'\ 30''}{2} = 0^\circ\ 16'\ 15'',$$

welcher von allen mit diesem Quadranten gemessenen Höhen subtrahirt werden muß.

§. 201. Bei jedem richtig gebauten Quadranten muß sich die Alhidade, also hier das Fernrohr, um den Mittelpunkt drehen, um welchen der Kreisbogen des Limbus beschrieben ist. Die Abweichung des Drehpunktes der Alhidade vom Mittelpunkte des Bogens ist die Excentricität des Quadranten.

Es sei, um die etwa vorhandene Excentricität zu finden, c (Fig. 223) der Mittelpunkt des Bogens om, C der Drehpunkt der Alhidade, o der Nullpunkt der Kreistheilung. Bei einer Messung habe man die Alhidade aus der Richtung $C\wp$ in die Lage Cm gebracht, so ist der wahre Winkel oCm, während auf dem Limbus der Bogen ocm abgelesen wird. Nun ist:

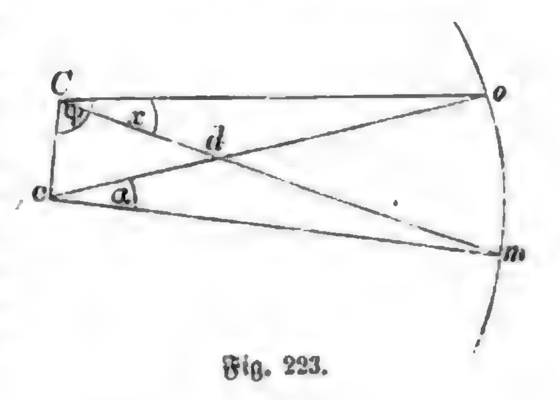


Fig. 223.

$$\text{W. } Cdc = Coc + oCm = Cmc + ocm$$

$$1) \quad \text{W. } oCm = Cmc + ocm - Coc.$$

Im Dreieck Coc ist aber:

$$2) \quad Cc : co = \sin Coc : \sin Cco,$$

und im Dreieck Cmc :

3) $Cc : co = \sin Cmc : \sin cCm$
$= \sin Cmc : \sin [cCo - oCm]$.

Wegen der Kleinheit der Winkel Coc und Cmc kann man statt ihrer Sinus die Bogen selbst setzen. Beachtet man dann noch, daß das Verhältniß $\frac{Cc}{co}$ der letzten Proportion das Verhältniß der Excentricität zum Radius des Quadranten, also die Größe der Excentricität für den Radius 1 ausdrückt, und bezeichnet diese Größe durch e, W. ocm durch α, W. oCm durch x und oCc durch ψ, so hat man, wenn man in (1) die Werthe von cmC und coC aus (3) und (2) setzt:

$$x = \alpha + \text{arc} \cdot \sin [e \cdot \sin (\psi - x)] - \text{arc} \cdot \sin (e \cdot \sin \psi)$$
$$= \alpha + e \cdot [\sin (\psi - x) - \sin \psi] + \frac{e^3}{6} [\sin (\psi - x)^3 - \sin \psi^3] + \text{rc. } (\S. 26).$$

Die höhern Potenzen können hier, weil e doch nur sehr klein sein wird, füglich vernachlässigt werden; dann hat man:

$$x = \alpha + e \cdot [\sin (\psi - x) - \sin \psi],$$

oder, weil x und α nur wenig von einander verschieden sein werden,

$$x = \alpha + e [\sin (\psi - \alpha) - \sin \psi].$$

Wegen der Excentricität erhält man mit dem Quadranten den Winkel α statt x, folglich muß der abgelesene Winkel um

$$y = x - \alpha = e [\sin (\psi - \alpha) - \sin \psi]$$

verbessert werden.

Um aber die Größe e zu bestimmen, messe man an drei Stellen der Theilung die Abstände a, b, c der Noniusplatte von demselben auf dem Limbus gezogenen Kreisbogen und lese die diesen drei Stellen zugehörigen Gradzahlen α, β, γ ab. Es ist nämlich im Dreiecke Ccm:

$$cm^2 = Cm^2 + Cc^2 - 2 Cm \cdot Cc \cdot \cos cCm,$$
$$cm^2 - Cm^2 = Cc (Cc - 2 \cdot Cm \cdot \cos cCm),$$

also $$cm - Cm = \frac{Cc (Cc - 2 Cm \cdot \cos cCm}{cm + Cm}.$$

Nun ist $cCm = \psi - x$, oder beinahe $= \psi - \alpha$, und es kann auch cm = Cm gesetzt werden, also auch

$$\frac{Cc}{co} = \frac{Cc}{cm} = \frac{Cc}{Cm} = e;$$

setzt man diese Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$cm - Cm = \frac{Cm \cdot e [e - 2 \cdot \cos (\psi - \alpha)]}{2}$$
$$\frac{cm - Cm}{Cm} = \frac{e}{2} [e - 2 \cdot \cos (\psi - \alpha)].$$

Für die gemessenen Werthe hat man also:

$$a - b = \frac{e}{2}\,[e - 2\cos(\psi - \alpha)] - \frac{e}{2}\,[e - \cos(\psi - \beta)],$$

oder $\quad 1)\ a - b = e\,[\cos(\psi - \alpha) - \cos(\psi - \beta)].$

Ebenso ist dann:

$$2)\ a - c = e\,[\cos(\psi - \alpha) - \cos(\psi - \gamma)].$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{a-b}{a-c} = \frac{\cos(\psi-\alpha) - \cos(\psi-\beta)}{\cos(\psi-\alpha) - \cos(\psi-\gamma)} = \frac{\sin\left(\psi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\left(\psi - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

Man setze auf einen Augenblick $\frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma,\ \frac{\alpha+\gamma}{2} = \sigma',$

$\frac{\beta-\alpha}{2} = \delta,\ \frac{\gamma-\alpha}{2} = \delta',$ so ist:

$$\frac{a-b}{a-c} = \frac{\sin(\psi-\sigma) \cdot \sin\delta}{\sin(\psi-\sigma') \cdot \sin\delta'}.$$

$$\frac{(a-b)\cdot\sin\delta'}{(a-c)\cdot\sin\delta} = \frac{\sin\psi\cdot\cos\sigma - \cos\psi\cdot\sin\sigma}{\sin\psi\cdot\cos\sigma' - \cos\psi\cdot\sin\sigma'} = \frac{tg\,\psi\cdot\cos\sigma - \sin\sigma}{tg\,\psi\cdot\cos\sigma' - \sin\sigma'}.$$

$$tg\,\psi = \frac{(a-b)\ \sin\delta'\ \sin\sigma' - (a-c)\cdot\sin\delta\ \sin\sigma}{(a-b)\ \sin\delta'\ \cos\sigma' - (a-c)\ \sin\delta\ \cos\sigma}$$

$$= \frac{(a-b)\,[\cos(\sigma'-\delta') - \cos(\sigma'+\delta')] - (a-c)\,[\cos(\sigma-\delta) - \cos(\sigma+\delta)]}{(a-b)\,[\sin(\sigma'+\delta') - \sin(\sigma'-\delta')] - (a-c)\,[\sin(\sigma+\delta) - \sin(\sigma-\delta)]}.$$

Setzt man für σ, σ', δ, δ' wieder ihre Werthe und reducirt, so kommt:

$$tg\,\psi = \frac{(a-b)\ \cos\gamma - (a-c)\ \cos\beta + (b-c)\ \cos\alpha}{(a-b)\ \sin\gamma - (a-c)\ \sin\beta + (b-c)\ \sin\alpha}.$$

Setzt man den so zu bestimmenden Werth von ψ in die Gleichung (1) oder (2), so läßt sich daraus e bestimmen.

II. Das Astrolabium.

§. 202. Das **Astrolabium** besteht aus einem getheilten Kreise ABCD (Fig. 224), um dessen Mittelpunkt E sich, in einem genau centrirten cylindrischen Zapfen, eine Alhidade AC drehen läßt. Die Alhidade läuft über den getheilten Rand, erweitert sich gegen diesen hin bei ab etwas und trägt auf der versilberten Abschrägung ab den Nonius, dessen Inder die Gradzahl der Beobachtung angibt. In A und C, an jedem Ende der Alhidade, ist ein Diopter FG, HC mit Doppelvisur; beide Diopter drehen sich also mit der Alhidade zugleich um den Centralzapfen E und die Visirebene der Diopter geht durch das Centrum. Zur genauern Controle der Ablesung trägt das Ende ab der Alhidade einen Nonius. Außer den beweglichen Diopteru FG,

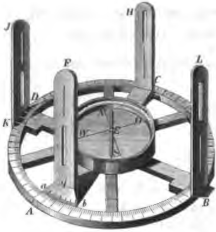


Fig. 224.

HC sind noch zwei feste Diopter JK, LB am Umfange des Kreises angebracht, welche bei den Gradzahlen 0° und 180° der Theilung stehen und sich mit dem Kreise, aber nicht mit der Alhidade drehen. Den Raum in der Mitte nimmt gewöhnlich eine kleine Boussole zum Orientiren ein. Das ganze Instrument ruht auf drei Stellschrauben, womit es auf die Platte eines Dreifußes gesetzt wird, wie wir bei der Boussole schon gesehen haben.

§. 203. Um mit dem Astrolabium einen Horizontalwinkel zu messen, stellt man es im Scheitel des Winkels so auf, daß die verticale Mittelachse des Zapfens mit dem Scheitel in derselben Verticalen liegt, gibt dem Kreise mittels einer berichtigten Libelle eine horizontale Lage, und dreht den Kreis so lange in der Horizontalebene herum, bis die festen Diopter in die Richtung des einen Schenkels des zu messenden Winkels kommen; in dieser Lage wird der Kreis durch eine dazu angebrachte Bremsschraube festgeklemmt und die Alhidade so weit herumgedreht bis die Diopterebene in den zweiten Schenkel des Winkels fällt, worauf am Nonius die Gradzahl des Winkels abgelesen werden kann.

Der zweite Nonius C kann, außer seinem gewöhnlichen Zwecke der doppelten Ablesung, auch dazu dienen, das Astrolabium auf das Vorhandensein einer Excentricität der Alhidade zu prüfen. Liest man nämlich an beiden Nonien ab, so müßte sich dieselbe Gradzahl ergeben; aber wenn der Drehpunkt der Alhidade nicht das Centrum der Theilung ist, so ist auch der Bogen des Limbus nicht das richtige Maß des Winkels. Hat man also durch eine genaue Prüfung die Theilung an sich richtig befunden, so liegt der Fehler ungleicher Ablesungen offenbar an einer vorhandenen Excentricität, die indeß dadurch, daß man das arithmetische Mittel beider Ablesungen nimmt, völlig unschädlich gemacht wird.

Das Astrolabium ist übrigens ein jetzt fast ganz außer Gebrauch gekommenes Werkzeug, da die Theodoliten dasselbe mehr als ersetzen. Zwar hat Herr Ertel in München den Bau desselben wesentlich verbessert; so lange man aber auf das Visiren mit Diooptern beschränkt ist, wird ein guter Theodolit demselben stets vorzuziehen sein.

Digitized by Google

III. Der Theodolit.

§. 204. Der Theodolit dient dazu, sowol Horizontal- als Verticalwinkel zu messen, und es muß derselbe als das wichtigste winkelmessende Werkzeug des Feldmessers angesehen werden. Man unterscheidet zwei Klassen von Theodoliten: einfache und Repetitionstheodoliten. Mit dem einfachen Theodoliten bestimmt man die Größe des zu messenden Winkels schlechtweg durch Ablesung beider Noniusangaben, mit dem Repetitionstheodoliten aber nicht direct den gesuchten Winkel selbst, sondern ein beliebiges Vielfache desselben.

1. Der einfache Theodolit.

§. 205. Wir beziehen unsere Beschreibung dieses Instruments auf die schematische Durchschnittszeichnung Fig. 225. Auf drei Stellschrauben s ruht der starke dreischenkelige Fuß ff, mit welchem die konisch durchbohrte Centralbüchse c in einem Stück gegossen ist. Mit der Büchse fest verbunden ist der äußere Kreis hh; diese Verbindung wird in der Regel durch starke Speichen bewirkt, die an die Büchse angeschraubt sind. Wegen dieser Verbindung wird die Lage dieses Kreises durch die Schrauben s geregelt und schließlich festgestellt. Da der Kreis h beim Gebrauche des Theodoliten stets eine horizontale Lage bekommt, so heißt er auch der Horizontalkreis; wir werden ihn zuweilen schlechthin Kreis nennen. Sein Rand ist in Grade, zuweilen auch in Bruchtheile des Grades getheilt.

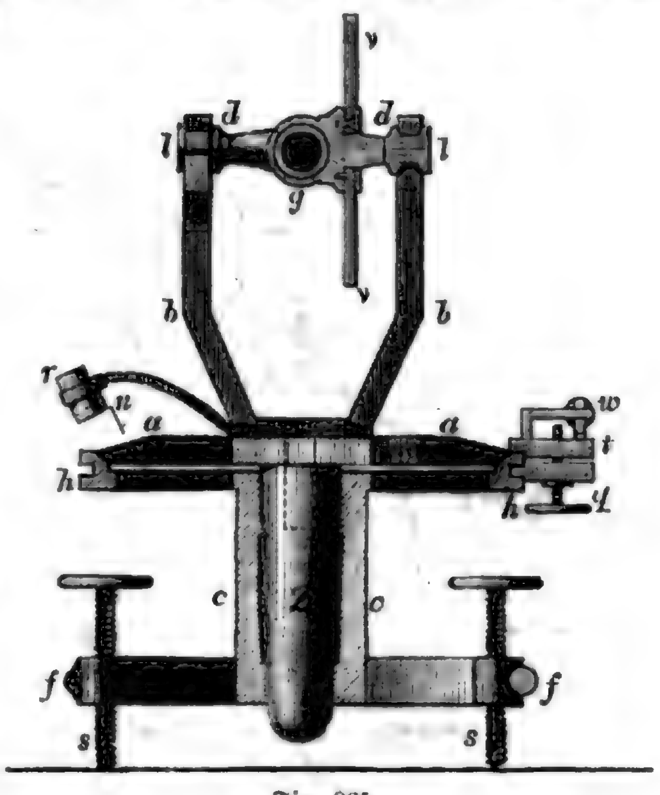


Fig. 225.

In dem verticalen Hohlkegel der Centralbüchse c befindet sich ein Centralzapfen Z, an welchen, ebenfalls durch Speichen, die sich über denen des Kreises h drehen lassen, ein zweiter Kreis a, in einer Ebene mit h, befestigt ist, dazu bestimmt, durch einen oder mehrere auf ihm aufgetragene Nonien die durch eine Messung bestimmten Grade der Limbustheilung des Kreises h anzuzeigen und zur Ablesung genau zu bestimmen. Er hat also denselben Zweck, wie beim Quadranten und Astrolabium die Alhidade, weshalb er auch der Alhidadenkreis, oder blos die Alhidade heißt.

Die Speichen des Alhidadenkreises a tragen in ihrer Mitte einen Ständer bb,

der, je nach der übrigen Form des Instruments, manchmal aus einer einzigen Säule besteht; das andere Mal aus zwei Säulen oder Ständern (Trägern), wie in der Fig. 225 oder 226, welche letztere einen Theodoliten aus der Werkstätte der Herren Breithaupt und Sohn in Kassel vorstellt. Dieser Ständer trägt das Fernrohr g; d d ist in beiden Figuren die horizontale Drehachse, l, l sind die Lager für die Achse d d. Es leuchtet ein, daß eine Drehung der Alhidade in der Horizontalebene eine ebenso große und gleich gerichtete Drehung des Ständers b b, der Drehachse d d und des Fernrohrs g bewirkt. Der Horizontalkreis h mißt also die Azimuthe der Collimationslinien des Fernrohrs. Richtet man also, durch Drehung der Alhidade, die optische Achse des Fernrohrs nach einander auf zwei in der Horizontalebene befindliche Objecte, und liest jedesmal die vom Nonius angezeigte Gradzahl ab, so gibt die Differenz beider Ablesungen die Größe des Horizontalwinkels. Und liegen die Objecte nicht in derselben Horizontalebene, so erhält man dadurch, daß das Fernrohr um seine Achse so weit gedreht wird, als jedes der Objecte erfordert, um die Gesichtslinie in seine Richtung zu bringen, die Horizontalprojection des gesuchten Winkels.

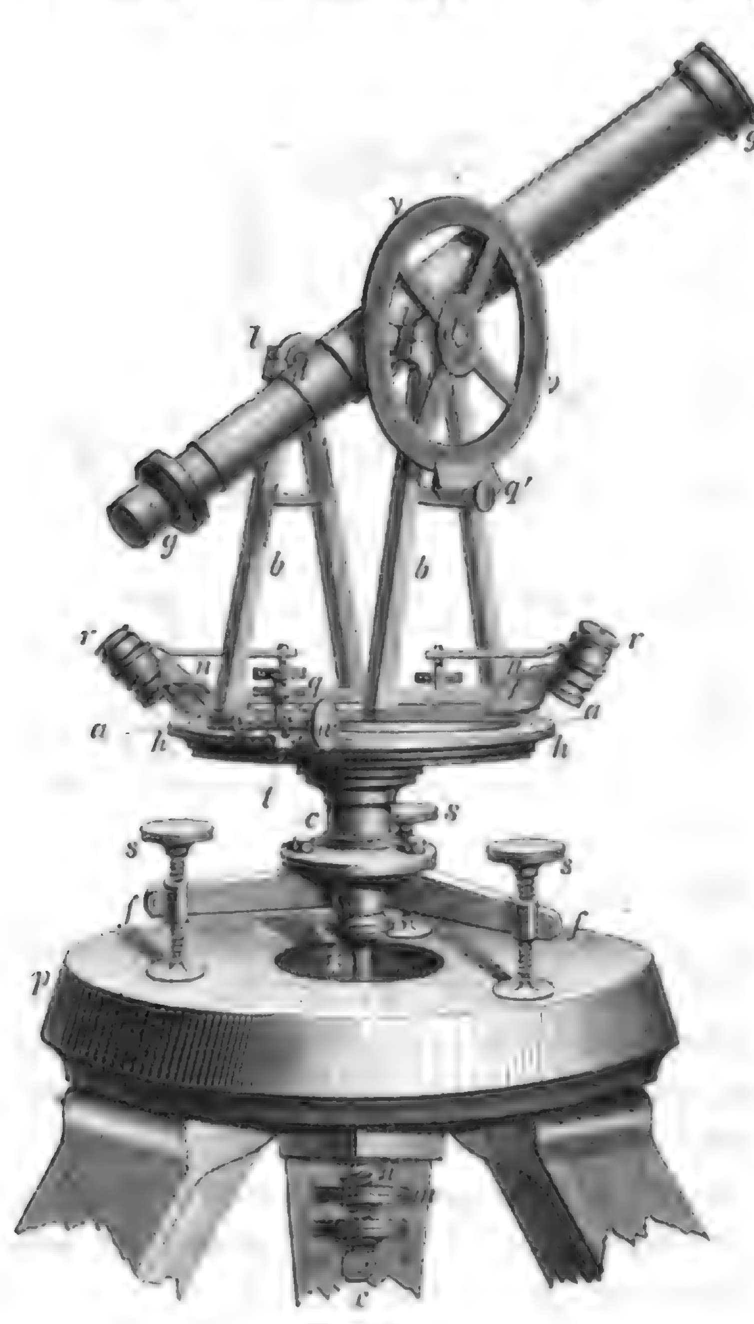


Fig. 226.

Aber eben, weil das Fernrohr sich in der Verticalebene um seine Drehachse d d bewegen läßt, kann man die Collimationslinie auch nach einander auf zwei in derselben Verticalebene, aber verschiedenen Höhen gelegene Objecte richten; um also solchen Verticalwinkel der Gradzahl nach zu bestimmen, bedarf es nur eines genau getheilten Verticalkreises. Ein solcher ist mittels Speichen an der Achse d d angebracht; v v ist sein Durchschnitt mit der Ebene der Zeichnung;

dieser Kreis heißt der **Verticalkreis**. Ist, wie hier vorausgesetzt, der Kreis vv fest mit der Achse dd verbunden, so muß zur Bestimmung der Neigung, welche die Gesichtslinie des Fernrohrs mit irgend einer bestimmten Richtung, z. B. mit der Horizontalen, in ihren verschiedenen Lagen annimmt, ein fester Punkt angenommen werden, an welchem die Grade des Limbus bei der Drehung des Kreises vorbeigehen. Gewöhnlich ist zu diesem Zwecke an einer schicklichen Stelle des Trägers ein Nonius angebracht, an dem der Rand des Kreises vorbeischleift. Manche Theodoliten sind so gebaut, daß der Verticalkreis am Träger festsitzt, dagegen eine Alhidade, oder auch, wie beim Horizontalkreise, ein Alhidadenkreis mit der Drehachse dd fest verbunden ist; im ersten Falle ist am Ende der Alhidade ein Nonius angebracht, im andern trägt der Kreis zwei Nonien, die 180°, oder vier, die 90° von einander abstehen.

§. 206. Die eben gegebene Beschreibung des Theodoliten beabsichtigt, eine deutliche Einsicht in das Wesentliche dieses Instruments zu geben. Im Folgenden wollen wir noch einige Einzelheiten des Baues nachtragen, wobei wir uns zugleich auf die perspectivische Ansicht (Fig. 226) eines einfachen Theodoliten von **Breithaupt** beziehen.

Um dem Theodoliten einen festen Stand zu geben, wird derselbe auf ein dreifüßiges Gestell gesetzt, wovon p die Kopfplatte ist. Diese Platte p ist in der Mitte durchbohrt und an das untere Ende der Centralbüchse c ist ein cylindrischer oder auch etwas konischer Stab k geschraubt, der durch die Kopfplatte p durchgeht. Wollte man ihn nun zur Befestigung des Instruments etwa gegen die untere Fläche der Kopfplatte p festschrauben, so würde dadurch die Verticalstellung mittels der drei Fußschrauben s nicht ohne nachtheilige Spannungen möglich sein; das bloße Aufsetzen des Theodoliten auf die Platte p aber würde ihn zu sehr den Verrückungen durch Berührung aussetzen. Der Stab k wird deshalb unterhalb der Kopfplatte p von einer Spiralfeder u umgeben, welche sich oben gegen eine Unterlagsplatte, unten gegen die Schraubenmutter m stützt. Die Unterlagsplatte befindet sich in einem hohlen Raume unterhalb der Kopfplatte p, läßt den Konus k durch eine Durchbohrung in ihrer Mitte hindurch und kann sammt dem Konus k um den Durchmesser der Durchbohrung der Kopfplatte p in der Horizontalebene verschoben werden, was beim Einstellen des Instruments über einem gegebenen Punkte sehr große Bequemlichkeit gewährt. Je mehr man die Mutter m in die Höhe schraubt, desto festern Stand erhält das Instrument; dennoch bleibt es, wegen der Elasticität der Feder u, noch möglich, es mittels der Schrauben s genau vertical zu stellen. Bei x ist an den Stab k ein Haken befestigt, an welchen zur Einstellung über einem gegebenen Punkte ein Senkloth angehängt werden kann. Rücksichtlich der Form der Stellschrauben s verweisen wir auf §. 132.

Die getheilten Ränder des Horizontal- und Verticalkreises sind von Silber; die Theilungen gehen bis zu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ Graden, und die Nonien gestatten die Ablesung von halben Minuten beim Horizontal-, von ganzen Minuten beim Verticalkreise. Der Horizontalkreis ist mit einem Mikrometerwerk versehen; dahin gehört die Bremsschraube q, durch welche die Alhidade mittels zweier Halterplatten t an den Kreis befestigt wird, so daß keine Bewegung der Alhidade aus freier Hand mehr möglich ist, indem die mit der Alhidade verbundenen Halterplatten den Kreis zwischen sich fassen und, durch die Bremsschraube q angezogen, an ihm festgeklemmt werden; dann gehört dazu die Mikrometerschraube w, welche die feine Bewegung der Alhidade vermittelt; wenn die Halterplatten t festgeklemmt sind, so steht das Lager dieser Schraube mit dem Kreise in fester Verbindung, während ihre Mutter mit der Alhidade verbunden ist. Die Schraube bekommt also blos eine drehende Bewegung, die Mutter mit der Alhidade aber eine vor- oder rückwärtsschreitende. Am Verticalkreise ist blos eine Bremsschraube q′, aber kein Mikrometerwerk; es kann also blos der Kreis an den Nonius festgeklemmt werden, eine feine Bewegung ist nicht möglich.

Der Horizontalkreis hat 5 bis 6 Zoll Durchmesser, sein Rand ist des leichtern Beobachtens wegen gegen den Horizont geneigt und wird vom Alhidadenkreise gedeckt, um ihn vor Staub und Beschädigung zu bewahren; nur an den Stellen, wo die Nonien sind, befinden sich Ausschnitte für diese. Der Alhidadenkreis hat daher dieselbe Neigung wie der Horizontalkreis. Alle Nonien sind mit Lupen r versehen, welche sich über die Theilung schieben lassen, wenn man ablesen will. Bei jedem Nonius ist auch eine in einen Rahmen gefaßte Blendscheibe n, welche das blendende Licht von der Theilung abhält.

Die Drehachse des Fernrohrs ist von Stahl und ruht in Lagern von Messing, die mit Kappen zugedeckt sind. Das Fernrohr ist achromatisch, hat 12 Zoll Länge, 12 Linien Oeffnung des Objectivs und gibt 20malige Vergrößerung. Das Fadenkreuz läßt sich durch die Correctionsschrauben nur seitwärts verschieben, nicht in der Verticalen, denn da das Fernrohr selbst nur in der Verticalebene bewegt wird, die Visirlinie sich aber durch den Kreuzpunkt der Fäden und den optischen Mittelpunkt des Objectivs bestimmt, so ändert eine Abweichung des Kreuzpunktes von der optischen Achse des Rohrs (der Geraden zwischen den optischen Mittelpunkten des Oculars und Objectivs) gar nichts an der Visirlinie, so lange das Rohr nicht um seine optische Achse gedreht wird, wenn die Visirlinie nur nicht aus der durch den optischen Mittelpunkt des Objectivs und auf der Drehachse senkrechten Ebene heraustritt; die seitliche Verschiebung der Kreuzfäden gestattet aber allemal, die Visirlinie in diese Ebene zu bringen. Das Fernrohr läßt sich durchschlagen. Eine Libelle

ist nicht angebracht; man kann aber zwischen den Ständern b b eine Dosenlibelle auf den Alhidadenkreis setzen, um den Kreis horizontal zu stellen.

§. 207. Um mit diesem Theodoliten einen Horizontalwinkel zu messen, stellt man das Stativ so über dem Scheitelpunkte des Winkels auf, daß ein an den Haken x gehängtes Loth genau auf den bezeichneten Punkt fällt, drückt die Füße so in den Erdboden, daß eine leichte Berührung den Stand nicht zu ändern vermag, stellt zugleich den Horizontalkreis so nahe wagerecht, als es nach dem Augenmaße geschehen kann; dann wird die vollständige Horizontalstellung noch mittels der zwischen den Ständern befindlichen Dosenlibelle und der drei Fußschrauben s bewirkt. Spielt die Blase ein, so drehe man die Alhidade um 180° und corrigire erforderlichenfalls durch die Fußschrauben. Bei einigen einfachen Theodoliten steht die Dosenlibelle auf drei verstellbaren Federn; wo dies der Fall, da muß die Abweichung der Blase zur Hälfte an diesen Federn, zur Hälfte an den Fußschrauben verbessert werden. Nun drehe man die Alhidade so, daß das in die Höhe des links liegenden Objects gebrachte Fernrohr mit dem Kreuzpunkte der Fäden genau auf dieses Object fällt; bremse die Alhidade und corrigire durch die Mikrometerschraube. Ist die völlige Coincidenz der Fäden mit dem Objecte erlangt, so lese man alle Nonien ab und schreibe die Ablesungen auf. Nun löse man die Bremsschraube, drehe die Alhidade so, daß die Kreuzfäden das rechts liegende Object decken, ziehe die Bremsschraube an, corrigire mit der Mikrometerschraube und schreibe wieder die Ablesungen an allen Nonien auf, berechne das arithmetische Mittel a aller Ablesungen des ersten Winkelschenkels, ebenso das arithmetische Mittel a' aller Ablesungen am zweiten Winkelschenkel, so drückt die Differenz $a - a'$ die Größe des gemessenen Winkels aus: denn die Theilung des Kreises geht von rechts nach links, d. h. der Richtung eines Uhrzeigers entgegengesetzt; wenn also der Nullpunkt der Theilung nicht zufällig zwischen die beiden Winkelschenkel fällt, so entspricht dem links liegenden Objecte die größere, dem rechts liegenden die kleinere Gradzahl; daher ist denn $a - a'$ eine positive Zahl. In dem Falle aber, daß der Nullpunkt zwischen beide Winkelschenkel fällt, darf man ihn blos um 360° zurückverlegt denken, d. h. zu der dem linken Objecte zugehörigen Gradzahl 360 addiren, so erhält man jedenfalls $a + 360° > a'$.

Zur Prüfung und Berichtigung der so gemachten Messung drehe man die Alhidade aus der Richtung des ersten Objects um 180°, schlage das Fernrohr durch, mache nun beide Messungen nochmals bei dieser Lage des Fernrohrs und nehme aus den Ablesungen vor und nach dem Durchschlagen das arithmetische Mittel.

Will man mit dem Theodoliten einen Höhenwinkel messen, so stelle man das Instrument horizontal über dem Scheitel des Winkels auf, drehe das Fernrohr durch grobe Bewegung in die Ebene des Winkels, ziehe die

Bremsschraube des Alhidadenkreises an, bewege dann das Fernrohr so weit um seine Drehachse, daß der Kreuzpunkt der Fäden das Höhenobject deckt, und corrigire die etwa sich noch vorfindende seitliche Abweichung durch die Mikrometerschraube des Horizontalkreises, corrigire, natürlich aus freier Hand, die sich etwa noch zeigende Abweichung in der Höhe, bremse nun auch den Verticalkreis und lese vom Nonius ab. Will man ein noch genaueres Resultat haben, so drehe man die Alhidade um 180°, schlage das Fernrohr durch und lese wieder ab; von beiden Ablesungen, vor und nach dem Durchschlagen, nehme man das arithmetische Mittel.

2. Der Repetitionstheodolit.

§. 208. Wie sorgfältig man auch die Instrumente zur Winkelmessung prüfen und berichtigen mag, so werden sich doch immer mehr oder weniger Fehler in die Beobachtung einschleichen, die ihren Grund hauptsächlich in der zufälligen Ungenauigkeit beim Einstellen und Ablesen haben. Man ist daher schon lange darauf bedacht gewesen, diese zufälligen Fehler durch die Methode des Winkelmessens in der Weise aufzuheben, daß sie sich gegenseitig selbst vernichten, indem man nicht den zu messenden Winkel selbst, sondern ein beliebiges Vielfache desselben vom Limbus abliest, wo dann der etwa vorhandene Fehler, der nicht größer sein wird als bei der einfachen Messung, durch die Division sich auf ein verschwindend Kleines reducirt. Eine solche Methode ist das von Tobias Mayer (dem Vater) um das Jahr 1752 erfundene Repetitionsverfahren.

Zwar muß ein zur Winkelmessung nach der Repetitionsmethode bestimmter Theodolit etwas anders eingerichtet sein, als ein gewöhnlicher zur einfachen Winkelmessung; jedoch beschränkt sich das Wesentliche dieser Abweichung auf den Bau des Fußes, indem nämlich bei einem Repetitionstheodoliten der Horizontalkreis selbst auch im Fuße drehbar sein muß. Ueberdies bringt man bei den Repetitionstheodoliten alles das in Anwendung, was sich durch Theorie und Erfahrung als ein vorzügliches Mittel der genauen Winkelmessung herausgestellt hat, während bei den einfachen Winkelmessern nie eine solche Vereinigung aller Hülfsmittel, die zur Zeit bekannt sind, erstrebt wird. Wir werden im Folgenden versuchen, an einem Instrumente aus der berühmten Werkstatt der Herren Breithaupt und Sohn in Kassel eine möglichst deutliche Vorstellung von diesem wichtigen Werkzeuge zu geben, indem wir uns überall an ein in neuester Zeit aus dieser Werkstatt hervorgegangenes Exemplar und in den wesentlichsten Punkten an die Angaben der Verfertiger halten.

§. 209. Der Theodolit besteht aus dem Horizontalkreise, dem Aufsatz mit Fernrohr, dem Verticalkreise, der untern Vorrichtung und dem Stativ.

1. Der **Horizontalkreis** besteht aus einer ausgedrehten Scheibe a (Fig. 227), deren Rand b den Limbus bildet und 10 bis 20° gegen die Horizontale geneigt ist. Im Centrum befindet sich die mit dem Kreise a fest verbundene Büchse c, in welcher sich der Centralzapfen e des Alhidadenkreises d dreht. Durch die Schrauben α ist die Büchse c an den Kreis a, durch β der Zapfen e an die Alhidade d befestigt; e besteht aus Stahl und ist, sowie die Büchse, konisch abgedreht. Limbus und Nonien sind von Silber; ersterer wird durch den

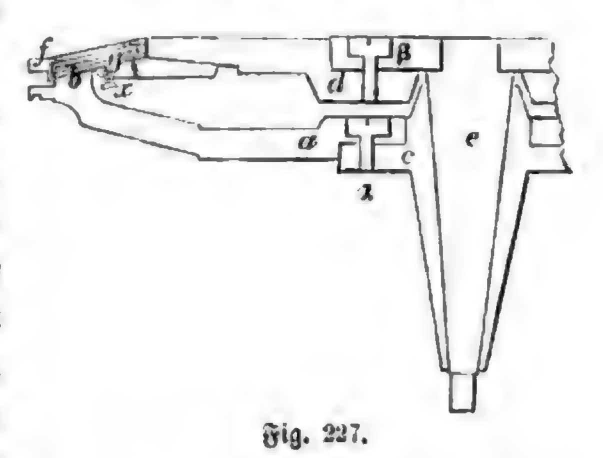


Fig. 227.

übergreifenden Theil f der Alhidade gedeckt und dadurch vor jeglicher Beschädigung geschützt; nur bei den Nonien ist ein Ausschnitt b (Fig. 228). Um jedoch auch hier allen Staub von dem Instrumente fern zu halten, werden die Nonien bleibend durch genau passende Gläser gedeckt. Der Limbus ist in ⅓ Grade, der Nonius zu ½ Minute Angabe getheilt. Die Flächen der Nonien fallen mit dem geneigten Limbus in eine Ebene, wodurch das Ablesen erleichtert wird; sie bilden natürlich einen Theil der Alhidade, wie bei g (Fig. 227) zu sehen ist.

Sollte sich der Zapfen e im Laufe der Zeit in der Büchse c ausschleifen und infolge dessen tiefer in die Büchse einsinken, so würden die Nonien auch nicht mehr genau zur Limbusebene passen; dann kann man aber mittels der Schräubchen x jeden Nonius um das Erforderliche höher stellen und wieder berichtigen.

Die Mikrometerschraube i k k′ (Fig. 228) ist eine Differentialschraube mit zwei nur wenig von einander verschiedenen Gewinden; bei einer Umdrehung der Schraube rückt also die Alhidade um den Unterschied der Höhen beider Schraubengänge; das eine Gewinde geht in k, das andere in k′ durch seine Mutter; die letztern sind Kugeln, die in Pfannen liegen und durch die aufgeschraubten Klemmen gehalten werden. Der Halter der Mikrometerschraube besteht aus den beiden Platten m, n, zwischen welchen sich eine Feder befindet, die fortwährend bemüht ist, die Platten m und n aus einander zu drücken; dadurch wird bewirkt, daß wenn die Bremsschraube d auch nur eine halbe Umdrehung zum Lösen der Alhidade gemacht hat, die Platten m, n schon so weit aus einander stehen, daß beim Drehen der Alhidade kein Aufschleifen auf dem Rande des Kreises mehr hörbar wird. H sind die Lupen, h′ die Blendungen.

2. Der **Aufsatz** besteht aus der hohlen Säule B (Fig. 228 und 229); diese steht auf der dreieckigen Platte r r, welche selbst mittels dreier Schrauben K,

durch welche ihr Stand berichtigt werden kann, auf der Alhidade ruht. In gewöhnlichen Fällen werden diese Schrauben mittels der Köpfe a gestellt, müssen sie aber stark angezogen werden, so bedient man sich eines stählernen Schlüssels, der in die Löcher der Köpfe K gesteckt wird. Auf der Säule B ruhen die Träger CC für die Lager t der Achse w des Fernrohrs LL'. Die Form der Fernrohrachse sieht man aus Fig. 229; uu sind Schließen oder Kappen, um die Enden der Achse in ihren Lagern zu halten. Das Fernrohr ist 14 Zoll lang, das achromatische Objectiv hat 14 Linien Oeffnung und gibt 25malige Vergrößerung. Der Zwischenraum zwischen den beiden Theilen der Säule B ist so groß, daß das Fernrohr durchgeschlagen werden kann. Auf dem Fernrohr sitzt die Röhrenlibelle D; sie ist ausgeschliffen und mit Glasstöpsel verschlossen; mittels der Schraube s wird sie berichtigt und gibt bei einer Linie Ausschlag 10 Secunden an. Das Fadenkreuz wird durch zwei einander gegenüberstehende Justirschräubchen v so regulirt, daß die optische Achse des Fernrohrs genau rechtwinkelig zur Drehachse ww steht. Nach der Verticalen braucht das Fadenkreuz nicht berichtigt zu werden, weil es auf die Winkelbestimmung durchaus keinen Einfluß hat, wenn auch die optische Achse des Fernrohrs nicht mit der mathematischen Achse des Rohrs zusammenfällt, vorausgesetzt, daß sie in der zur Drehachse senkrechten Verticalebene liege.

Der Verticalkreis E ist dicht am Fernrohr, innerhalb des Zapfenlagers t angebracht, wodurch er vor zufälligen Beschädigungen mehr geschützt ist, als wenn er, wie dies sonst der Fall ist, außerhalb des Trägers C liegt. Der Kreis E dreht sich mit der Achse ww und mit dem Fernrohr zugleich, während der Nonius y am Träger C festsitzt. Die Mikrometerschraube z ist, wie beim Horizontalkreis, eine Differentialschraube, wodurch bewirkt wird, daß die feine Bewegung äußerst langsam von statten geht, also das Einstellen sehr genau wird. q ist die Bremsschraube des Verticalkreises.

Im Zwischenraume der Säule B (Fig. 229) steht auf der Bodenfläche eine Dosenlibelle A auf drei Federn, wovon in der Figur die eine a sichtbar ist; durch drei Schrauben b kann diese Libelle berichtigt werden. F ist ein Ring mit zwei einander gerade gegenüberstehenden Ansätzen G; auf dem einen ist der Arm der Lupe H unmittelbar aufgeschraubt, während die andere Lupe (links in der Fig. 228) mittels eines am Arm befindlichen cylindrischen Zapfens eingesetzt wird. Dadurch wird es möglich, diese zweite Lupe nach der Seite hin zu verschieben, ohne die erste zu verrücken. Es kann daher ein Beobachter den einen Nonius, ein zweiter gleichzeitig den andern ablesen, während, wenn derselbe Beobachter beide Nonien ablesen soll, die bewegliche Lupe durch eine Schraube I festgestellt wird.

3. Die untere Vorrichtung. In der Fig. 229 stellt fi den Centralzapfen der Alhidade vor, g seine Büchse, welche zugleich Drehachse des Hori-

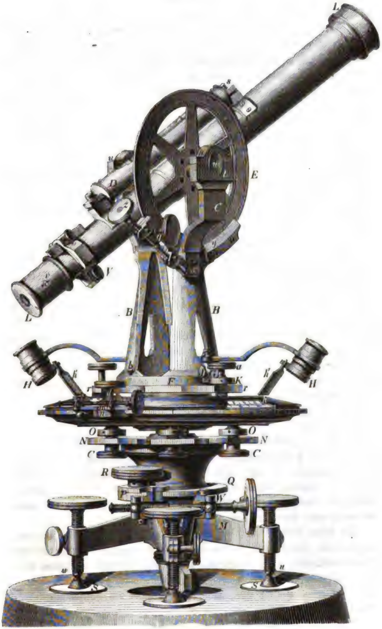


Fig. 228.

Google

zontalkreises ist; letztere ist oben und unten, bei g und h konisch, in der Mitte, bei d, cylindrisch abgedreht und in der Hülse o, welche mit dem Dreifuße M verbunden ist, abgeschliffen; der cylindrische Theil d ist aber so ausgedreht, daß er die Wandung der Hülse nicht berührt, während die Kegel g und h dicht anschließen; dadurch erzielt man eine Verminderung der Reibung bei der Drehung der Kreise. Sehr sinnreich ist die Einrichtung, welche im Innern der Hülse g h zu demselben Zwecke, der Verminderung der Reibung, angebracht ist. Unterhalb des Centralzapfens f i, zwischen i und z befindet sich im hohlen Raume der Büchse g h eine Spiralfeder. Mittels der unterhalb i sichtbaren Hülse stützt sich der Centralzapfen f i der Alhidade auf diese Feder, während die Feder selbst sich auf eine der obern ganz gleiche Hülse z stützt, die aber umgekehrt mit der Oeffnung nach oben liegt; diese Hülse z ist mit dem Stabe z f′ fest verbunden, und dieser Stab z f′ stützt sich unten auf die über den Hohlkegel und über die Büchsen g h und o o geschraubte Hülse f′.

In demselben Hohlkegel i f′, unterhalb der Hülse z, befindet sich ein cylindrisches Rohr (in der Höhe des Buchstabens h), das oben einen in der Mitte durchbohrten Boden hat; durch die Durchbohrung geht der Stab z f′ der Hülse z; unten ist dieses Rohr seitlich an die Büchse g h geschraubt und wird also von dieser getragen. In diesem Rohre nun befindet sich eine zweite Spiralfeder, die sich unmittelbar auf die vorhin erwähnte Hülse bei f′ stützt, während der obere Boden des cylindrischen Rohrs auf dem obern Ende dieser Spiralfeder ruht. Diese zweite Feder trägt also die Achse des Horizontalkreises, somit diesen Kreis selbst; die erste trägt die Alhidade durch Vermittelung ihrer Achse. Die Kraft der beiden Federn ist so, daß jede den betreffenden Theil bis auf einige Lothe trägt, wodurch die Achsendrehung des Horizontalkreises und der Alhidade, unbeschadet ihrer Sicherheit, eine sehr leichte Bewegung erhält.

Mittels der Schrauben O ruht der Horizontalkreis auf der Scheibe N N (Fig. 228 und 229); in letzterer Figur sieht man links auch die Einrichtung der Justirschraube O; durch das in die Platte N eingepaßte Stück erhält nämlich die Spindel seitlich einen Spielraum, wodurch das Verspannen des Kreises bei seiner Befestigung verhindert wird, indem der Einsatz sich immer horizontal unter den Kreis legt.

Die Platte N N ist mit der Büchse g h, welche die Achse des Horizontalkreises bildet, verbunden. Es ist schon einmal erwähnt worden, daß beim Repetitionstheodoliten der Kreis sich, ebenso wie die Alhidade drehen lassen muß, was hier mittels der Büchse g h geschieht; durch die Klemmschraube R und die Klemme P (Fig. 228) kann diese Drehung des Horizontalkreises gebremst, durch die Mikrometerschraube W die feine Bewegung desselben beim

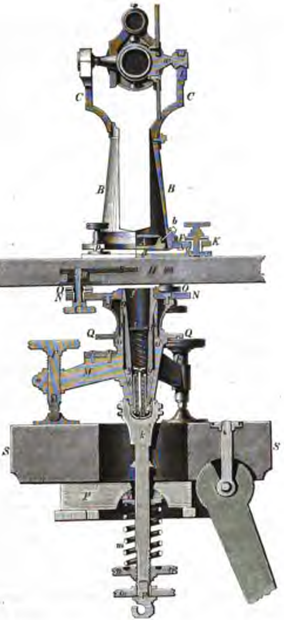


Fig. 229.

Digitized by Google

Einstellen bewirkt werden. Diese Schraube hat, wie die der Alhidade und des Verticalkreises, zwei verschiedene Gewinde, wodurch auch hier ein erhöhter Grad der Genauigkeit beim Einstellen erzielt wird. Der Halter P, der sich an der Scheibe Q befindet, hat auch hier eine Feder zwischen den Halterplatten, die die Platten beim Lüften der Schraube augenblicklich aus einander treibt.

4. Das Stativ. Durch den cylindrischen Zapfen k (Fig. 229), welcher bei I an den Fuß M angeschraubt ist, wird das Instrument mit dem Stativ so verbunden, daß derselbe, selbst wenn die Kopfplatte des Stativs von der horizontalen Ebene sehr abweicht, doch stets senkrecht auf das Instrument wirkt. Der Zapfen k geht durch die Kopfplatte SS des Stativs und durch das Verbindungsstück P hindurch. In dem Körper P geht k durch eine Höhlung, in welche das Stück q eingebracht ist, welches im Falle, daß der Stativkopf nicht in einer horizontalen Ebene liegt, der Befestigungsvorrichtung die Möglichkeit gibt, dessenungeachtet stets senkrecht auf das Instrument zu wirken. Das Stück q ruht auf der Spiralfeder m, ist oben von gewölbter Form, und seine Oeffnung ist ebenso wie die Oeffnung des Verbindungsstücks P, viel weiter, als der Zapfen k dick ist. Die gewölbte Form macht es dem Stück q möglich, jeder Neigung des Zapfens k, die durch eine Abweichung des Stativkopfes vom horizontalen Stande entsteht, zu folgen, und so einen stets senkrechten Stand der Befestigungsvorrichtung gegen das Instrument zu vermitteln. Die Feder m wird durch die Schraubenmutter n n angetrieben und die zweite Mutter o dient zum Anfassen der Vorrichtung beim Befestigen an den Dreifuß. Unterhalb ist der Haken p angeschraubt, um das Loth daran anzuhängen, wenn das Instrument über einem gegebenen Punkte aufgestellt werden soll.

Schließlich mag die Fig. 230 noch die perspectivische Ansicht der untern Vorrichtung mit dem Stative zeigen, indem die Buchstaben die in den Figuren 228 und 229 gleich bezeichneten Gegenstände anzeigen.

§. 210. Der Gebrauch des Repetitionstheodoliten wird sich aus folgender Theorie der Repetition von selbst ergeben. Es seien A, B (Fig. 231) zwei Objecte, deren Winkelentfernung von C aus gesucht wird, d. h. es sei der Winkel ACB = x zu messen. Man stelle das Instrument horizontal und centrisch über C auf, richte das Fernrohr auf das links liegende Signal A und lese am Nonius den Bogen a ab, den der Index anzeigt, d. h. den Bogen, um welchen der Index bei der dem Fernrohr gegebenen, auf A gerichteten Stellung vom Nullpunkte des Limbus absteht. Da am Limbus die Theilung von rechts nach links geht, wie die Zahlen in den Quadranten der Fig. 231 anzeigen, so bedeutet a den Bogen von 0 durch 90 bis v, oder den Winkel $\overline{oCv}$. Man könnte natürlich auch zuerst den Nonius auf 0° des Limbus einstellen, dann den Alhidadenkreis an den Horizontalkreis festklemmen und beide zusammen so weit herumführen, daß das Fernrohr genau auf das Ob-

ject A zeigte; dann hätte man als erste Ablesung für das Object A: 0° 0′ 0″. Wir werden weiterhin sehen, daß dies durchaus nicht nöthig ist. Wie eben

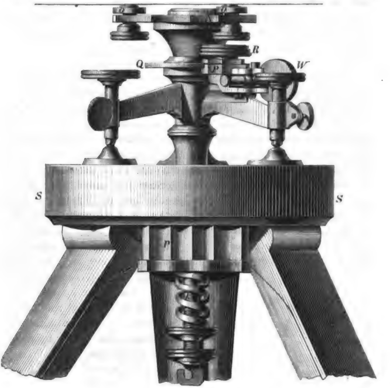


Fig. 230.

der Kreis beim Aufstellen zufällig zu liegen kommt, stellt man ihn fest und dreht blos die Alhidade, bis das Object A durch das Fadenkreuz gedeckt wird. Den Horizontalkreis noch immer unverrückt lassend drehe man nun die Alhidade so weit rechts herum, daß das Fernrohr auf das rechts liegende Object B zeigt. Die optische Achse des Fernrohrs, also auch das Fadenkreuz, hat jetzt den Bogen v ω zurückgelegt, welcher dem gesuchten Winkel x entspricht; wollte man den vom Index angezeigten Bogen a′ ablesen, so würde die Differenz a — a′ den Winkel ACB oder x bestimmen. Käme zufällig der Null-

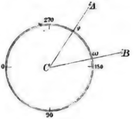


Fig. 231.

punkt der Theilung innerhalb des Bogens $\nu\omega$ zu liegen, so wäre die Gradzahl von a kleiner als die von a'; dann könnte man wieder den Anfangspunkt um 360° zurückverlegen, d. h. 360° hinzurechnen, und erhielte $360° + a - a' = x$, wie dies noch besonders deutlich wird, wenn man den Winkel ACB als aus ACO und BCO bestehend, also $= ACO + BCO$ denkt, während $BCO = 360° - \overline{BCO} = 360° - a$, folglich dann

$$x = ACO + 360° - \overline{BCO} = a + 360° - a'.$$

So weit kommt die Operation mit der einfachen Winkelmessung überein; bei der Messung durch Repetition liest man aber den Bogen a' nicht ab, sondern verfährt auf folgende Weise. Behufs der feinen Bewegung beim Einstellen der Alhidade in ω wurde diese an den Kreis festgeklemmt; in diesem Zustande läßt man beide Kreise, löst aber mittels der Klemmschraube R (Fig. 228) den Horizontalkreis von der Scheibe Q, und dreht diese beiden fest zusammenhängenden Kreise so weit rückwärts von rechts nach links (also in der Richtung der Theilung)*), daß das Fernrohr zum zweiten Male auf das Object A zeigt. Der Kreis hat dann die Lage von Fig. 232 angenommen, wo ω nach ν (in die Collimationslinie CA), ν nach ν' gerückt, so daß Bogen $\omega\nu$ der Fig. 231 $= \omega'\omega = \omega\nu'$ der Fig. 232 wird, und der Nullpunkt ebenso weit in derselben Richtung herumgegangen ist. In dieser Lage befestige man den Horizontalkreis, löse die Alhidade, und drehe sie sammt dem Fernrohr so weit von links nach rechts, bis das Object B wieder vom Fadenkreuze gedeckt wird. Der Nonius hat nun in Bezug auf den Punkt ν, wo er zuerst eingestellt und abgelesen wurde, den Bogen 2x zurückgelegt, gäbe also die jetzige Ablesung den Bogen a'', so wäre

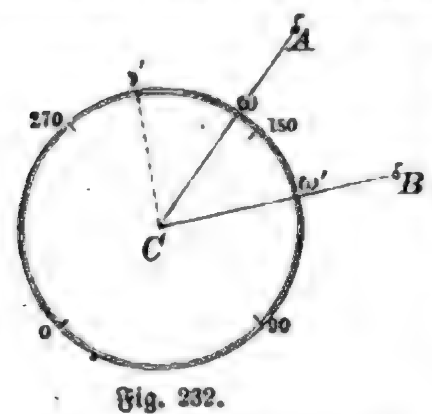


Fig. 232.

$$2x = a - a''$$

$$x = \frac{a - a''}{2}.$$

Wollte man aber ein noch größeres Vielfache des Winkels x haben, so brauchte man nur die Operation in der beschriebenen Weise fortzusetzen; man würde also jetzt wieder die Alhidade an den Kreis befestigen, den Horizontalkreis lösen, Kreis und Alhidade nach A zurückführen, den Kreis dort festklemmen, die Alhidade lösen und nach B führen, dann dieselbe Operation beliebig oft wiederholen. Zuletzt wird bei B abgelesen. Die Alhidade sei n Mal von A nach B geführt worden und die Ablesung bei B gebe a_n, so ist:

$$x = \frac{a - a_n}{n}.$$

*) Es muß sich bei diesen Ausdrücken der Beobachter immer in dem Mittelpunkte denken.

Es kann sich ereignen, daß der Nonius bei diesen Repetitionen über den Nullpunkt der Theilung fortgeht; dann muß man zur Differenz $a - a_n$ noch 360° addiren, und geht er mehreremal über Null weg, so muß man ebenso oft 360° addiren. Bei mmaligem Ueberschreiten des Nullpunktes und nfacher Repetition hätte man also:

$$x = \frac{360 \cdot m + a - a_n}{n}.$$

Sollte die Theilung des Limbus entgegengesetzt, also von links nach rechts laufen, so müßte man den entgegengesetzten Werth $a_n - a$ statt $a - a_n$ setzen; alles Uebrige bliebe ungeändert. Oder man finge die Messung damit an, daß man auf das rechts liegende Object einstellte und abläse, dann die Alhidade auf das links liegende Object richtete, und nun Kreis und Alhidade rechtsherum drehte, nämlich allemal nach der Richtung, in welcher die Theilung läuft; zuletzt würde man beim links liegenden Objecte wieder ablesen. Hat das Instrument zwei oder gar vier Nonien, so pflegt man alle abzulesen und aus allen Ablesungen das arithmetische Mittel zu nehmen.

§. 211. Die **Prüfung** eines Theodoliten hat sich auf folgende Punkte zu erstrecken:

1) ob die Libellenachse mit der optischen Achse des Fernrohs parallel sei;
2) ob die optische Achse des Fernrohrs senkrecht zur Drehachse stehe;
3) ob die Drehachse des Fernrohrs senkrecht gegen die Alhidadenachse stehe;
4) ob der Verticalkreis einen Collimationsfehler habe und wie groß derselbe;
5) ob Limbus und Alhidade Excentricität haben.

1) Zur Prüfung ad 1 bezeichne man zwei Punkte A, B (Fig. 233) an einem nicht zu steilen Abhange, so daß dieselben, in etwa 100 Fuß gegenseitiger Entfernung, es zulassen, die Horizontale durch die Instrumentenhöhe im obern Punkte A über dem tiefer liegenden B durch eine Latte noch zu erreichen; dann stelle man den Theodoliten in A auf und messe die Augenhöhe $AO = g$ bei der Beobachtung; in B lasse man eine Latte lothrecht halten, die auf ihrer einen Fläche eine von A aus durch das Fernrohr noch leicht erkenntliche Theilung trägt. Man stelle die Libelle horizontal und bemerke den Punkt der Latte, auf welchen das Fernrohr dann hinweist; es sei D, so daß $BD = h$ auf der Latte abgelesen werde. Man bringe nun den Theodoliten nach B und die Latte nach A, wiederhole die-

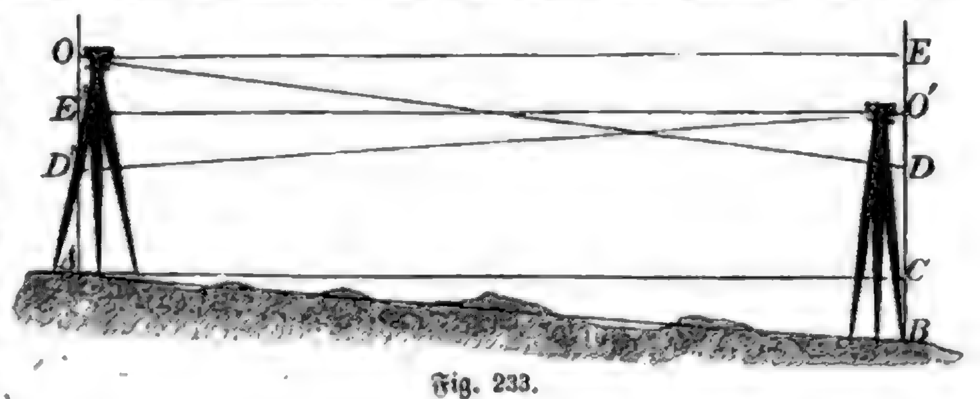


Fig. 233.

selbe Operation in B, welche man in A eben ausgeführt, und finde $BO' = g'$, $AD' = h'$. Sind AC, OE und $O'E'$ Horizontalen, so ist:

$$BC = BE - CE$$

das Gefälle von A nach B, und

$$BC = BO' - CO'$$

die Steigung von B nach A; also ist nothwendig:

$$BE - CE = BO' - CO'.$$

Ist nun die Libellenachse nicht parallel mit der optischen Achse des Fernrohrs, so ist letztere nicht horizontal, wenn die Blase der Libelle einspielt. Der gemachte Fehler beträgt auf die Entfernung OE die Größe $DE = D'E'$, d. h. so viel zeigt das Fernrohr über oder unter die Horizontale. Dieser Fehler heiße y; dann ist:

$$BE = BD + DE = h + y;$$
$$CE = AO = g;$$
$$\overline{BE - CE = h + y - g.}$$
$$BO' = g'$$
$$CO' = AE' = AD' + D'E' = h + y$$
$$\overline{BO' - CO' = g' - h' - y.}$$

Also: $$h + y - g = g' - h' - y$$

$$y = \frac{g + g'}{2} - \frac{h + h'}{2};$$

der Fehler beträgt also den Unterschied der arithmetischen Mittel der Instrumenten- und Lattenhöhen. Ist die Libellenachse mit der optischen Achse des Fernrohrs parallel, so muß die Größe y zu Null werden und die Visirlinie mit den Horizontalen OE, $O'E'$ zusammenfallen. Die Größe y verschwindet aber, wenn

$$\frac{g + g'}{2} = \frac{h + h'}{2}.$$

Umgekehrt: ist das arithmetische Mittel aus den Instrumentenhöhen gleich dem arithmetischen Mittel aus den Lattenhöhen in beiden Standpunkten, so ist die Libellenachse der optischen Achse des Fernrohrs parallel, in jedem andern Falle aber nicht.

Um diesen Fehler zu berichtigen, berechne man nach obiger Formel die Abweichung y aus den beobachteten Größen g, g', h, h', verbessere dann die Libelle mittels ihrer Stellschrauben so lange, bis das Fadenkreuz des noch immer in B aufgestellten Instruments auf die Höhe $y + h'$ zeigt.

2) Der Forderung ad 2 muß genügt werden, weil sonst das Fernrohr bei der Drehung um seine Achse nicht eine Ebene, sondern eine Kegelfläche beschreibt; man würde also bei der Messung von Höhenwinkeln nicht die verticale, sondern eine schiefe Höhe der anvisirten Gegenstände bekommen. Ob ein Theodolit mit diesem Fehler behaftet sei, findet man auf folgende Weise.

Google

Man stelle den Theodoliten im Freien so auf, daß sein Kreis horizontal liege, und setze in etwa 100 und 200 Fuß Entfernung zwei Stäbe A, B in die Visirlinie des Fernrohrs. Nun schlage man das Fernrohr durch und setze in die neue Visirlinie einen Stab C ein. Endlich prüfe man, ob A, B, C in gerader Linie stehen. Ist dies der Fall, so ist die Visirlinie senkrecht zur Drehachse, sonst aber macht sie schiefe Winkel mit dieser.

Bei Instrumenten aus guten Werkstätten kann der Betrag dieses Fehlers nie groß sein; er kann daher allemal mittels des Fadenkreuzes verbessert werden, das in der Horizontalebene links oder rechts, je nach dem Ausfall des Fehlers, gerückt werden muß. Sollte der Fehler so groß sein, daß ihm damit nicht abzuhelfen wäre, so müßte das Instrument durch den Mechanikus gebessert werden.

3) Um die Nothwendigkeit der dritten Forderung einzusehen, denke man sich die Alhidadenachse vertical, so ist bei einem Instrumente, das der Forderung ad 3 nicht genügt, die Drehachse nicht horizontal, also bewegt sich das Fernrohr bei seiner Drehung um die Achse in einer schiefen Ebene und man erhält wieder nicht die richtige Größe der gemessenen Verticalwinkel.

Steht die Libelle auf dem Fernrohre und hat man sie nach der ersten Untersuchung so berichtigt, daß ihre Achse mit der Visirlinie parallel ist, sowie nach der zweiten, daß die Visirlinie zur Drehachse senkrecht steht, so bleibt nur zu untersuchen, ob der Kreuzungspunkt der Fäden eine gerade Linie durchläuft, wenn man das Fernrohr um seine Achse dreht, wozu man nur in hinreichender Entfernung ein Loth aufzuhängen, den Kreuzpunkt der Fäden darauf zu richten und dann zu beobachten hat, ob dieser, bei der Verticalbewegung des Fernrohrs, das Loth überall deckt. Ist dies der Fall, so steht die Drehachse auf der Alhidadenachse senkrecht, sonst nicht. Der so gefundene Fehler wird durch Erhöhung oder Erniedrigung der Achse in dem einen Lager, wozu besondere Correctionsschrauben vorhanden sind, gehoben.

Steht die Libelle auf der Drehachse, so stelle man das Instrument nach dem Augenmaß horizontal, drehe den Alhidadenkreis so, daß die Libelle in die Richtung zweier Fußschrauben zu stehen kommt, bringe sie hier zum Einspielen und drehe dann die Alhidade, also auch die Libelle, in die entgegengesetzte Lage; spielt die Blase auch hier noch ein, so ist die Drehachse senkrecht zur Alhidadenachse; findet aber ein Ausschlag statt, so ist dieser doppelt so groß als der Fehler in der Achsenlage. Denn stellt ax (Fig. 234) die Drehachse, bc die Alhidadenachse vor, und ist cz senkrecht zu ax, und man dreht ax in die entgegengesetzte Lage um bc herum, so kommt a in a′, x in x′

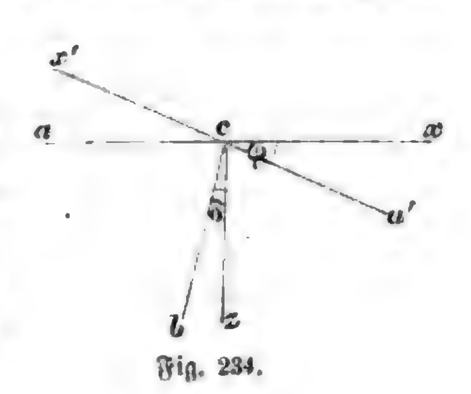


Fig. 234.

zu liegen, und es ist Winkel $acb = a'cb$ und W. $bcx = bcx'$; ist dann W. $bcz = \delta$ und W. $a'cx = \varphi$, so ist:

$$\text{W. } acb = 90^\circ - \delta = a'cb,$$
$$\text{W. } bcx = 90^\circ + \delta = bcx'$$
$$= \varphi + 90^\circ - \delta,$$

also: $$\varphi = 2\delta.$$

Ist aber ax horizontal, so wird der Neigungswinkel φ auch durch den Ausschlag der Libelle angegeben. Der Fehler wird zur Hälfte mittels der Fußschrauben, zur Hälfte am Zapfenlager der Drehachse verbessert.

4) Der Collimationsfehler des Theodoliten ist der Bogen, um welchen der Noniusindex bei horizontaler Lage des Fernrohrs etwa vom Nullpunkte der Theilung abweicht. Fällt der Index bei horizontaler Lage des Fernrohrs auf die Seite des Nullpunktes, wo die bei der Messung des Höhen- oder Tiefenwinkels abgelesenen Grade liegen, so wird der gemessene Winkel um den Collimationsfehler zu groß genommen; fällt dagegen der Index auf die entgegengesetzte Seite des Nullpunktes, so wird der gemessene Winkel um ebenso viel zu klein. Denn, stellt HVRK (Fig. 235) den Verticalkreis am Theodoliten vor, ist C der Mittelpunkt des Kreises, HR die horizontal gerichtete Achse des Fernrohrs, bZ die Richtung derselben Achse, wenn das Fadenkreuz auf das anvisirte Höhenobject Z eingestellt ist, so wird der Winkel ZCR, welcher die Höhe des Objectes Z über der Horizontalen HR ausdrückt, gemessen durch den Bogen Hb. Zeigt nun der Index bei der Horizontalstellung des Fernrohrs statt auf H, wo der Nullpunkt der Theilung ist, auf J, im Quadranten HCK oder im Bogen HK, und ist Bogen $HJ = k$, so wird, wenn das Fernrohr auf Z gerichtet ist, die Alhidade auf b, also der Index auf J_1 stehen, so daß $bJ_1 = HJ = k$. Der wahre Höhenwinkel ist $HCb = \alpha$; man liest aber $HCJ_1 = \alpha + k$ ab. Der abgelesene Winkel muß also um k vermindert werden. Fiele bei der Horizontalstellung des Fernrohrs der Index nach J', in den Quadranten HV, so fiele er, wenn die Alhidade in b steht, nach J_1', und der abgelesene Winkel wäre um $bJ_1' = k$ zu klein. Hat der Nonius eine solche Lage, daß der Höhenwinkel aCR im Bogen VR abgelesen wird, so stellt sich dasselbe heraus. Liegt der Index bei der Horizontalstellung des Fernrohrs in i, so zeigt er, wenn das Object Z anvisirt wird, auf i_1 und man liest den Bogen Ri_1

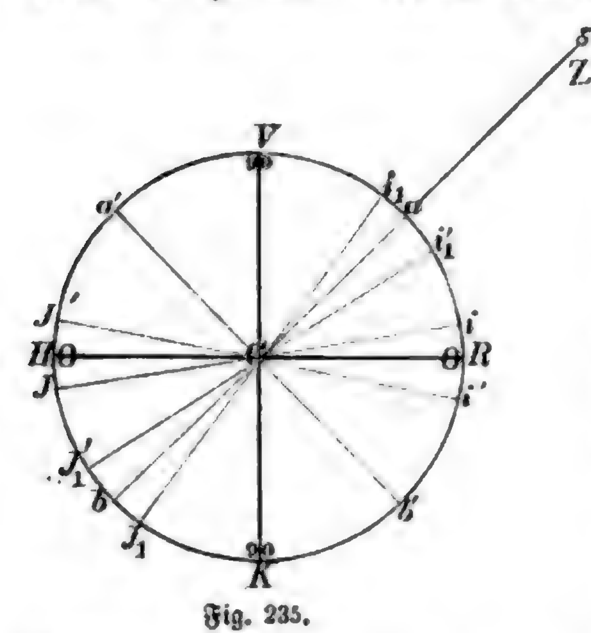


Fig. 235.

statt Ra, also $\alpha + k$ statt α ab. Fällt dagegen der Index bei der Horizontalstellung des Fernrohrs außerhalb des Bogens, von welchem der Höhenwinkel abgelesen wird, d. h. jenseit des Nullpunkts H oder R, in J' oder i', so zeigt er auf J_1' oder i_1', wenn das Fernrohr auf O gerichtet ist, man liest also HJ_1' statt Hb, oder Ri_1' statt Ra, d. h. $\alpha - k$ statt α ab. Fällt also der Index innerhalb des abzulesenden Bogens, so muß der Collimationsfehler von der Ablesung subtrahirt werden, und fällt der Index außerhalb des abzulesenden Bogens, so muß derselbe zur Ablesung addirt werden.

Um nun den Collimationsfehler an einem Theodoliten zu finden, stelle man das Instrument horizontal auf, richte das Fernrohr auf irgend ein Höhenobject und lese den Winkel am Nonius ab. Heißt die Ablesung a, so ist bei voriger Bezeichnung: $a = \alpha \pm k.$
Nun lasse man den Alhidadenkreis eine halbe Umdrehung beschreiben, so daß der Verticalkreis sich gleichfalls um 180° dreht, so kommt R (Fig. 235) nach H und H nach R, a nach a', b nach b', das Fernrohr ab in die Lage a'b', J nach i', J' nach i und umgekehrt; damit nun das Fadenkreuz wieder auf O zeige, schlage man das Fernrohr durch, so daß a' wieder nach a, b' nach b kommt. Fiel also vorhin die Collimation in HK, so fällt sie jetzt in den Bogen RK; war sie vorhin positiv, so ist sie jetzt negativ; und fiel die Collimation vorhin in den Bogen HV, so fällt sie jetzt in RV, d. h. war sie vorhin negativ, so wird sie jetzt positiv. Dieselbe Zeichenänderung tritt ein, wenn der Höhenwinkel bei der ersten Lage des Kreises am Quadranten RV abgelesen würde. Heißt die Ablesung nach dem Umschlagen des Fernrohrs a', so ist demnach: $a' = \alpha \mp k.$
Eliminirt man α aus der vorigen und dieser Gleichung, so erhält man:

$$k = \frac{a - a'}{2}.$$

Sind zwei Nonien am Verticalkreise angebracht, so muß der Collimationsfehler eines jeden derselben bestimmt werden.

An den Breithaupt'schen Theodoliten sind eigene Correctionsschräubchen zum Verschieben des Nonius, so daß man die Collimation ganz wegschaffen kann. Man kann aber den Collimationsfehler des Theodoliten auch dadurch unschädlich machen, daß man den Höhenwinkel des Objects vor und nach dem Durchschlagen des Fernrohrs abliest und von diesen beiden Ablesungen das arithmetische Mittel nimmt. Denn wenn man die Gleichungen:

$$a = \alpha \pm k$$

und $a' = \alpha \mp k$ addirt,

so erhält man: $a + a' = 2\alpha$

$$\alpha = \frac{a + a'}{2}.$$

Der richtige Höhenwinkel läßt sich also auch mittels eines mit einem Collimationsfehler behafteten Theodoliten finden.

5) Um die Prüfung des Theodoliten auf seine Excentricität zu erklären, diene die Fig. 236. Ist C der Mittelpunkt des Limbus, c der des Alhidadenkreises, so heißt die Entfernung Cc die Excentricität des Alhidadenkreises. Soll aus dem Mittelpunkte c der Winkel der beiden Objecte P und Q gemessen werden, so erhält man, wenn die Excentricität Cc vorhanden ist, den Winkel ACB statt PcQ. Der Unterschied zwischen dem gesuchten und wirklich gemessenen Winkel, PcQ — ACB macht den durch die Excentricität des Instruments verursachten Fehler f aus.

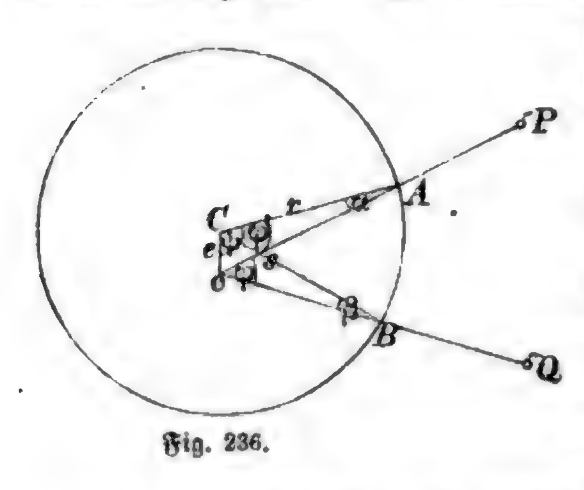


Fig. 236.

Um diesen Fehler f zu bestimmen, setzen wir den Winkel $PcQ = \varphi$, $ACB = \varphi'$, die Excentricität $Cc = e$, den Winkel $ACc = \psi$, $CAc = \alpha$, $CBc = \beta$, $AC = BC = r$, und wegen der geringen Größe, die Cc oder e auch bei minder guten Instrumenten haben wird, kann man unbedenklich $Ac = Bc = AC = BC = r$ setzen. Dann ist:

$$f = \varphi - \varphi',$$

und in den Dreiecken ACs und Bcs hat man:

$$\varphi' + \alpha = \varphi + \beta,$$

also ist:

$$f = \varphi - \varphi' = \alpha - \beta,$$

und es kommt nun blos darauf an, α und β durch bekannte Größen auszudrücken. Aus dem Dreiecke ACc erhält man:

$$\sin \alpha = \frac{e}{r} \cdot \sin \psi,$$

und aus dem Dreiecke BCc:

$$\sin \beta = \frac{e}{r} \cdot \sin (\psi - \varphi').$$

Wegen der Kleinheit der Winkel α und β kann man die Winkel selbst ihren Sinus gleichsetzen und erhält so:

$$\alpha = \omega \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin \psi \text{ Secunden},$$

$$\beta = \omega \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin (\psi - \varphi') \text{ Secunden}.$$

$$\alpha - \beta = \omega \cdot \frac{e}{r} [\sin \psi - \sin (\psi - \varphi')] \text{ Secunden}$$

$$= 2\,\omega \cdot \frac{e}{r} \cos \left(\psi - \frac{\varphi'}{2}\right) \cdot \sin \frac{\varphi'}{2} \text{ Secunden},$$

wo $\omega = 206264{,}8$ ist. Die Formel reicht aus, um die Größe des Fehlers

zu berechnen, den man bei einer Messung begeht, wenn man eine vorhandene Excentricität nicht berücksichtigt; da man aber die Größen e und ψ in den wenigsten Fällen kennen dürfte, so wird man eine mit einem in diesem Punkte fehlerhaften Instrumente gemachte Beobachtung nicht danach verbessern können. Man muß daher suchen, die vorhandene Excentricität aus dem Resultate der Messung zu eliminiren, und dies gelingt durch ein sehr einfaches Verfahren, wie wir jetzt zeigen wollen.

Es sei Fig. 237, wo der Deutlichkeit wegen alles nach einem größern Maßstabe dargestellt ist, als in der Wirklichkeit vorkommt, C der Mittelpunkt des Limbus, und der Radius des Kreises DED_1E_1 stelle in diesem vergrößerten Maßstabe die Excentricität des Instruments vor. Soll der Winkel PCQ $= \varphi$ gemessen werden, so richtet man das Fernrohr in D auf das Object P und die optische Achse des Fernrohrs nimmt die Lage einer Tangente an den Kreis an, welcher mit der Excentricität CD um C beschrieben gedacht wird; dann richtet man das Fernrohr auf das Object Q und es wird sich dasselbe nun in E befinden, und seine Achse wieder eine Tangente an den Kreis DED_1E_1 bilden. Aus den Ablesungen in D und E erhält man den Winkel $DCE = PGQ = \varphi'$. Es ist aber:

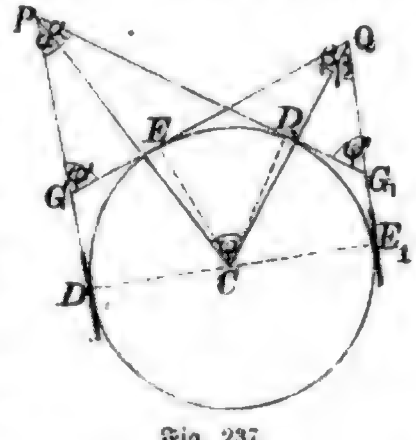


Fig. 237.

$$\varphi + \beta = \varphi' + \alpha,$$

also
$$\varphi = \varphi' + (\alpha - \beta),$$

wie schon oben gefunden. Macht man aber dieselben Messungen an der andern Seite des Kreises DED_1E_1 nämlich in D_1 und E_1, so wird W. $CPD_1 = CPD = \alpha$, und $CQE_1 = CQE = \beta$, weil DP, D_1P_1, EQ, E_1Q Tangenten sind; es ist aber in dieser zweiten Lage der W. $D_1CE_1 = PG_1Q = \varphi''$ gemessen worden, und es ist:

$$\varphi + \alpha = \varphi'' + \beta$$

oder
$$\varphi = \varphi'' - (\alpha - \beta),$$

also, wenn man diese Gleichung mit der vorigen verbindet:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

wo die Excentricität ganz herausgefallen ist. Die zweite Beobachtung und Messung wird aber offenbar dadurch gewonnen, daß man, nachdem die erste in D und E vollendet, das Fernrohr (d. h. die Alhidade) um 180° herumdreht und dann durchschlägt. Man findet also mittels eines mit Excentricität behafteten Theodoliten einen Horizontalwinkel richtig, wenn man ihn in zwei entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs mißt und aus beiden Ablesungen das arithmetische Mittel nimmt. Natürlich wird man bei jeder der beiden Lagen

des Fernrohrs beide Nonien ablesen und zuletzt aus allen Ablesungen das arithmetische Mittel nehmen.

Die zweite und dritte dieser Berichtigungen des Theodoliten sind, wie wir gesehen, nicht unumgänglich nöthig, wenn man nur jede Messung doppelt vornimmt, nämlich einmal in der gewöhnlichen Lage des Fernrohrs, dann aber auch mit durchgeschlagenem Fernrohr; denn der wegen unrichtiger Stellung der optischen Achse des Fernrohrs, der Drehachse des Fernrohrs und der Alhidadenachse begangene Fehler ist jedenfalls in beiden Lagen des Fernrohrs gleich groß, hat aber entgegengesetztes Zeichen; der wahre Werth des gesuchten Winkels liegt also in der Mitte und findet sich durch das arithmetische Mittel aller Ablesungen.

§. 212. Will man einen berichtigten Theodoliten zur Winkelmessung aufstellen, so hat man erst den Horizontalkreis mittels der im Innern der Tragsäule auf die Alhidade gestellten Dosenlibelle in die Horizontalebene zu bringen. Dies geschieht mittels der drei Stellschrauben des Fußes. Hat man dadurch das Einspielen der Blase im Centrum bewirkt, so drehe man die Alhidade um 180°; zeigt die Libelle nun eine Abweichung, so war ihre Achse nicht vertical. Man verbessert den Fehler zur Hälfte an den Fußschrauben, zur Hälfte an den Justirschräubchen b (Fig. 229). Nun muß noch die Achse des Kreises senkrecht gestellt werden. Zu diesem Zwecke stelle man die Alhidade mittels der Klemmschraube des Mikrometerwerks fest und drehe Kreis und Alhidade um 180°. Zeigt die Libelle eine Abweichung, so verbessere man sie halb durch die Stellschrauben des Dreifußes und halb durch die Justirschrauben O, auf welchen der Kreis ruht. Ehe jedoch eine der Schrauben O verändert wird, lüfte man jedesmal die Kopfschraube C (Fig. 229).

§. 213. Herr Breithaupt, dem wir die Verbesserung der Repetitionstheodoliten hauptsächlich verdanken, gibt für den sichern Gebrauch und für die Erhaltung der nach seiner Construction gebauten Instrumente noch einige Vorschriften, die wir dem angehenden Geodäten nicht vorenthalten dürfen. Wir lassen sie daher wenigstens auszugsweise und ihrem wesentlichen Inhalte nach folgen, um so mehr, da das beste Instrument, unrichtig gebraucht, doch allemal falsche Resultate liefern wird.

Um eine der genauen Theilung des Kreises entsprechende Repetitionsmessung auszuführen, ist vor dem Beginn derselben ein Hauptерforderniß:

1) die feste und sichere Aufstellung des Stativs, damit nicht jede Berührung Einfluß darauf habe;

2) ist das Instrument auf das Stativ gesetzt und durch Verschieben des Dreifußes auf dem Stativkopfe über dem Standpunkte genau eingelothet, so muß die zur Befestigung desselben dienende Schraubenmutter n anfangs nur wenig angezogen, und, nachdem der Kreis horizontal gestellt ist, fester geschraubt

werden, doch so, daß die Spiralfeder nicht allzu straff gezogen wird. Der horizontale Stand des Instruments wird nochmals genau untersucht und das etwa Fehlende mit den Stellschrauben des Dreifußes berichtigt; alsdann müssen die Klemmschrauben fest angezogen werden;

3) beim Horizontalmessen muß der Mikrometerschraubenhalter des Verticalkreises stets gelöst bleiben, um nicht durch das Feststellen und Lösen der Halterschraube ein Verrücken der Alhidade oder des Kreises herbeizuführen, und nur wenn die verticale Verstellung der Visirlinie so wenig beträgt, daß sie durch die Mikrometerschraube des Verticalkreises bewirkt werden kann, ohne die Halterschraube zu ändern, kann diese geschlossen bleiben;

4) bei dem fortgesetzten Repetiren eines Winkels muß darauf geachtet werden, daß der Halter der Alhidade nicht so fest als der des Kreises angezogen wird, weil sonst beim Lösen des erstern leicht ein fast unmerkliches Verrücken des Kreises stattfinden kann.

IV. Der Spiegelsextant.

§. 214. Der Spiegelsextant besteht aus einem Kreisbogen von etwas über 60°, AB (Fig. 238). Dieser Bogen bildet den Limbus des Winkelmessers, ist aber in 120 halbe Grade getheilt, welche, wie ganze Grade, von 0 bis 120 gezählt und beziffert werden; der Grund hiervon liegt in dem katoptrischen Gesetze (§. 63), worauf der Spiegelsextant sich hauptsächlich

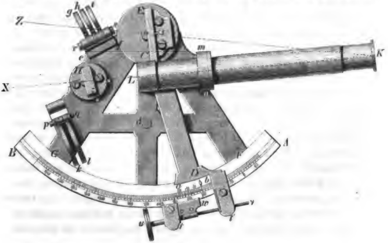


Fig. 238.

Digitized by Google

gründet. Aus den §. 121 und 125 angeführten Gründen ist die Theilung noch um einige Grade über die angegebenen Grenzen hinaus fortgesetzt. Um den Mittelpunkt c des Bogens bewegt sich eine Alhidade CD, deren auf dem Limbus liegender Rand ab den Nonius trägt. Je nach der Größe des Radius ist der Limbus mehr oder minder fein getheilt und gestattet auch der Nonius kleinere oder größere Bogen abzulesen. Bei Sextanten mit vierzölligem Radius kann der Grad in 4 oder 6 Theile getheilt sein; ist dann im ersten Falle der Bogen von 29 solcher Theile auf dem Nonius in 30 gleiche Theile getheilt, so beträgt ein Noniustheil $1/_{30} \cdot 1/_4{}^\circ = 1/_2$ Minute = 30 Secunden; und ist im andern Falle der Bogen von 59 Limbustheilen in 60 gleiche Theile getheilt, so beträgt ein Theil 10 Secunden. Dies sind die Theile des Drehwinkels der Alhidade, die bei der angegebenen Theilung abgelesen werden können; da aber, nach dem Gesetze (§. 63), jeder durch den Sextanten gemessene Winkel doppelt so groß ist als der auf dem Limbus angegebene, so geht auch für die gemessenen Winkel die Angabe beziehlich nur bis zu ganzen Minuten und 20 Secunden.

Am Drehpunkte c der Alhidade ist senkrecht zur Ebene dieser letztern ein Planspiegel CE befestigt, der also mit der Alhidade gleichzeitig sich dreht; dieser heißt der große Spiegel. Durch Stellschräubchen kann dem Spiegel stets seine verticale Lage wiedergegeben werden, wenn man durch eine Prüfung finden sollte, daß er sie verloren hat. Vom Centralzapfen c aus gehen zwei Speichen cF und cG nach dem Gradbogen hin, durch welche dieser mit dem Centrum verbunden wird. Auf der Speiche cG, welche nach dem Endpunkte der Theilung geht, ist in der Mitte noch ein zweiter, kleinerer Spiegel HJ angebracht, von dem aber nur die untere Hälfte belegt ist, die obere dagegen dem Lichte freien Durchgang durch das Glas gestattet. Er steht senkrecht zur Ebene des Sextanten und kann ebenfalls durch Stellschräubchen regulirt werden; durch zwei auf der Rückseite angebrachte Schräubchen läßt er sich etwas drehen, damit er stets in eine solche Lage gebracht werden könne, daß er dem größern Spiegel CE parallel ist, wenn der Index des Nonius auf Null zeigt. Auf der andern Speiche cF befindet sich ein Ring mn mit einer Schraubenmutter, dazu bestimmt, ein Fernrohr aufzunehmen, das nach dem kleinen Spiegel gerichtet ist. Mittels einer auf der Rückseite des Sextanten befindlichen Schraube kann das Fernrohr etwas gehoben und gesenkt werden. Die untere Hälfte des Objectivs bekommt das vom kleinen Spiegel reflectirte Licht, die obere das durch den unbelegten Theil des Spiegels durchgehende Licht des mit dem Fernrohr anvisirten Objects. Zu beiden Seiten des kleinen Spiegels sind, an Gewinden, einige Blendgläser angebracht, von denen, nach Bedürfniß, eins oder mehrere den Spiegeln vorgesetzt werden können; an dem Gewinde rs ist g ein dunkelrothes, h ein grünes, i

ein matt rothes Glas, an dem Gewinde pq ist k ein matt rothes, l ein grünes Glas. Gewöhnlich hat man auch noch ein schwarzes Sonnenglas bei dem Instrumente, um es bei Sonnenbeobachtungen vor das Ocular bei K zu schrauben.

Auf der untern Seite des Limbus befindet sich die Bremsschraube, welche die grobe Bewegung der Alhidade cD hemmt; uv ist die Mikrometerschraube, durch welche die feine Bewegung und genaue Einstellung bewirkt wird; t, t' sind die Halterplatten, w ist die Klemmplatte, welche durch die Bremsschraube gegen den Limbus gedrückt wird. Bei d ist die Speiche durchbohrt und in die Bohrung ist ein Gewinde geschnitten, damit man von der Rückseite einen Griff einschrauben könne, bei welchem der Sextant bei der Beobachtung gehalten wird. Ein Fadenkreuz wird in dem Fernrohr nicht angebracht; es wird weiterhin deutlich werden, warum dasselbe überflüssig wäre.

§. 215. Will man mit dem Sextanten die Winkelentfernung zweier Objecte X und Z (Fig. 238) messen, so faßt man den Sextanten mit der rechten Hand bei seinem Griffe, bringt seine Ebene in die durch beide Objecte X, Z und das Auge bei K bestimmte Ebene, und dreht ihn in dieser Ebene so lange, bis man durch das Fernrohr und den unbelegten Theil des kleinen Spiegels JH das links liegende Object X erblickt, löst die Bremsschraube der Alhidade und dreht die Alhidade, die vorher auf Null gebracht war, mit der linken Hand vom Nullpunkte aus so weit über die Theilung fort, bis man unter X in dem belegten Theil des Spiegels auch das Bild von dem rechts liegenden Objecte Z sieht. Dieses ist durch doppelte Reflexion entstanden; das von Z kommende Licht fällt auf den großen Spiegel CE, wird von da nach dem Spiegel JH reflectirt, und dieser wirft es in der Richtung des Fernrohrs LK zurück. Sobald ein annäherndes Zusammenfallen beider Bilder erreicht ist, stellt man die Alhidade mittels der Bremsschraube fest und bewirkt die genaue Coincidenz noch durch die Mikrometerschraube uv.

Tritt nun z. B. bei $2n^\circ$, welche die Alhidade vom Nullpunkte aus auf dem Limbus durchlaufen hat, die Coincidenz des zweimal reflectirten Objects Z mit dem direct gesehenen Objecte X ein, so werden beide Objecte X, Z nach gleicher Richtung gesehen; der Winkel XKZ ist also derselbe, welchen der direct von Z kommende Lichtstrahl mit dem ebenfalls von Z kommenden, aber zweimal reflectirten Strahle macht, d. h. gleich $2n^\circ$; dieser letztere Winkel ist aber nach §. 63 doppelt so groß als der Winkel, den die Spiegel im Augenblicke der Coincidenz der Bilder mit einander machen; d. h. der Winkel der Spiegel ist gleich n° und wird durch die Alhidade auf dem Limbus gemessen. Man muß also jedesmal den vom Limbus abgelesenen Winkel verdoppeln, um den Winkel der Objecte X, Z für den Standpunkt K zu be-

kommen; um diese Rechnung zu vermeiden, sind eben auf dem Limbus halbe Grade für ganze gezählt.

§. 216. Das eben beschriebene Verfahren, einen Winkel mit dem Sextanten zu messen, bleibt dasselbe, mag der zu messende Winkel in einer horizontalen, schiefen oder verticalen Ebene liegen, wenn nur allemal beide Winkelschenkel gegeben und deutlich bezeichnet sind; bei Verticalwinkeln und solchen, die in einer schiefen Ebene liegen, wird die Operation mit dem tiefer liegenden Schenkel begonnen. Bei Höhenwinkeln aber ist in der Regel nur der eine Schenkel gegeben, während der andere, die Horizontale, noch besonders gesucht und bestimmt werden muß. Auf dem Meere nimmt man den scheinbaren Horizont, d. h. die sichtbare Grenze zwischen Himmel und Wasser, in weiten, ganz ebenen Gegenden die sichtbare Grenze zwischen Himmel und Erde als Horizont und mißt die gesuchte Höhe über dieser Grenze. In allen andern Fällen bedarf man eines künstlichen Horizonts. Als künstlicher Horizont dient eine Oel- oder Quecksilberfläche, auch eine auf der Rückseite geschwärzte oder matt geschliffene ebene Glasscheibe, am einfachsten die Planfläche des Centrumniveau. Bei der Anwendung des künstlichen Horizonts ist aber Folgendes zu beachten. Es heiße BD (Fig. 239) die ebene Spiegelfläche des künstlichen Horizonts; sie sei mittels dreier Stellschrauben und einer berichtigten Libelle horizontal gestellt. SA sei ein von einem höher liegenden Gegenstande S auf diese horizontale und ebene Spiegelfläche BD fallender Strahl, der so nach E zurückgeworfen wird, daß $\alpha = \beta$. Verlängert man EA über A hinaus nach C hin, so entsteht der Winkel $\gamma = \beta = \alpha$; also ist der Winkel $SAC = \alpha + \gamma = 2\alpha$. Der Winkel, den ein auf eine Spiegelebene einfallender Strahl mit dem hinter dem Spiegel verlängerten zurückgeworfenen Strahle macht, ist also doppelt so groß als der Neigungswinkel des einfallenden Strahls, oder, wenn der Spiegel horizontal ist, doppelt so groß als die Höhe des leuchtenden Punktes S über dem Horizonte, letztere im Bogen BS oder Winkel α gemessen. Zieht man von einem beliebigen Punkte E des zurückgeworfenen Strahls AE eine Parallele EF mit dem einfallenden Strahle SA, so ist W. $FEA = SAC = 2\alpha$. Ist aber der leuchtende Punkt (das Object S) sehr fern, so kann die Linie FE als gleichfalls vom Punkte S herkommend angesehen werden; oder der vom Punkte S direct herkommende Lichtstrahl FE macht mit dem vom Spiegel reflectirten Strahle AE einen Winkel FEA, welcher der doppelten Höhe von S über dem Horizonte gleich ist.

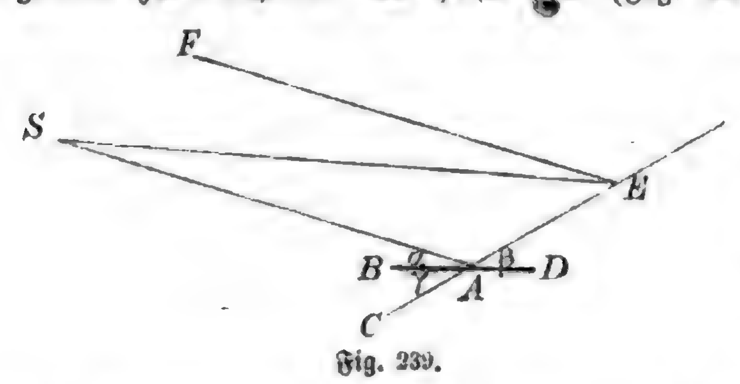


Fig. 239.

§. 217. Um nun mit dem Sextanten eine Höhe zu messen, faßt man ihn mit der rechten Hand bei seinem Griffe, bringt seine Ebene in eine verticale Lage, stellt den künstlichen Horizont so auf, daß man das Spiegelbild des Höhenobjects deutlich sehen kann, und richtet das Fernrohr nach diesem Spiegelbilde. Ohne nun das Bild aus dem Auge zu verlieren, löst man die Bremsschraube der Alhidade und schiebt letztere so weit über die Theilung fort, bis man auch das Bild im Gesichtsfelde hat, welches durch die direct vom Gegenstande auf den großen Spiegel des Sextanten fallenden, von da nach dem kleinen Spiegel und durch diesen in das Fernrohr reflectirten Strahlen hervorgebracht wird. Man stellt dann die Alhidade fest und corrigirt mittels der Mikrometerschraube, bis die Coincidenz der beiden Bilder erreicht ist. Der dann vom Limbus abgelesene Bogen ist der doppelte Höhenwinkel des gemessenen Objects, nämlich der Winkel FEA; dividirt man ihn durch 2, so hat man den gesuchten Winkel α. Jedoch ist dies nur in dem Falle streng wahr, wenn das Object S so weit entfernt ist, daß man einen Strahl SE als mit SA parallel ansehen kann; sonst ist der gemessene Winkel nicht FEA, sondern SEA, der dann nicht dem Winkel SAC, oder dem doppelten Höhenwinkel gleich ist.

In solchem Falle hat man aber immer, wenn man Fig. 240 zu Grunde legt, wo die großen Buchstaben die Bedeutung der vorigen Figur haben,

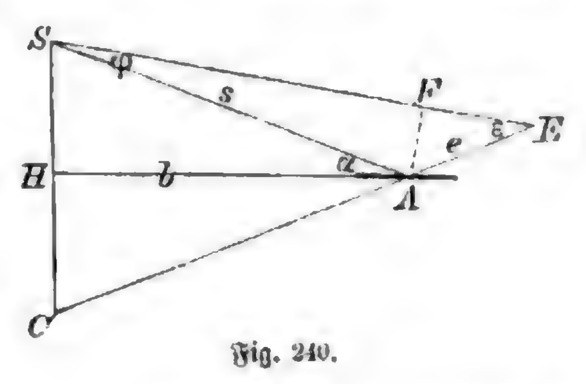


Fig. 240.

1) $2\alpha = \varepsilon + \varphi$.

Setzt man dann AE = e und AS = s, so ist: 2) $\sin\varphi = \frac{e}{s} \cdot \sin\varepsilon$,

woraus, wenn e und s bekannt wären, der Winkel φ, also dann auch α gefunden werden könnte. Nun kann zwar e gemessen werden, aber s wird meist nicht zu bestimmen sein; man muß sich daher mit einer annähernden Bestimmung von φ begnügen. Zieht man noch AH = b horizontal, d. h. senkrecht auf SC, so ist: 3) $b = s \cdot \cos\alpha$,

und nimmt man vorläufig das Verhältniß von α zu ε wie 1 : 2 an, so daß:

$$4)\quad \alpha = \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

so erhält man: $$b = s \cdot \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

oder: $$5)\quad s = \frac{b}{\cos \frac{1}{2}\varepsilon},$$

und danach: $$6)\quad \sin\varphi = \frac{e}{b} \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2}.$$

Den für einen besondern Fall aus (6) gefundenen Werth von φ setze man in (1) und bestimme danach α annähernd. Dadurch wird sich die Gleichung (4)

corrigiren und somit auch wieder der Werth von φ aus (6), wenn man darin den zuletzt aus (1) gefundenen Werth von α statt $\frac{1}{2}\varepsilon$ setzt. Mit diesem Werthe von φ aus (6) könnte man wieder α nach Gleichung (1), und mit diesem neuen Werthe von α den Werth von φ in Gleichung (6) verbessern, um zuletzt zu einem hinlänglich genauen Werthe von φ zu gelangen, welcher dann auch α mit ausreichender Genauigkeit bestimmen würde.

Gibt man dem Sextanten bei der Beobachtung eine solche Lage, daß A E oder e sehr klein im Verhältniß zu A S wird, so wird auch der Winkel φ nur sehr klein, und für solchen Fall läßt sich α noch bequemer bestimmen. Wegen Gleichung (2) ist dann nämlich:

$$\varphi = \frac{e \cdot \sin \varepsilon}{s \cdot \sin 1''} \text{ Secunden} \quad (\S.\ 24),$$

und nach (6): $$\varphi = \frac{2e \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon^2}{2}}{b \cdot \sin 1''} \text{ Secunden},$$

also nach (1): $$\alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{e \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon^2}{2}}{b \cdot \sin 1''}.$$

Aus dieser Discussion des vorliegenden Gegenstandes geht hervor, daß man eigentlich den Ort des künstlichen Horizontes als Scheitel des zu messenden Winkels betrachtet; ist daher der Scheitel dieses Winkels oder doch seine Horizontalprojection gegeben, so wird man in ihn oder doch in eine durch ihn gehende Verticale den künstlichen Horizont in einer solchen Höhe anbringen, daß man das Spiegelbild des zu messenden Höhenobjects bequem darin sehen kann.

§. 218. Wenn man ein und denselben Gegenstand (ein Object oder Signal u. s. w.) aus zwei verschiedenen Standpunkten anvisirt, so bilden die beiden Gesichtslinien einen Winkel mit einander, dessen Scheitel in dem anvisirten Punkte liegt. Dieser Winkel heißt der parallaktische Winkel oder die Parallaxe des Objects für die beiden angenommenen Standpunkte; bei einem Höhenwinkel heißt sie die Höhenparallaxe. Geschieht die Messung mittels des Spiegelsextanten und entsteht dabei eine Parallaxe wegen Anbringung des künstlichen Horizontes, sofern das Auge des Beobachters stets hinter diesem sich befinden muß, so heißt jener Winkel die Höhenparallaxe des Sextanten; der Winkel φ (Fig. 240) ist diese Parallaxe.

Zur Bestimmung des parallaktischen Winkels des Sextanten verfährt man auch wol in folgender Weise: man fällt von A (Fig. 240) aus das Loth A F auf S E und hat dann:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AF}{SF};$$

dann setzt man für A F und S F bestimmte Größen, wie sie in der Praxis

am häufigsten vorkommen, z. B. für AF nach einander 2, 3, 4, 5 .... Zoll, für jeden dieser Werthe von AF aber SF = 10, 20, 30, 40 .... Ruthen, berechnet nun für jeden Fall den Werth von φ und construirt sich so eine Tabelle, aus der dann für einen vorkommenden Fall der Werth von φ entnommen werden kann. Z. B.:

	10	20	30	40	50	60
2	6′52″,52	3′26″,26	2′17″,50	1′43″,17	1′22″,50	1′· 8″,75
3	10′18″,79	5′ 9″,39	3′26″,26	2′34″,69	2′ 3″,19	1′43″,13
4	13′45″,05	6′52″,52	4′35″,01	3′26″,26	2′45″,01	2′17″,51
5	17′11″,31	8′35″,66	5′43″,77	4′17″,83	3,26″,26	2′51″,88
6	20′37″,57	10′18″,79	6′52″,52	5′ 9″,39	4′ 7″,51	3′26″,26
7	24′ 3″,82	12′ 1″,92	8′ 1″,28	6′ 0″,96	4′48″,77	4′ 0″,64
8	27′30″,08	13′45″,05	9′10″,03	6′52″,52	5′30″,02	4′35″,02

Die erste Verticalreihe gibt die Größe AF in Decimalzoll, die erste Horizontalreihe SF in Ruthen an; die übrigen Zahlen sind die Werthe von φ, die zu jeder der möglichen Combinationen gehören. AF läßt sich wol ziemlich genau messen, aber SF wird bei einem Höhenobjecte immer nur geschätzt werden können, weshalb in dieser Bestimmung immer eine Unsicherheit bleibt.

§. 219. Die Prüfung eines Spiegelsextanten hat sich auf folgende Punkte zu erstrecken:

1) ob beide Glasflächen jedes Spiegels eben und mit einander parallel seien;
2) ob der große Spiegel auf der Sextantenebene senkrecht stehe;
3) ob der kleine Spiegel senkrecht zur Ebene des Sextanten stehe;
4) ob die Achse des Fernrohrs parallel zur Ebene des Sextanten sei;
5) ob der Limbus und Nonius richtig getheilt seien;
6) ob die farbigen Blendgläser auf beiden Seiten völlig plan, und ob beide Flächen mit einander parallel seien;
7) ob der Sextant einen Collimationsfehler habe, und welches seine Größe sei.

1. Die Untersuchung ad 1 wird nach §. 69 geführt.

2. Zur Prüfung ad 2 halte man den Sextanten so, daß der Limbus vom Beobachter abgekehrt ist, und gebe ihm eine horizontale Lage, sehe dann so in den großen Spiegel, daß man das Bild des Limbus darin erblickt, während man leicht auch den Limbus selbst sehen wird; fällt das Spiegelbild des Limbus mit dem direct gesehenen in eine Ebene zusammen, so steht der Spiegel senkrecht zur Ebene. Schiebt man bei dieser Prüfung die Alhidade nach und nach an verschiedene Stellen des Limbus und fallen dabei stets beide Bilder in eine Ebene, so überzeugt man sich dadurch von der richtigen

Bewegung der Alhidade und guten Beschaffenheit des Centralzapfens. Fielen aber die Bilder nicht in eine Ebene, so stände der Spiegel nicht senkrecht und man müßte den Fehler mittels der Correctionsschrauben des Spiegels verbessern. Fielen die Bilder bei gewissen Lagen der Alhidade zusammen, bei andern nicht, so läge der Fehler an der Bewegung der Alhidade, also wahrscheinlich an der mangelhaften Beschaffenheit des Centralzapfens. Vielleicht ließe sich dann durch festeres Anschrauben der an der Rückseite befindlichen Druckplatte helfen, sonst müßte der Zapfen durch einen neuen ersetzt werden.

3. Wegen der Prüfung ad 3 richte man das Fernrohr nach einem hellen Punkte, z. B. nach einem Stern, und stelle die Alhidade, also den großen Spiegel so, daß man auch das reflectirte Bild desselben Punktes wahrnimmt. Lassen sich nun beide Bilder genau zur Deckung bringen, so steht der kleine Spiegel senkrecht zur Sextantenebene, weil alsdann beide Spiegel parallel sind und der große schon senkrecht zur Ebene des Sextanten gestellt ist. Geht aber das eine Bild über oder unter dem andern fort, so muß man den kleinen Spiegel mittels der auf der Rückseite des Sextanten befindlichen und durch die Fußplatte des Spiegels gehenden Schraube so lange verstellen, bis beide Bilder zur Deckung gebracht werden können.

4. Um die Lage der Fernrohrachse zu prüfen, lege man in den Brennpunkt des Objectivs ein Diaphragma mit zwei von der Mitte gleichweit abstehenden parallelen Fäden, drehe die Ocularröhre so, daß die Fäden nach dem Augenmaße mit der Sextantenebene parallel sind, nehme die Sonne und den Mond, oder den Mond und einen Stern zu Objecten und bringe die Bilder beider an dem der Sextantenebene zunächst liegenden Faden in Berührung, bewege dann die Alhidade mittels der Mikrometerschraube so weit, daß die Bilder auch am andern Faden erscheinen. Bleiben sie auch da noch in Berührung, so hat die Achse des Fernrohrs die richtige Lage. Gehen sie aus einander, so ist das Objectivende, decken sie sich, so ist das Ocularende des Fernrohrs der Sextantenebene näher als das andere. Ein solcher Fehler in der Lage des Fernrohrs läßt sich nur durch Aenderung des Ringes, in welchen das Fernrohr eingeschraubt wird, verbessern.

5. Die Prüfung ad 5 wird nach §. 125 geführt.

6. Zur Prüfung der Blendgläser bringe man das directe und das reflectirte Bild eines Objects ohne Blendgläser zur Berührung, schiebe dann die verschiedenen Blendgläser einzeln vor, und untersuche, ob die Berührung der Bilder dadurch gestört wird oder nicht. Ein Glas, bei dem dies der Fall wäre, müßte gegen ein neues, das parallele Flächen hätte, vertauscht werden. Man könnte sich, wenn einige Gläser oder alle unrichtig befunden würden, auch dadurch helfen, daß man bei den Beobachtungen, welche einander entsprechen, z. B. bei der Winkelbestimmung zweier Objecte zum Einstellen auf

das linke und zur Hervorbringung der Coincidenz des rechten mit dem linken Object, sich derselben Blendgläser bediente, oder auch dadurch, daß man dieselben Gläser gebrauchte, welche man zur Bestimmung des Collimationsfehlers genommen hatte (vgl. Nr. 7). Das letztere Verfahren ist bequemer, weil man beim erstern jedesmal dieselbe Operation durchmachen müßte, wie bei der Bestimmung des Collimationsfehlers, wenigstens für das gerade zu bestimmende Object.

7. Um den Collimationsfehler des Sextanten zu finden, bringe man das directe und das reflectirte Sonnenbild zur Berührung, schiebe dann die Alhidade mittels der feinen Bewegung so viel weiter, daß die Bilder über einander fortgehen, bis zuletzt ihre Ränder auf der andern Seite wieder zur Berührung gekommen sind. Zuerst berühren sich also der rechte Rand des directen und der linke des gespiegelten Sonnenbildes, nachher der linke Rand des directen mit dem rechten des gespiegelten. Liest man bei der ersten Berührung den Stand a′ des Nonius ab, bei der zweiten a″, so können diese Ablesungen entweder von der Haupttheilung des Limbus, oder von der Excedenz, je nach dem Stande des Index, genommen sein; ersteres gibt eine positive, letzteres eine negative Größe der Ablesung. Die halbe Differenz dieser Ablesungen gibt den Collimationsfehler k des Sextanten; also ist:

$$- k = \frac{1}{2} (\bar{a}' - a'').$$

Der Collimationsfehler k ist positiv, wenn $a' > a''$, Null, wenn $a' = a''$, und negativ, wenn $a' < a''$ ausfällt. Der (positive oder negative) Collimationsfehler muß von allen Winkeln, welche man mit dem Sextanten gemessen hat, subtrahirt werden; man muß also den absoluten Werth des positiven Collimationsfehlers subtrahiren, den absoluten Werth des negativen addiren.

D. Nivellirinstrumente.

§. 220. Nivellirinstrumente dienen zur genäuen Messung geringer Höhenunterschiede des Terrains; auch müssen die Punkte, welche durch eine einzige Messung so bestimmt werden sollen, so nahe an einander liegen, daß man beide wenigstens aus der Mitte ihres Abstandes bequem übersehen kann. Hat man aber einen Punkt in Bezug auf einen andern rücksichtlich seiner Höhe bestimmt, so kann man einen dritten in Bezug auf den zweiten, einen vierten in Bezug auf den dritten bestimmen und so die Höhenunterschiede auch weit aus einander liegender Punkte finden. Damit aber der Höhenunterschied zweier Punkte sich durch ein Nivellement bestimmen lasse, ist durchaus erforderlich, daß die Steigung vom einen zum andern nicht sehr bedeu-

tend sei, wie aus der folgenden Erklärung hervorgehen wird, welche einen allgemeinen Begriff vom Nivelliren zu geben bestimmt ist.

Es sei (Fig. 241) AB ein abhängiges Terrain und die Aufgabe gestellt, zu bestimmen, um wie viel der Horizont von A höher liege als der von B. Man denke sich erst in dem höher gelegenen Punkte A eine Stange errichtet, die hier gewöhnlich eine Latte heißt, und entweder nach dem Augenmaß oder nach dem Lothe senkrecht gestellt; in der Mitte zwischen A und B werde ein Instrument aufgestellt, welches gestattet, in einer sonst beliebigen, jedoch für das Auge bequemen Höhe EF über dem Boden eine genau horizontale Visirlinie auf die Latte AD zu richten, das Instrument umzukehren und in gleicher Höhe horizontal von F nach der entgegengesetzten Seite zu visiren. Mißt man AD — wenn die Latte selbst getheilt ist, so kann man das Maß ohne weiteres ablesen — und trägt dann die Latte nach B, wo sie wieder lothrecht aufgerichtet wird, so läßt sich wieder der von F aus anvisirte Punkt C bemerken und seine Höhe BC über dem Boden messen oder ablesen. Denkt man sich durch A die Horizontale AH gelegt, so ist ADCH ein Rechteck, also CH = AD, folglich

Fig. 241.

$$BH = BC - AD$$

der Höhenunterschied oder das Gefälle zwischen A und B.

Zur ganzen Arbeit bedarf man also einer Latte und eines Instruments, welches die Herstellung einer horizontalen Visirlinie möglich macht. Zu letzterm Zwecke gibt es dreierlei Mittel: 1) das Senkloth in Verbindung mit einer darauf errichteten Senkrechten; 2) der Stand einer Flüssigkeit in den Schenkeln communicirender Röhren; 3) der Stand einer ausdehnsamen Flüssigkeit in einer tropfbaren, oder die Libelle. Danach theilt man denn die Nivellirinstrumente in Pendel-, Röhren- und Libelleninstrumente.

I. Die Nivellirlatte.

§. 221. Es gibt zweierlei Arten Nivellirlatten: bei der einen läßt sich eine runde oder quadratische Scheibe, die Zielscheibe, von etwa 8 Zoll Durchmesser oder Seite an einer getheilten Stange verschieben und in der Höhe der jedesmaligen Visirlinie feststellen; bei der andern Art dagegen liest

man die Zielhöhe mittels des Fernrohrs ohne weiteres von der Latte ab, weshalb denn gar keine Zielscheibe nöthig ist.

1. Die Nivellirlatte mit Zielscheibe.

§. 222. Die Nivellirlatte mit Zielscheibe besteht aus einer 12 Fuß langen, 2—2½ Zoll breiten und 1½ Zoll dicken Stange AB (Fig. 242), welche am untern Ende mit Eisen beschlagen ist. Auf einer Seite ist die Latte in Fuß, Zoll und Linien (oder doch Viertelzolle), oder auch blos in Zoll und Theile des Zolls getheilt, wie Fig. 243 zeigt. Die Zielscheibe abcd wird an ihrer Rückseite mit zwei festen Backen fg, hi (Fig. 244) versehen, so daß die Latte sich gerade zwischen den Backen verschieben läßt. Gegen die eine Backe hi ist eine eiserne Feder mn genagelt, um das zu leichte Verschieben der Scheibe über die Latte unmöglich zu machen, durch die andere fg ist von außen eine Druckschraube k geführt, durch welche die Backe, und damit der ganze über die Latte verschiebbare Apparat festgestellt werden kann. Ueber die Backen ist eine Blechplatte pqxy (Fig. 242 und 243) genagelt, die ein 3 Zoll hohes Fenster rsuv hat; die Mitte der Höhe dieses Fensters wird durch einen deutlich sichtbaren Strich αβ markirt. Die andere Seite der Zielscheibe, welche dem Beobachter zugekehrt ist, wird in vier abwechselnd roth und weiße Sectoren getheilt. Bei z (Fig. 244) trägt der Apparat einen Ring, an welchem eine Schnur w befestigt wird, welche man über eine am obersten Theil der Latte befindliche Rolle e (Fig. 242) führt. Der die Zielscheibe tragende Apparat wird so über die Latte geschoben, daß die Theilung auf die Seite des Fensters fällt, und während der Messung hebt und senkt ein Lattenführer die Zielscheibe mittels der Schnur ew so lange nach den Anweisungen des Beobachters am Fernrohr, bis die Marke αβ in die Höhe der Visirlinie kommt, wo er sie auf ein gegebenes Zeichen festschraubt; darauf wird die Ablesung an der Latte gemacht und aufgeschrieben.

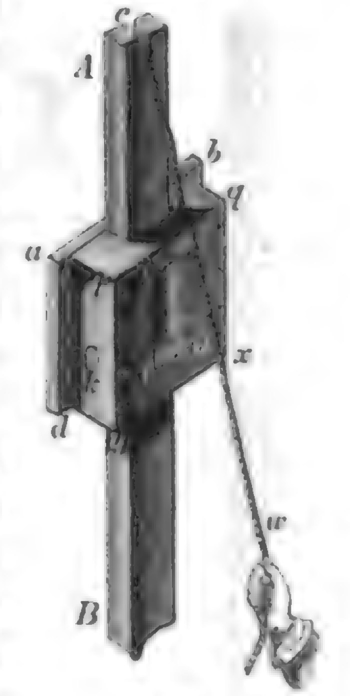


Fig. 242.

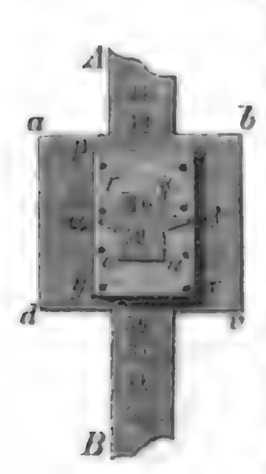


Fig. 243.

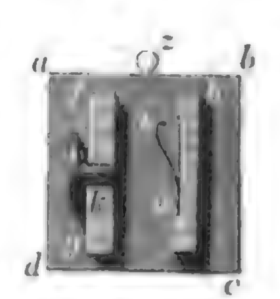


Fig. 244.

Um bei sehr abschüssigem Terrain die Zielscheibe in größere Höhe bringen zu können, dient die in Fig. 245 in der Seitenansicht, Fig. 246 von vorn gezeichnete Latte, welche vom kurhessischen Baurath Rudolph angegeben ist. Sie hat 12½ Fuß Höhe, ist in $^1/_{10}$ Fuß getheilt und mit Zielscheibe und

Nonius, der $^1/_{100}$ Fuß angibt, versehen. Zum Schieben der Zielscheibe y z ist die Vorrichtung a angebracht; mittels der Scheibe b kann sie festgestellt werden. Um eine Latte zu verlängern, dient die Einrichtung Fig. 247, die schon aus der Zeichnung deutlich wird.

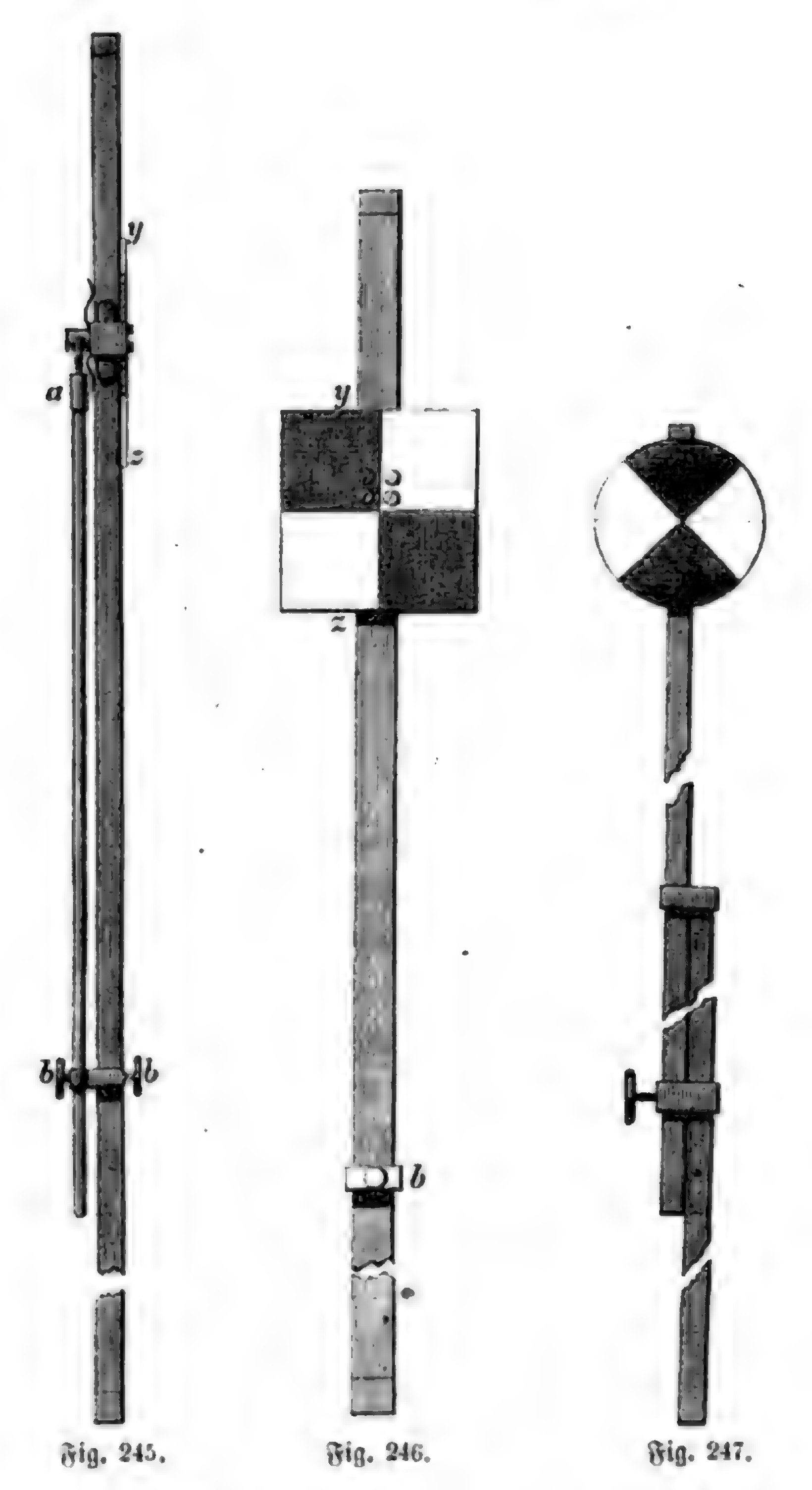


Fig. 245. Fig. 246. Fig. 247.

2. Die Nivellirlatte ohne Zielscheibe.

§. 223. Man bedient sich hierzu einfacher Latten von gleichen Dimensionen mit den vorigen, unten mit Eisen beschlagen und $4^1/_2$ Fuß vom untern Ende, bei M (Fig. 248) mit zwei Griffen zum Festhalten versehen. Die Eintheilung der Latte gibt nur Decimalzolle und Theile des Zolls an; von zwei zu zwei Zoll sind die Theilstriche durch verkehrt geschriebene Ziffern bezeichnet, welche man im Fernrohr aufrecht sieht. Der Abstand von je zwei Zollen ist in vier abwechselnd schwarz und

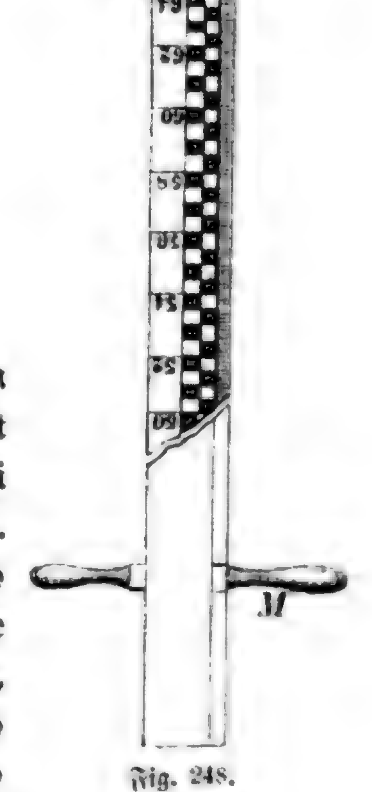


Fig. 248.

weiß bemalte Quadrate getheilt, jedes $^1/_2$ Zoll hoch, und jeder halbe Zoll ist durch schwarze und weiße Striche von $^1/_{10}$ Zoll Dicke in fünf gleiche Theile getheilt, so daß man also Decimallinien ablesen kann.

II. Nivellirinstrumente mit Pendel oder Loth.

§. 224. Dahin gehören die Setzwage und die Bergwage.

Die Setzwage ist das bekannte Werkzeug, dessen sich die Bauhandwerker bedienen, um horizontale Linien und Ebenen herzustellen; ihre Einrichtung beruht auf der Eigenschaft des Lothes, eine verticale Lage anzunehmen, und kann als bekannt vorausgesetzt werden. Zum eigentlichen Nivelliren kann sie nicht gebraucht werden, wol aber, um eine Linie oder Ebene auf ihre horizontale Lage zu prüfen.

§. 225. Die Bergwage oder der Böschungsmesser ist eine Setzwage mit einem Gradbogen DE (Fig. 249). Das Instrument, auf zwei etwas breitern Unterlagen Aa, Bb ruhend, dient dazu, die Neigung des Terrains zu messen, sollte dann aber allemal auf ein 8—10 Fuß langes Richtscheit gesetzt werden, welches mit der schmalen Kante auf den zu messenden Abhang gelegt wird, so daß es sich nicht biegen kann.

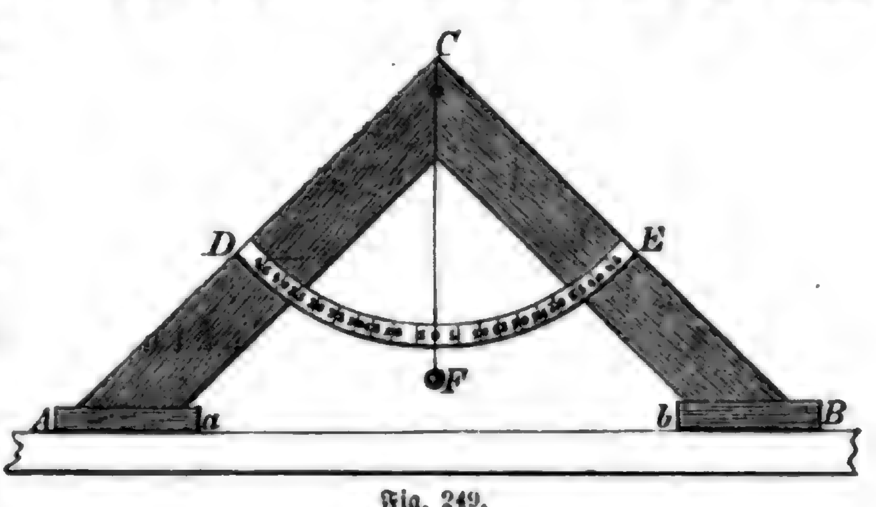


Fig. 249.

§. 226. Die Setzwage und der Böschungsmesser werden auf gleiche Art geprüft und berichtigt. Es sei ACB (Fig. 250) das eine oder andere dieser Instrumente, CP die Richtung des Lothes, welche allemal senkrecht sein wird, während AB nicht nothwendig senkrecht zu CP ist; im Falle daß CP schief auf AB steht, ist AB nicht horizontal. Man ziehe durch P die Gerade MPN senkrecht zu CP, also horizontal. Nun drehe man die Setzwage um, so daß zwar C wieder auf C fällt, aber AB in die entgegengesetzte Richtung BA, so kommt A in A',

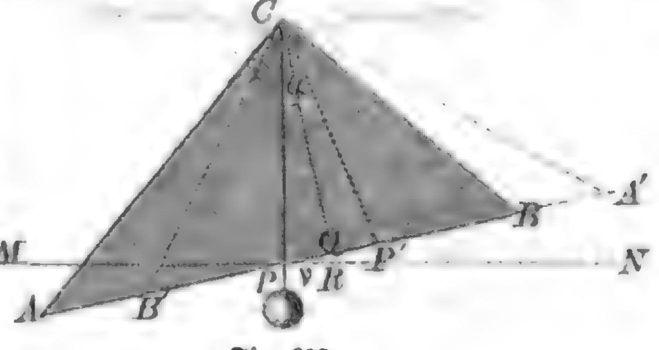


Fig. 250.

B in B′, P nach P′, während das Loth noch in CP fällt. Das Loth CP macht also gegen seine erste Lage CP′ den Ausschlag PCP′ = α, während BPN = ν die Neigung der AB gegen die Horizontale, oder die Abweichung des Winkels CPB vom rechten ist. Fällt man nun CQ senkrecht zu AB und verlängert CQ bis zum Durchschnitt mit MN in R, so ist CPR ein rechtwinkeliges Dreieck und PQ das Loth zur Hypotenuse, also W. QPR = PCR, und da CP = CP′ und W. CQP = 90°, so ist W. PCQ = P′CQ = $\frac{1}{2}\alpha$; also $\nu = \frac{1}{2}\alpha$, d. h. bei einer unrichtigen Setzwage ist die Abweichung der Basis von der Horizontalen, wenn das Loth in die vorgezeichnete Linie fällt, halb so groß als der Ausschlag des Lothes in den zwei entgegengesetzten Lagen der Wage; oder die Abweichung des Winkels CPQ vom rechten ist halb so groß als der erwähnte Ausschlag. Die Wage ist also richtig, wenn α = 0, oder wenn das Loth in beiden Lagen der Wage die gezeichnete Lothlinie deckt.

Man könnte eine unrichtige Setzwage dadurch corrigiren, daß man eine neue Lothlinie einrisse; das würde aber beim Gebrauche zu Irrungen Anlaß geben; überdies ginge dies beim Böschungsmesser nicht an, weil dann alle Grade des getheilten Bogens verändert werden müßten. Man wird daher bei beiden Instrumenten den Fehler lieber dadurch verbessern, daß man von der Basis auf einer Seite so viel abnimmt, bis das Loth in beiden Lagen einspielt.

III. Röhreninstrumente.

1. Die Kanalwage.

§. 227. Die Kanalwage, Wasserwage oder Nivellirwage (Fig. 251) besteht aus einem messingenen, an beiden Enden rechtwinkelig umgebogenen, 3—4 Fuß langen, 1 Zoll weiten Rohre AB, in dessen aufrechte Schenkel Glasröhren ab, cd von 1 Zoll Weite eingekittet sind. Das Ganze wird mittels des Hohlkegels C auf einem dreifüßigen Stativ so befestigt, daß es sich horizontal stellen und in der Horizontalebene herumbewegen läßt. Auf dem Zapfen des Stativs wird es, wenn die richtige Lage gefunden ist, durch die Schraube f festgeklemmt. Beim Gebrauche gießt man in die Röhren gefärbtes Wasser, dessen Oberflächen in beiden Schenkeln gleich hoch, also in einer horizontalen Ebene stehen werden. Dazu ist aber erforderlich, daß beide Röhren gleich weit seien, weil sonst das

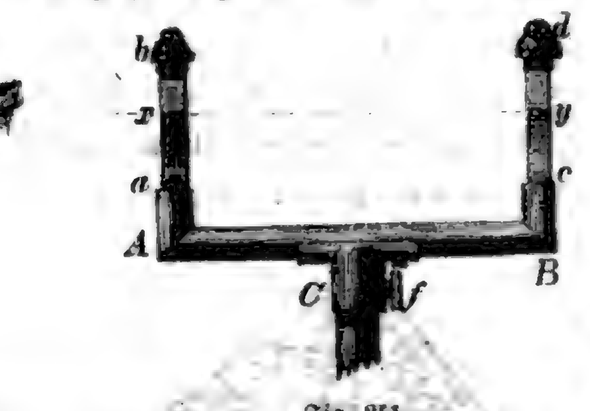


Fig. 251.

Wasser, vermöge der Adhäsion an den Wänden, in der engern Röhre etwas höher stehen würde als in der weitern. Visirt man dann in der Richtung x y beider Niveaux, aber nicht durch das Glas, sondern in der in der Höhe der Niveaux an die Glascylinder gelegten Tangente, so liegt das Auge mit dem in der Ferne gesehenen Objecte in derselben Horizontalen, d. h. man hat die durch das Object gehende Horizontale gefunden, oder man hat den mit beiden Niveaux in einer Höhe liegenden Punkt auf einem entfernten Gegenstande, z. B. einer Latte gefunden.

Des bequemern Transportes wegen werden die Glasröhren gewöhnlich mit genau schließenden Korkstöpseln verschlossen; am besten dürften Messingdeckel sein, welche die Röhren umfassen, während sie inwendig einen in die Röhre passenden Kork tragen. Damit nicht ein ungleicher Luftdruck in beiden Röhren stattfinden könne, müssen diese Deckel der äußern Luft Zutritt gestatten, ohne daß jedoch das Wasser beim Schütteln ausfließen kann. Dies dürfte am leichtesten durch ein in eine ganz feine Spitze auslaufendes konisches Röhrchen zu erreichen sein, das man durch die Fassung und den Kork, mit der Spitze nach innen gekehrt, einlassen könnte.

Man hat die Kanalwage noch dadurch verbessert, daß man in die Glasröhren einen kleinen Messingkegel eingebracht, mit der Spitze nach oben gekehrt; die kleine Oeffnung an der Spitze des Kegels hat höchstens zwei Millimeter Durchmesser, und die ganze Vorrichtung dient dazu, einmal das allzu heftige Schwanken des Wassers zu verhindern, dann aber auch zu verhüten, daß beim Eingießen des Wassers Luft in die horizontale Zwischenröhre gelange, welche, da sie leichter ist als das Wasser, einen ungleichen Stand der Niveaux bewirken würde.

Bei der Kanalwage ist nur zu prüfen, ob die Glasröhren eine ausreichende und gleiche Weite haben.

2. Die Quecksilberwage.

§. 228. Seit man gewohnt worden, höhere Anforderungen an Nivellirarbeiten zu stellen, ist dieses Instrument fast ganz außer Gebrauch gekommen. Da es indessen sich doch hier und da noch vorfindet, wohin die Kenntniß der Instrumente aus den bessern Werkstätten nicht hingedrungen ist, mögen ihm einige Worte gewidmet sein.

Die Quecksilberwage besteht aus zwei vierseitig prismatischen Gefäßen A, B (Fig. 252) aus Eisen, welche durch eine 1 — 2 Fuß lange Röhre verbunden sind, also ein System communicirender Röhren bilden. Gefäße und Röhren werden mit Quecksilber gefüllt; auf das Quecksilber setzt man zwei mit Diopteren α, β versehene Würfel von Elfenbein C, D. Das Oculardiopter besteht aus einem feinen Loche, das Objectivdiopter aus einem hori-

zontal über eine Oeffnung gespannten Faden. Eine gerade Visirlinie durch α, β bestimmt offenbar die Horizontale. In der Mitte der Röhre ist eine Hülse E angebracht, mit welcher das Instrument auf den Zapfen eines Statives gesetzt werden kann. Beim Transporte werden die Würfel C, D aus dem Quecksilber herausgenommen und in dem hohlen Raume F verwahrt. Die Oeffnungen der Röhren verschließt man mit festen Deckeln, die durch Zwingen, wie Z, mittels einer Druckschraube v festgehalten werden; Z ist nämlich ein eiserner Rahmen oder viereckiger Ring, der von A und B aus über das vorher zugedeckte Gefäß geschoben und festgeschraubt wird. Um das Schütteln des Quecksilbers möglichst zu verhindern, ist der Zusammenhang der Gefäße A, B mit der Zwischenröhre durch ganz enge Oeffnungen x vermittelt.

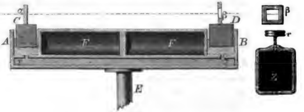


Fig. 252.

An der Quecksilberwage ist zu prüfen, ob die Diopter, wenn sie auf das Quecksilber gesetzt sind, dort in gleicher Höhe schwimmen. Dies erfährt man leicht dadurch, daß man von einem Punkte P nach einem andern Q visirt und auf einer Latte die Zielhöhe bemerkt, dann aber die Diopter vertauscht und zusieht, ob die jetzige Visirlinie denselben Punkt gebe. Eine etwa sich nothwendig machende Berichtigung dürfte indeß nur vom Mechanikus auszuführen sein, da der Fehler von verschiedenen Ursachen herkommen kann; entweder haben die beiden Würfel ungleiche Schwere oder die Diopter stehen in ungleicher Höhe über den Würfeln.

IV. Libelleninstrumente.

§. 229. Die Libelleninstrumente sind rücksichtlich ihrer Genauigkeit allen andern zu gleichem Zwecke bestimmten Apparaten vorzuziehen. Ihre wesentlichsten Bestandtheile sind: die Libelle, ein Diopter oder Fernrohr und der Fuß zum richtigen Aufstellen des Instruments, welcher letztere mit den im Frühern schon beschriebenen Stativen anderer Instrumente übereinstimmend gebaut ist.

1. Das Nivellirdiopter.

§. 230. Auf einer 1 — $1\frac{1}{2}$ Fuß langen Messingplatte AB (Fig. 253) sind zwei zur Doppelvisur eingerichtete Diopter angebracht; die Diopter sind hier natürlich neben einander, wie C′, D′ zeigen, d. h. der horizontale Faden des Objectivs geht durch den Mittelpunkt der auf derselben Platte befindlichen Ocularöffnung. Dieselbe Messingplatte trägt in ihrer Mitte eine Röhrenlibelle EF, mit einem Correctionsschräubchen v, wodurch die Achse der Libelle mit den Visirlinien parallel gestellt werden kann. Die Schraube v ist zur Verhinderung eines todten Ganges von einer Spiralfeder umgeben, während v selbst sich in die Fußplatte AB einschraubt. Es muß nun aber auch der Diopterträger AB nach der Libelle horizontal gestellt werden können. Dies geschieht mittels der Messingplatte GH. G ist ein gabelförmiger Ansatz an AB, durch jeden Schenkel von G geht eine Schraube, welche in einer Spitze endigt und damit in eine entsprechende Vertiefung der Platte GH eingreift, so daß GH sich um diese beiden Spitzen als um eine horizontale Achse in der Verticalebene auf und nieder bewegen läßt; diese Bewegung wird durch die Schraube J bewirkt, während die in der Figur sichtbare Feder die Platte immer gespannt hält, um jeden todten Gang der Schraube zu verhindern. Die vier Schrauben a und das Kugelgewinde b dienen zur Stellung des Ganzen in annähernd verticaler Lage, während die vollkommene Einstellung der Libelle mit der Schraube J bewirkt wird.

Fig. 253.

Die Prüfung und Berichtigung dieses Instruments, welche sich lediglich auf die Lage der Libelle zu beschränken haben, werden wie beim Theodoliten (§. 211, 1) ausgeführt.

Professor Stampfer in Wien hat das Nivellirdiopter dadurch verbessert, daß er statt der Diopter ein Fernrohr ohne Vergrößerung angebracht; dieses besteht aus zwei Converlinsen von $1\frac{1}{4}$ Zoll Brennweite und 2 — 3 Linien Oeffnung; das Bild entsteht in der Mitte zwischen beiden Linsen, wo ein Fadenkreuz eingesetzt ist. Die Vortheile dieser Einrichtung sind, daß man,

Digitized by Google

was bei Diopteru nie der Fall ist, den Faden und das Object gleich deutlich sieht und ohne Drehung des Instruments vor= und rückwärts visiren kann. Die Libelle kann natürlich neben, über oder unter dem Rohre liegen.

2. Nivellirinstrument mit Fernrohr.

§. 231. Ein achromatisches Fernrohr A B (Fig. 254) mit Fadenkreuz ist auf die schon bekannte Weise mit der Libelle C D verbunden; letztere dreht sich bei C um eine horizontale Achse und hat bei D eine Correctionsschraube v; der Halter E F ist mit der Platte GH so verbunden, daß er sich bei H

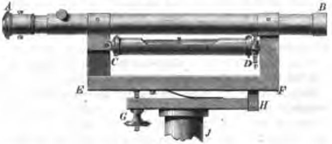


Fig. 254.

um eine horizontale Achse drehen läßt. Mittels der Hülse J wird das Instrument auf ein geeignetes Stativ gesetzt und durch Schrauben festgeklemmt.

Prüfung, Berichtigung und Gebrauch des Instruments können als bekannt vorausgesetzt werden.

3. Nivellirinstrument von Ertel und Sohn in München.

§. 232. Auf einem dreifüßigen Stativ A A (Fig. 255) ruht das Instrument mit seinen drei Fußschrauben s. Der Fuß F hat einen durchbohrten Ansatz a; die Durchbohrung nimmt den Haken hh' auf, welcher wieder durch eine Durchbohrung in der Mitte der Kopfplatte A A geht und unterhalb von der Spiralfeder p umgeben wird; die sich oben gegen die Kopfplatte, unten gegen die Mutter m stützt und denselben Zweck hat, wie die Spiralfeder beim Theodoliten; n ist eine zweite Mutter, welche das freiwillige Aufgehen der ersten hindern soll. Mit dem Fuße F ist der senkrechte Zapfen Z, mit diesem der Horizontalkreis H durch Speichen verbunden. Die Büchse B ist um den Zapfen Z drehbar und steht mit dem Alhidadenkreise A' in Verbindung; letzterer kann durch eine Klemmschraube gebremst werden; eine Mikrometerschraube gestattet dann noch eine feine Bewegung. Diese beiden Schrauben sind in unserer Durchschnittszeichnung nicht sichtbar, haben aber genau dieselbe Einrichtung wie beim Theodoliten. Die Büchse B theilt sich nach oben

Digitized by Google

in die zwei Arme r, r; diese tragen die horizontale Achse x x, um welche sich ein Halbcylinder c in der Verticalebene drehen läßt; dieser Halbcylinder dient als Lager für das Fernrohr T. Gegen jedes Ende hin ist das Fernrohr von einem messingenen Ring umgeben und ruht mit diesen Ringen in den genau cylindrisch ausgeschliffenen Endstücken des Halbcylinders. Das

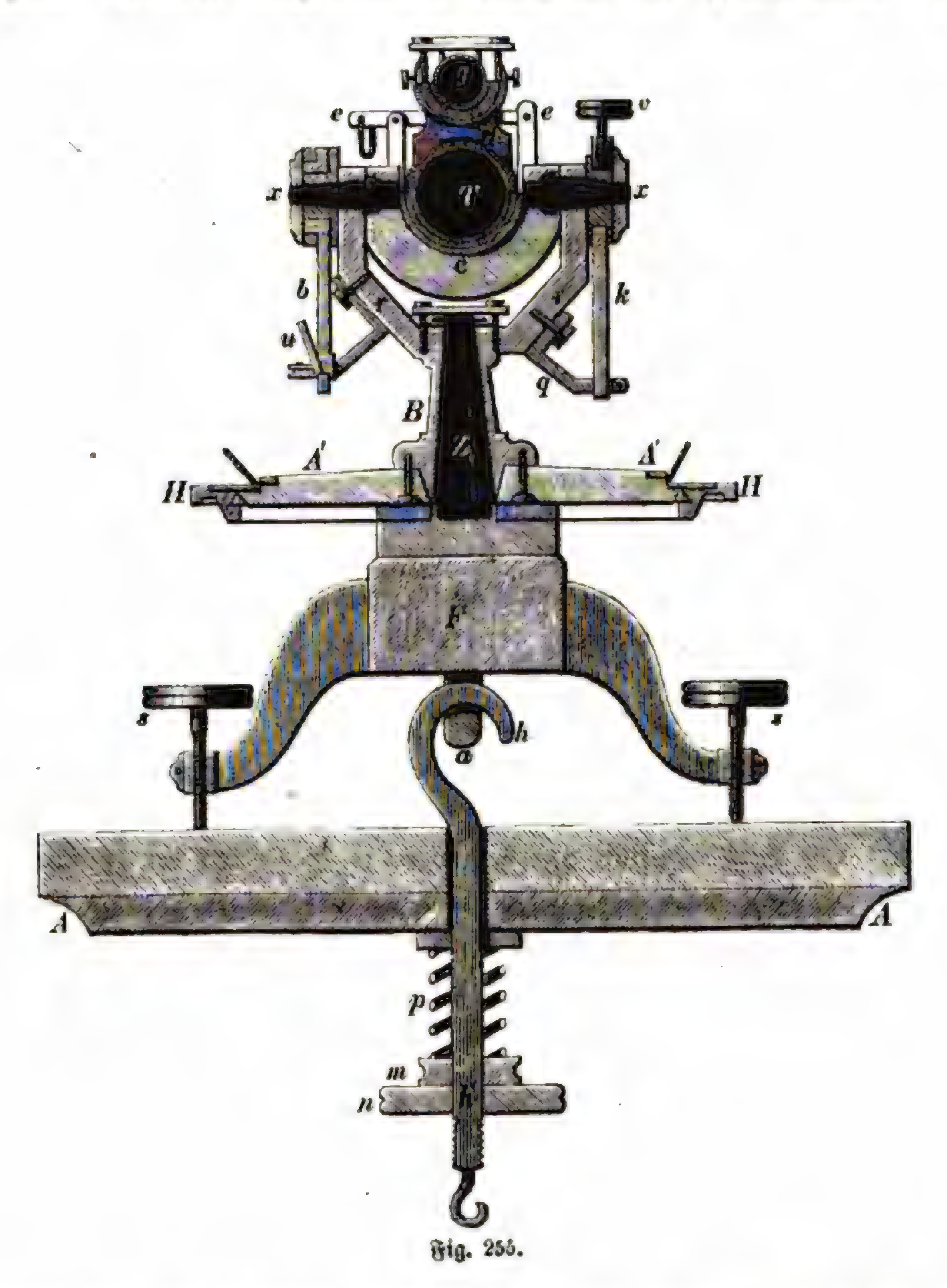


Fig. 255.

Fernrohr kann sich innerhalb des Lagers um seine optische Achse drehen, während das Lager mit dem Fernrohr zugleich um die Achse x x drehbar ist. Auf dem Fernrohr T stehen die cylindrischen Füße d einer Röhrenlibelle g; sie läßt sich umsetzen und wird durch die Schließen e festgehalten. An der Drehachse x x des Fernrohrs ist ein Gradbogen b angebracht, der jedoch nur 90°

umfaßt, so daß man Höhen- und Tiefenwinkel von je 45° damit messen kann. Der Gradbogen ist zugleich mit der Achse xx drehbar; seine grobe Bewegung wird durch die Schraube v gehemmt, wenn diese angezogen wird und dadurch einen Druck auf die Achse xx ausübt. Auch die Theilung des verticalen Kreisbogens b hat eine Mikrometerschraube, durch welche eine feine Bewegung dieses Gradbogens und des Fernrohrs möglich wird; sie wird durch den Hebel k und den Arm q vermittelt. Der zu dieser Theilung gehörige Nonius u ist am Ständer r fest; jedoch ist derselbe mit Correctionsschrauben versehen, welche eine Verschiebung desselben gestatten, um dadurch den Collimationsfehler zu heben.

§. 233. An diesem Instrumente ist zu prüfen:

1) ob das Objectiv richtig centrirt sei;
2) ob das Fadenkreuz sowol nach der Längenrichtung des Fernrohrs als auch seitlich die richtige Lage habe;
3) ob die Achse der Libelle mit der optischen Achse des Fernrohrs parallel sei;
4) ob die Ringdurchmesser des Fernrohrs genau gleich seien.

Die Untersuchungen ad 1 und 2 sind nach §. 94, die ad 3 ist nach §. 152 zu führen. Die Nothwendigkeit der Prüfung ad 4 beruht auf dem Verfahren bei der Prüfung der Libelle ad 3. Die Lager des Fernrohrs liegen nämlich nur dann in einer Cylinderfläche, wenn beide Ringe gleich groß sind (daß ihre Ebenen parallel sein müssen, versteht sich von selbst); folglich ist der Cylindermantel des Fernrohrs auch nur unter dieser Bedingung mit der optischen Achse parallel; berichtigt man nun die Libelle so, daß ihre Achse mit dem Cylindermantel parallel wird, so ist sie mit der optischen Achse nur dann parallel, wenn diese selbst dem Cylindermantel parallel ist, d. h. wenn die Lager des Fernrohrs genau gleich groß sind. Ist dies letztere der Fall, so ist von selbst klar, daß man das Fernrohr sammt der Libelle in seinen Lagern umlegen kann, ohne im Stande der Luftblase eine Aenderung zu machen; ist dagegen der eine Ring größer als der andere, so wird die Luftblase, wenn sie auch vorher einspielte, nach dem Umsetzen einen Ausschlag geben, welcher viermal so groß sein wird als die Neigung der Libellenachse gegen die Achse der Ringe.

Ist nämlich mn (Fig. 256) oder aa' die Grundlinie beider Lager, mc der Durchmesser des kleinern, nf der des größern Ringes, pq die gemeinsame Achse beider Ringe, also auch die optische Achse des Fernrohrs, lb die Libellenachse, so ist, nach der Berichtigung der Libelle, lb $\nparallel$ cf und Winkel cap = φ die Neigung der Libellenachse gegen die optische Achse des Fernrohrs; da die Libelle nach der Berichtigung einspielt, so ist lb horizontal, folglich bezeichnet φ die Neigung der Fernrohrachse gegen den Horizont. Kehrt

man nun das Fernrohr um, so daß seine Achse in die Lage p'q', die Libellenachse in die Lage l'b' kommt, und überhaupt alle Punkte in die mit denselben,

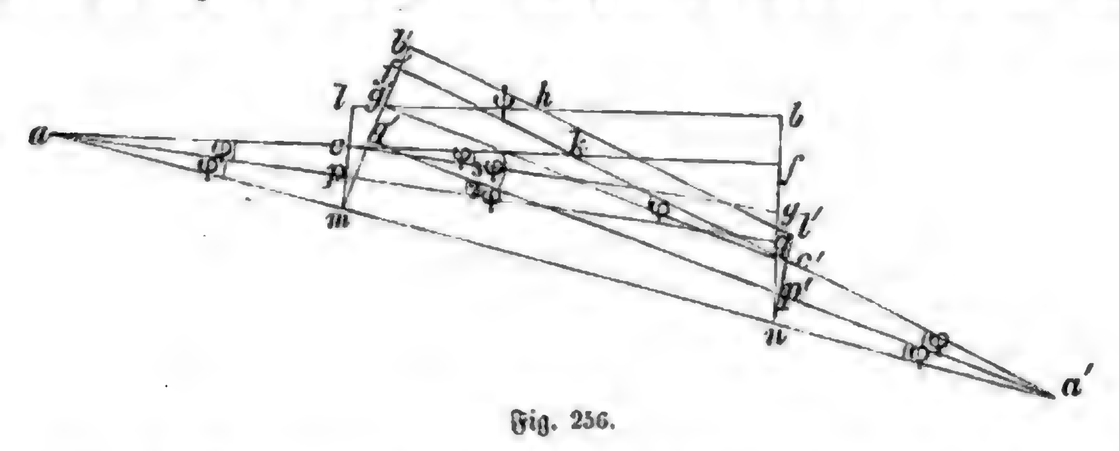


Fig. 256.

ben, aber mit Kommaten versehenen Buchstaben bezeichneten zu liegen kommen, so ist jeder Theil der Figur a'm b'l' dem entsprechenden a n b l identisch, und Winkel b'h l = ψ die Neigung der Libellenachse gegen den Horizont nach dem Umsetzen des Fernrohrs. Es ist also:

$$W.\ qan = q'a'm = faq = f'a'q' = \varphi,$$

also $$W.\ faa' = f'a'a = 2\varphi$$

und $$W.\ f'ka = 4\varphi,$$

weil f'k a Außenwinkel zum Dreieck k a a' ist; aber W. f'k a ist = W. b'h l, d. h. gleich der Neigung der Libellenachse nach dem Umsetzen des Fernrohrs; denn die Schenkel beider Winkel sind paarweise parallel. Also ist:

$$\psi = 4\varphi.$$

Setzt man mc = 2r, nf = 2r' und die gegenseitige Entfernung cf der Ringe = e, zieht noch cg ⫲ pq, so ist W. fcg = φ, fg = fq — cp = r' — r und pq = e, also:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r' - r}{e}.$$

Visirt man aber um den W. φ falsch, so fehlt man in der Lattenhöhe auf die Entfernung E um:

$$f = E \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{E}{e}(r' - r'),$$

weil $\frac{f}{e} = \operatorname{tg}\varphi$, wenn f die Erhöhung über oder Erniedrigung unter der Horizontalen bedeutet. Betrüge der Unterschied in den Halbmessern der Ringe $\frac{1}{20}$ Linie, und wäre e = 6 Zoll, E = 100 Fuß, so betrüge der Fehler f, wenn nach Decimalmaß gerechnet wird, 8,33.. Linien. Diesen Fehler kann aber ein in einen der Ringe oder unter einen Fuß der Libelle gerathenes Sandkörnchen herbeiführen, weshalb daraus entnommen werden mag, wie wichtig es ist, das Instrument vor Staub zu bewahren.

Um das Nivellirinstrument auf den hier besprochenen Fehler zu prüfen,

wird man es also horizontal aufstellen, das Fadenkreuz auf eine in schicklicher Entfernung aufgerichtete Latte richten, den Punkt bemerken, den es deckt, dann das Fernrohr um 180° im Azimuthe herumdrehen, es umlegen und prüfen, welchen Punkt der Latte das Fadenkreuz jetzt deckt, oder auch den Ausschlag der Libelle beobachten. Sind die Ringe fehlerfrei, so muß das Fadenkreuz denselben Lattenpunkt decken und die Libelle einspielen. Rührt ein so gefundener Fehler nicht von eingedrungenem Staube oder Sand her, so ist es am besten, den einen Ring gegen einen neuen von richtiger Weite zu vertauschen, was man in jeder guten mechanischen Werkstatt erlangen kann. Freilich gibt es auch Mittel, den Fehler unschädlich zu machen. Man prüfe z. B. wie groß sein Betrag f in der Entfernung von 100 Fuß sei, und berechne dann den einer andern Entfernung E zukommenden Fehler x nach der Proportion:

$$100 : E = f : x,$$

weil nach der oben gefundenen Formel in der That der Fehler der jedesmaligen Entfernung E proportional ist.

4. Breithaupt's großes Nivellirinstrument.

§. 234. Dieses Instrument hat einen Horizontal- und Höhenkreis, dient also zugleich, um Horizontal- und Höhenwinkel zu messen und zum Nivelliren. Der Körper des eigentlichen Nivellirinstruments steht mittels dreier Stellschrauben auf der Kopfplatte eines Dreifußes, durch deren Mitte die Verlängerung des untern Centralzapfens hindurchgeht und ebenso an die Platte befestigt wird, wie beim Theodoliten. Die Einrichtung des Horizontalkreises ist auch dieselbe wie bei diesem; der Verticalkreis jedoch bietet nur zwei einander im Scheitel gegenüberstehende Bogen für Höhen- und Tiefenwinkel bis zu 50°. Den innern Zusammenhang dieser Theile zeigt der Durchschnitt Fig. 257, das Instrument im Ganzen Fig. 258, wo gleiche Buchstaben auch dieselben Theile wie im Durchschnitt bezeichnen; der Durchschnitt zeigt jedoch nur den obern Aufsatz, während die letztere Figur das ganze Instrument sammt dem Stativ darstellt.

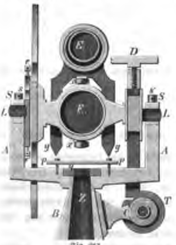


Fig. 257.

Der Centralzapfen Z trägt die Büchse B, mit welcher die Alhidade in Verbindung steht; die Schraube y oben am Zapfen Z verhindert das Herabsinken

Digitized by Google

des Zapfens, die federnde Platte p das Abheben der Büchse B. Oberhalb des Horizontalkreises theilt sich die Büchse B in zwei gabelförmige Arme A, A, welche die Lager L, L für das Fernrohr F aufnehmen; die Zapfen der Fernrohrachse werden durch die Schließen S, S in den Lagern festgehalten, die Schließen aber durch Schrauben s, s′ auf den Lagern befestigt; beim Umlegen des Fernrohrs muß man die Schrauben s, s′ lösen und wenn das Fernrohr seine neue Lage bekommen hat, wieder einschrauben. Eine Druckschraube D ist dazu bestimmt, die grobe Drehung der Verticalbewegung zu

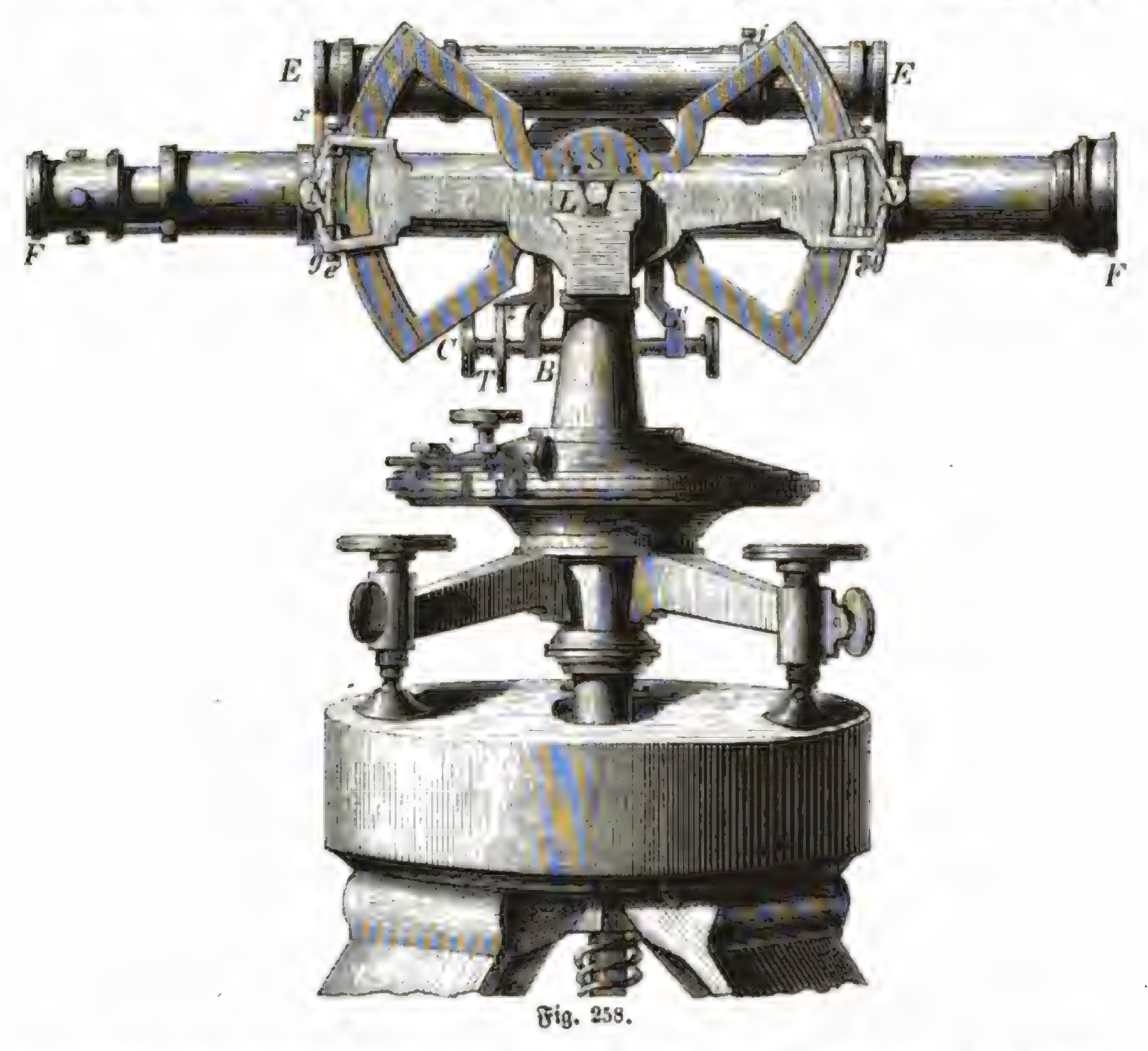


Fig. 258.

hemmen, die Mikrometerschraube C bewirkt die feine Bewegung des Verticalkreises. Herr Breithaupt hat hier das Princip der Differentialschraube in der §. 135 beschriebenen Weise mit dem der Mikrometervorrichtung verbunden. Die Schraube C hat nämlich zwei nur wenig von einander verschiedene Gewinde, das größere geht durch den Arm G, das feinere durch G′ hindurch; ist nun z. B. der Arm G festgeklemmt, G′ aber nicht, d. h. ist G fest mit dem Gradbogen, G′ dagegen mit der Drehachse des Fernrohrs fest verbunden, so muß das Fernrohr sich bei einer Umdrehung der Schraube C um den

Digitized by Google

Unterschied beider Gewindhöhen um seine Achse drehen. Die am Umfange getheilte Trommel T mit dem Zeiger z gestattet noch, je nach der auf der Trommel angebrachten Theilung, beliebige Bruchtheile einer Umdrehung zu bestimmen. Die Nonien N, N geben die Winkel unmittelbar auf 10 Secunden an; die Mikrometervorrichtung in Verbindung mit der Differentialschraube gestattet die Ablesung einzelner Secunden. Der Höhenkreis hat 8, der Horizontalkreis 7 Zoll Durchmesser; beide sind in $1/_6$ Grade getheilt und 59 solcher Theile auf dem Nonius in 60. Beim Höhenkreise können die Nonien N, N mittels der Stellschräubchen e, e′ etwas verschoben werden, um den Collimationsfehler dadurch zu heben. Das Fernrohr gibt fünfunddreißigmalige Vergrößerung. Die Libelle EE ist nicht wie bei dem Ertel'schen Nivellirinstrumente unmittelbar auf die Wölbung des Fernrohrs gesetzt, sondern auf die eben abgeschliffenen und gehärteten Stahlköpfe je zweier Stellschräubchen x, x und x′, x′ (Fig. 257) gelegt und durch gabelförmige Füße g, g, die sich an die Seiten der Objectivröhre anlegen, vor Seitenbewegungen geschützt. Wenn die Libelle in der einen Lage auf den Schräubchen x, x ruht, und man nimmt das Fernrohr aus seinen Lagern heraus und wendet es um, so kommt die Libelle dann auf x′, x′ zu liegen, nimmt also die Lage an, die sie haben würde, wenn man das Fernrohr ohne die Libelle durchschlüge und letztere wieder oben auflegte. Bei einer Linie Ausschlag gibt die Libelle 5 Secunden an.

§. 235. Bei der Prüfung dieses Nivellirinstruments hat man folgende Punkte zu berücksichtigen:

1) ob die Libellenachse mit der durch die Auflagepunkte bestimmten Linie xx oder x′x′ parallel sei;

2) ob die Linien xx und x′x′ selbst mit einander parallel sind;

3) ob die optische Achse des Fernrohrs den Linien xx und x′x′ parallel sei oder die Abstände xx′ halbire;

4) ob die optische Achse des Fernrohrs bei der Drehung des letztern um seine Drehachse sich in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene bewege;

5) ob die Nonien des Höhenkreises einen Collimationsfehler haben.

1) Zur Prüfung ad 1 bringe man die Libelle mittels der Schraube C, welche die Neigung des Fernrohrs und damit der Libelle regulirt, zum Einspielen, setze die Libelle um und corrigire den jetzigen Ausschlag zur Hälfte mittels der Justirschrauben i der Libelle, und zur Hälfte entweder durch die Schraube C oder durch eine der Stellschrauben des Fußes. Nun setze man die Libelle wieder um, verfahre ebenso und setze diese Operation so lange fort, bis die Libelle in beiden Lagen einspielt. Lag die Libelle hierbei auf

dem Schräubchen xx, und man will ihre Lage zu x′x′ prüfen, so lege man das Fernrohr um, d. h. man drehe es um seine optische oder Drehachse (beides bringt x′x′ nach oben) und verfahre ebenso wie vorher.

2) Um die Prüfung ad 2 auszuführen, setze man die berichtigte Libelle auf die Köpfe x, x, corrigire ihre Lage so, daß die Blase einspielt, und lese möglichst genau den Stand der beiden Nonien des Höhenkreises ab; aus beiden Ablesungen nehme man das arithmetische Mittel. Dann lege man das Fernrohr so um, daß es als durchgeschlagen erscheint, daß also die Zapfen der Drehachse nicht ihre Lager wechseln, setze die Libelle auf x′x′, bringe sie wieder zum Einspielen und lese beide Nonien ab. Ist das Mittel aus den jetzigen Ablesungen dem der vorigen gleich (abgesehen davon, daß sie verschiedene Vorzeichen haben, d. h. daß das eine einen Höhen-, das andere einen Tiefenwinkel angibt), so ist xx $\nparallel$ x′x′. Sind aber die beiden Mittel, absolut genommen, nicht einander gleich, so muß der Fehler dadurch verbessert werden, daß man eine der Schrauben x′, x′ anzieht oder löst, bis die Uebereinstimmung der beiden Mittel aus den Ablesungen erreicht ist.

3) Die optische Achse des Fernrohrs ist den Linien xx und x′x′ parallel, wenn sie, nachdem das Fernrohr umgelegt (in die Lage gebracht, wie wenn es durchgeschlagen worden) und um 180° im Azimuth gedreht, ihre erste Lage wieder annimmt. Man richte daher das Fernrohr, nachdem die Berichtigungen 1 und 2 ausgeführt sind, auf eine in 100 bis 200 Fuß Entfernung aufgestellte Latte, bringe die Libelle zum Einspielen, und lese den Punkt ab, der vom horizontalen Faden des Fadenkreuzes gedeckt wird. Dann lege man das Fernrohr so um, daß die Zapfen der Drehachse ihre Lager nicht wechseln, und drehe es um 180° im Azimuth, lasse die Blase wieder einspielen und lese an der Latte den jetzt anvisirten Punkt ab. Stimmt er mit dem vorigen überein, so hat die optische Achse ihre richtige Lage; findet aber eine Abweichung beider Ablesungen statt, so muß der Fehler dadurch corrigirt werden, daß man den Horizontalfaden des Fadenkreuzes genau auf die Mitte zwischen beiden Ablesungen mittels der Stellschräubchen des Fadenkreuzes verschiebt. Die Wiederholung der Operation wird zeigen, ob diese erste Verbesserung den rechten Punkt getroffen hat oder nicht; im letzten Falle muß nochmals ebenso verfahren werden.

4) Die Prüfung und Berichtigung ad 4 wird ebenso ausgeführt wie beim Theodoliten (§. 211, 3).

5) Auch den Collimationsfehler des Nivellirinstruments findet man wie beim Theodoliten (§. 211, 4); ist ein solcher vorhanden, so hebt man ihn mittels Verschiebens der Nonien durch die Schräubchen e, e′.

§. 236. Die Vortheile dieser neuen Breithaupt'schen Construction sind

in die Augen fallend. Bei den ältern Instrumenten, wo die Libelle mit ihren hohlen Cylinderfüßen auf dem cylindrischen Fernrohr sitzt, kann erstlich, wie §. 233 gezeigt worden, ein fast unmerklicher Unterschied in den Krümmungshalbmessern einen sehr wesentlichen Unterschied in den entfernten Zielpunkten veranlassen. Durch das öftere Umsetzen der Libelle aber werden auch genau gleiche Durchmesser zuletzt doch ungleich werden, da das weiche Messing sich bei der Manipulation abnutzt; diese Abnutzung wird auch nicht auf beiden Aufsatzpunkten genau gleich sein, sonst würde es ja nicht schaden; es wird aber die Ungleichheit der Durchmesser so allmählich und langsam, ja unmerklich zunehmen, daß man unfehlbar längere Zeit mit einem unrichtigen Instrumente arbeitet, ohne es, trotz aller Prüfungen, zu beachten. Auch wird der auf den Berührungsflächen befindliche Staub und Sand jedenfalls das Justiren des Instruments oft erschweren; daß aber, wenn man auf sandigem, lockerm Boden bei windigem Wetter arbeitet, die Oberflächen selten von Staub frei sein werden, leuchtet ein. Bei den durch Herrn Breithaupt eingeführten gehärteten Stahlköpfen als Unterlagspunkten für die Libelle ist die angeführte Mangelhaftigkeit für längern Gebrauch des Instruments großentheils gehoben und die Berichtigung erleichtert.

§. 237. Breithaupt hat noch ein Nivellirinstrument in einfacherer Form, ohne Horizontal- und Höhenkreis construirt. Ein verticaler konischer Zapfen, durch eine von einer Spiralfeder m (Fig. 259) umgebene Schraube an das Stativ P befestigt, dreht sich in einer Büchse BB; diese Bewegung kann durch die Druckschraube v gehemmt werden; eine feine Bewegung ist nicht vorhanden. Die Büchse BB trägt ein horizontales Querstück AA, von dessen Enden zwei verticale Arme C, C sich erheben; jeder dieser Arme ist wieder gabelförmig gespalten; der Zwischenraum zwischen den Gabeln g, g bildet das Lager für das Fernrohr F; dieses liegt einerseits mit einem harten Stahlkopfe z (Fig. 260) auf eben solcher Unterlage u; das andere Lager ist aus Fig. 261 ersichtlich. Die Libelle LL hat beiderseits Ansätze a, a′, von denen der eine auf einer mit dem Fernrohr festverbundenen Stahlkante k (Fig. 260), der andere auf einem stählernen Schraubenkopfe s (Fig. 261) aufliegt. Das Fernrohr hat 16 Zoll Länge, 16 Linien Oeffnung, gibt dreißigmalige Vergrößerung und ist achromatisch. Fernrohr und Libelle sind zum Umlegen eingerichtet.

Prüfung und Berichtigung dieses Instruments ergeben sich aus dem Frühern von selbst.

§. 238. Die Fig. 262 stellt ein ebenfalls von Breithaupt construirtes Nivellirinstrument mit Horizontal- und Höhenkreis vor. Das achromatische Fernrohr desselben hat 18 Zoll Länge, 18 Linien Oeffnung und gibt dreißigmalige Vergrößerung. Unter dem Fernrohr ist eine ausgeschliffene Libelle angebracht, die bei einer Linie Ausschlag 5 Secunden im Winkel an-

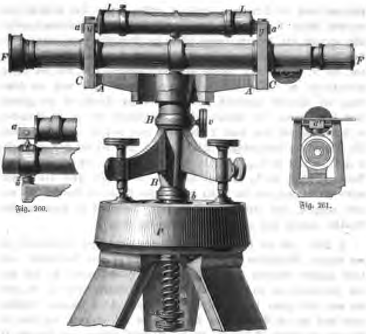


Fig. 260.

Fig. 261.

Fig. 259.

Fig. 262.

Digitized by Google

gibt und durch die Schraube v berichtigt werden kann. Das Fernrohr ruht auf dem Träger T, der sich in dem Gelenke G zwischen Stahlspitzen drehen läßt, wodurch das Fernrohr sammt Libelle die Verticalbewegung erhält. Der Arm GH ist unverrückbar mit der Alhidade des Horizontalkreises h verbunden; bei N trägt er den Nonius des Verticalbogens BB mit der Mikrometerschraube m. Durch eine an dieser angebrachte Feder wird ein todter Gang der Schraube unmöglich gemacht. Mit der Scheibe ist der getheilte Kopf k verbunden; der Nonius gestattet Ablesungen bis zu 10 Secunden, in Verbindung mit dem Kopfe k aber kann man einzelne Secunden ablesen. Der Radius des Verticalbogens BB beträgt 9 Zoll, der des Horizontalkreises 3 Zoll; jener ist in $^1/_{12}$, dieser in $^1/_3$ Grade getheilt; letzterer ist mit zwei Nonien versehen, die $^1/_2$ Minuten angeben. Der untere Theil des Instruments stimmt ganz mit den bisher beschriebenen Apparaten überein. Es wird nicht entgehen, daß man dieses Instrument, wenigstens in einem gewissen Bereiche, zugleich auch als Theodolit gebrauchen kann.

§. 239. Für die Aufstellung und Berichtigung dieser Instrumente dienen folgende Vorschriften, von Herrn Breithaupt dem Wesentlichen nach selbst gegeben: Nachdem dem Stativ ein fester Stand gegeben ist, setzt man das Instrument mit der linken Hand auf den Stativkopf und mit der rechten wird der Halter b unter dem Dreifuß durch 3—4 Umgänge befestigt; dann wird mit der Mutter u die Spiralfeder so viel gespannt, daß das Instrument hinreichende Befestigung erhält. Es wird alsdann dem Fernrohr die Richtung beiläufig parallel gegen zwei der Stellschrauben des Dreifußes gegeben, und mit Hülfe dieser beiden Schrauben die Libelle eingestellt; hiernach wird das Fernrohr durch eine Viertelkreisdrehung bis über die dritte Stellschraube gebracht und mit letzterer die Horizontalstellung des Instruments vollends bewirkt.

Sollte die Berichtigung des Instruments durch den Transport gestört und deshalb ein nochmaliges Justiren der Libelle erforderlich sein, so ist dies leicht durch halbe Umdrehung des Fernrohrs zu vollziehen, indem man die halbe Differenz, um welche die Blase der Libelle aus der Mitte weicht, mittels der Justirschraube der Libelle, die andere Hälfte durch die Stellschrauben des Dreifußes beseitigt. Durch wiederholtes Verfahren ist hierdurch volle Genauigkeit des Einstellens zu erreichen, so daß die Blase der Libelle bei der Horizontaldrehung des Fernrohrs nicht mehr aus der Mitte weicht.

Die Parallelstellung der Libellenachse mit der optischen Achse des Fernrohrs geschieht wie beim Theodoliten (§. 211, 1). Weicht das Gefälle vorwärts von der Steigung rückwärts oder umgekehrt ab, so ist die stattfindende Differenz zur einen Hälfte durch die Stativschrauben, zur andern durch die

Justirschrauben des Fadenkreuzes zu verbessern. Um sich von der Richtigkeit der Justirung zu überzeugen wiederholt man dieses Verfahren einige Male.

Würde bei dem Gebrauche des Instruments sich finden, daß die Horizontaldrehung des Fernrohrs zu leicht oder zu schwer geht, so ist dies hier durch Anziehen oder Lüften der Mutter p zu beseitigen. Beim Abnehmen des Instruments vom Stativ muß zunächst die Mutter p gelöst, dann der Halter b vom Dreifuß getrennt werden.

Dritter Abschnitt.

Das Messen und Aufnehmen.

Erstes Kapitel.

Elementaraufgaben.

A. Grundaufgaben über das Abstecken und Messen der Linien und Winkel im Felde.

§. 240. **Aufgabe.** Zwischen zwei im Felde gegebenen zugänglichen Punkten A und B die dadurch bestimmte gerade Linie AB abzustecken.

Auflösung. Man stecke in jeden der Punkte A, B eine Bake vertical ein, stelle sich einige Schritte hinter eine derselben, z. B. hinter A, und visire von da aus nach B so, daß die Visirlinie eine äußere Tangente an die beiden cylindrischen Stäbe bildet. Von einem Gehülfen lasse man dann etwa in der Mitte zwischen A und B einen dritten Stab C vertical und so einsetzen, daß die Visirlinie von A nach B zugleich diesen dritten Stab C auf derselben Seite berührt, was durch verabredete Zeichen, z. B. Winken mit der Hand nach rechts oder links, je nachdem der Gehülfe den Stab nach der einen oder andern Seite rücken soll, leicht zu bewerkstelligen ist. Auf dieselbe Weise kann man zwischen A und C, ebenso zwischen B und C noch beliebig viele Stäbe einschalten, die alle unter einander und mit A und B in gerader Linie stehen.

Anmerkungen. 1) Da alle diese Stäbe vertical stehen, so bildet die sie berührende Ebene eine Verticalebene, deren Durchschnitt mit dem Horizonte die verlangte gerade Linie ist.

2) Beim Visiren muß man nicht zu dicht hinter dem nächsten Stabe stehen, weil dies die Uebersicht über die ganze Linie erschwert und solche Stäbe, die etwa zu weit nach der der Visirebene entgegengesetzten Seite stehen, übersehen werden, wenn man nicht auf beiden Seiten der Stäbe visiren

will. Daß der vorderste Stab bei nahem Stande des Auges unter einem größern Winkel, also dicker erscheint, als in einiger Entfernung davon, hat hier nichts auf sich; denn eben aus diesem Grunde visirt man nicht gerade auf die Stäbe zu, sondern seitwärts in der Tangente (Fig. 263).

Fig. 263.

3) Zwei oder mehr in eine Verticalebene gebrachte Stäbe bilden ein Alignement, d. h. die sichtbare Bezeichnung der geraden Linie.

§. 241. **Aufgabe.** Eine schon abgesteckte gerade Linie beliebig zu verlängern.

Auflösung. Man visire nach zwei beliebigen Stäben der abgesteckten Linie in der Richtung, in welcher die Linie verlängert werden soll, und lasse einen Stab irgendwo in dieser Richtung so einsetzen, daß er in die Verticalebene der beiden andern Stäbe fällt. Ist die Linie dadurch zu dem beabsichtigten Zwecke noch nicht lang genug geworden, so visire man nach dem letzten und noch einem andern, etwa dem letzten der ursprünglich abgesteckten Linie in derselben Richtung weiter und lasse die Richtung wieder durch einen Stab bezeichnen u. s. w.

§. 242. **Aufgabe.** Eine auf nahe horizontalem und ebenem Terrain abgesteckte Gerade AB auszumessen.

Auflösung 1. Mit Meßstäben. Dicht an den Stab, welcher den Anfangspunkt der Linie bezeichnet, lege man einen Meßstab in der Richtung der abgesteckten Geraden. Ob der Meßstab die vorgeschriebene Richtung habe, überzeugt man sich dadurch, daß man an seinem Endpunkte einen Absteckstab genau vertical aufstellen läßt und ihn zwischen zwei andern Stäben der abgesteckten Geraden einvisirt. Hat man die Richtung des Meßstabes in der Horizontalebene vollkommen corrigirt, so muß man sich noch von seiner Lage in der Verticalebene überzeugen, d. h. ob er auch genau horizontal liege. Dies geschieht einfach durch die Setzwage oder Libelle, die man zur Prüfung oben auf den Stab setzt. Zeigte sich hierbei, daß der Meßstab am einen Ende höher läge als am andern, so müßte man ihn an diesem von einem Gehülfen so weit in die Höhe heben lassen, bis die daraufgestellte Setzwage oder Libelle richtig einspielte, also die horizontale Lage des Stabes außer Zweifel setzte. Ist diese Lage erzielt, so stecke man genau an seinem Endpunkte einen Zeichenstab in den Boden. Dann trage man den Meßstab weiter, lege sein hinteres Ende an den Zeichenstab an, bringe ihn nahe genau in die Richtung der zu messenden Linie und berichtige seine Lage in der Horizontal- und Verticalebene wie zuvor; ist dies geschehen, so stecke man wieder einen Zeichenstab an sein vorderes Ende; in derselben Weise fährt man

dann bis ans Ende der Linie AB fort. Bei dem Anlegen des Meßstabes muß man darauf achten, daß man zwischen dem Ende des vorigen und dem Anfang des jetzigen Meßstabes nicht etwa einen Zwischenraum von der Dicke des gebrauchten Zeichenstabes ungemessen lasse, was leicht geschehen könnte.

Die Zahl der an die Linie gelegten Meßstäbe muß gezählt werden; zu ihr kommt noch die Zahl der Unterabtheilungen eines Stabes (Fuß, Zoll rc.), welche das letzte Ende der Linie ergeben wird. Um sich bei diesem Geschäfte gegen das Verzählen zu sichern, zieht ein Gehülfe jedesmal den letzten Zeichenstab aus, wenn der Meßstab weiter getragen wird, behält diese Zeichenstäbe zusammen und zählt sie am Ende der Messung. Daraus und aus dem Maß des letzten Endes der Linie, falls dies kein voller Stab mehr war, findet man die Länge der Linie in der vorgeschriebenen Einheit. Reichen aber die vorhandenen Zeichenstäbchen nicht aus, so muß der Gehülfe, welcher sie gesammelt, nachdem er alle bekommen, sie zurückgeben und von da ab in gleicher Weise wieder sammeln. Jeder solche Wechsel der Zeichenstäbe wird besonders notirt und am Schluß die Zahl der Einheiten daraus berechnet.

Wenn eine größere Genauigkeit verlangt wird, als hierdurch zu erreichen, so müßte man zwei oder mehr Stäbe von der §. 161, Fig. 185 beschriebenen Art gebrauchen und auf die dort erklärte Weise gebrauchen. Um sich hier gegen das Verzählen zu sichern, thut man wohl, am Ende jeder Stablänge einen Pflock in die Erde zu stecken und am Ende der Messung die Zwischenräume wiederholt zu zählen; alle andern Mittel führen zu leicht zu Irrungen.

Auflösung 2. Mit der Meßkette. In den Anfangspunkt A der abgesteckten Linie setze man einen Kettenstab und schiebe den ersten Endring der Kette darüber; ein Gehülfe spannt dann die Kette in der Richtung AB der abzumessenden Linie aus, schiebt den zweiten Endring derselben über einen andern Kettenstab und steckt diesen, bei gehöriger Ausspannung der Kette mit seiner Spitze in die Erde. Ob die Kette sowol in der Horizontal- als Verticalebene die rechte Richtung habe, findet man hier ebenso wie oben bei der Messung mit Stäben, nur daß hier die Kettenstäbe selbst zum Abvisiren dienen können, da der hintere Kettenstab stets schon am rechten Orte ist, es also nur darauf ankommt, daß er genau vertical gehalten werde. Nachdem die sich etwa vorfindenden Fehler in der Kettenlage corrigirt sind, zieht der erste (vordere) Kettenführer seinen Kettenstab aus und bezeichnet die Stelle durch einen Zeichenstab, den er genau in dasselbe Loch steckt, wo der Kettenstab gestanden hatte. Der zweite (hintere) Kettenführer zieht seinen Stab auch aus und setzt zur Bezeichnung des Anfangspunktes der Linie einen Absteckstab ein. Beide gehen nun mit der ausgespannten Kette weiter, bis der zweite an die Stelle des ersten kommt; hier zieht er den Zeichenstab aus, nimmt ihn an

sich und setzt an seine Stelle den Kettenstab; der erste spannt die Kette gehörig aus und setzt den Stab in die Erde; der zweite visirt ihn ein, und, wenn es nöthig scheint, wird die Kette noch rücksichtlich ihrer Lage in der Verticalebene mit der Setzwage geprüft und nöthigenfalls dadurch berichtigt, daß man den Ring am einen Kettenstabe etwas in die Höhe hebt, dabei aber wohl darauf sieht, daß der Kettenstab bei dem fortgesetzten Anspannen der Kette nicht aus der Verticalen kommt, was bei höher gehobenem Ringe natürlich leichter geschehen kann, weil die Hebelkraft beim Spannen größer ist. Das Messen wird nun in derselben Weise fortgesetzt, das Zählen der Zeichenstäbe und somit der ganzen Kettenlängen in gleicher Weise beschafft, wie bei der Messung mit Stäben, und zuletzt alles auf die verlangte Längeneinheit reducirt. Da die Kette in der Regel 5 Ruthen lang ist, so wird man für jede Kettenlänge entweder diese Größe, oder 50 Fuß dec., oder 60 Fuß ddec. zu rechnen haben. Zu der Zahl der vollen Kettenlängen hat man dann noch die Ruthen- oder Fußzahl der letzten etwa nicht vollen Kettenlänge hinzuzurechnen, für welche jedoch kein Zeichenstab eingesetzt wurde.

Vor Beginn der Messung hat man beim Auseinanderlegen der Kette wohl darauf zu achten, ob auch keine Ringe übergeschlagen sind, und die, welche in solcher Lage gefunden werden, richtig zu legen. Das beste Mittel, das Ueberschlagen der Zwischenringe zu verhüten, ist, daß man die Kette, während sie noch in ein Bündel zusammengelegt ist, bei ihrem mittelsten Gliede faßt und sie mit voller Kraft des Arms weit von sich schleudert; das Mittelglied behält man dabei in der Hand und die beiden Hälften der Kette kommen so ziemlich parallel neben einander ausgespannt zu liegen, indem die der Kette ertheilte Schwungkraft alles Ueberschlagen und Verschlingen von Gliederringen verhindert. Wenn beim Fortgange der Messung die Kette im ausgestreckten Zustande von der einen Stelle zur andern geführt wird, steht nicht zu erwarten, daß sich wieder Ringe verschlingen, wenigstens dann nicht, wenn die Kettenführer sie gehörig ausgestreckt bleiben lassen, also beide mit nahe gleicher Geschwindigkeit fortschreiten.

§. 243. Beim Messen einer Länge mit der Kette oder mit Meßstäben können gewisse Fehler begangen werden, welche das Resultat unrichtig machen. Ein Fehler dieser Art ist, daß man die Kette oder den Meßstab nicht bei jedem neuen Anlegen genau in die Linie einvisirt, sondern bald rechts, bald links abweichen läßt.* Untersuchen wir die mögliche Größe dieses Fehlers.

Es sei az (Fig. 264) die ganze zu messende Linie. Nehmen wir an, man lege die Kette von a nach b, seitwärts von az; man fälle das Loth $b\beta = p$ und setze die Kettenlänge $ab = k$;

Fig. 264.

die Projection von k auf az, nämlich $a\beta$ sei $= v$; dann ist $k - v = f$ der bei der ersten Kettenlänge begangene Fehler. Es ist aber:

$$v^2 = k^2 - p^2$$

$$v = \sqrt{k^2 - p^2} = k \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{k^2}} = k\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^{1/2}$$

$$v = k\left(1 - \frac{p^2}{2k^2}\right) = k - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{k} \text{ (§. 18)},$$

wenn man in der Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze mit gebrochenen Exponenten die spätern Glieder, welche höhere Potenzen von $\frac{p}{k}$ enthalten, vernachlässigt. Der Fehler bei der ersten Kettenlänge beträgt also:

$$f = k - v = \frac{p^2}{2k}.$$

Legt man nun das zweite Mal die Kette in b an, und, was bei sorgloser Messung in der Regel geschieht, bringt man das vordere Ende der Kette jenseit der Linie az nach c, und fällt das Loth $c\gamma = p'$, und ist $\beta\gamma = v'$, so ist der jetzige Fehler:

$$f' = k - v'.$$

Man verlängere $c\gamma$ über γ hinaus und ziehe $bq \mathrel{+\!\!\!\!=} \beta\gamma$, so ist auch $bq = \beta\gamma = \sqrt{k^2 - cq^2}$, oder, weil $q\gamma = b\beta$,

$$v' = \sqrt{k^2 - (p + p')^2} = k\sqrt{1 - \frac{(p + p')^2}{k^2}},$$

oder $$v' = k\left(1 - \frac{(p + p')^2}{k^2}\right)^{1/2} = k\left(1 - \frac{(p + p')^2}{2k^2}\right)$$

$$v' = k - \frac{(p + p')^2}{2k},$$

weil die höhern Potenzen vernachlässigt werden können; also ist dann:

$$f' = \frac{(p + p')^2}{2k}.$$

Ebenso erhält man bei gleicher Bezeichnung:

$$f'' = \frac{(p' + p'')^2}{2k},$$

und Aehnliches für die folgenden Kettenlängen. Dagegen für die letzte Kettenlänge, weil man unfehlbar den Punkt z in der Linie nehmen wird:

$$f_1 = \frac{p_0^2}{2k},$$

wenn p_0 das Loth am Ende der vorletzten Kettenlänge bedeutet. Bezeichnet man dann den Gesammtfehler auf die Länge az von n Kettenlängen mit F, so ist:

$$F = f' + f'' + f''' + \cdots = \frac{p^2}{2k} + \frac{(p+p')^2}{2k} + \frac{(p'+p'')^2}{2k} + \cdots + \frac{p_0^2}{2k}$$
$$= \frac{p^2 + (p+p')^2 + (p'+p'')^2 + \cdots + p_0^2}{2k}.$$

Nimmt man die Abweichungen $p, p', p'' \cdots\cdots p_0$ als einander gleich an, so ist:

$$F = \frac{p^2}{k} + 2(n-2)\frac{p^2}{k} = (2n-3)\frac{p^2}{k}.$$

Der Fehler nimmt im Verhältniß des Quadrats der Abweichung p zu, wächst auch mit der Zahl n der Kettenlängen, ist aber der Kettenlänge selbst umgekehrt proportional. Es leuchtet ein, daß man durch diesen Fehler die gemessene Linie stets zu groß erhält. Setzt man, um an einem Beispiel die absolute Größe des Fehlers zu sehen, $p = 2$ Zoll, $k = 5^\circ = 50' = 500''$ dec., $n = 30$, so ist:

$$F = (2 \cdot 30 - 3) \cdot \frac{4}{500} = \frac{57 \cdot 8}{1000} = 0{,}456'' \text{ dec.},$$

also noch nicht $^1/_2$ Zoll, d. h. weniger als 0,001 der gemessenen Linie. Bei nicht allzu großen Abweichungen (p) wird man also von diesem Fehler für die Richtigkeit der Messungen nicht viel zu fürchten haben.

§. 244. Wenn man auf unebenem Boden mißt, etwa zwischen zwei Hügeln, oder über einen Fluß, so daß die Kette nur in ihren beiden Endpunkten auf den Kettenstäben aufliegt, sonst in ihrer ganzen Länge frei schwebt, so senkt sie sich vermöge ihrer Schwere unter die Horizontale. Ein überall gleich biegsamer Körper, z. B. ein Seil, bildet dabei eine stetig gekrümmte Curve, die Seil- oder Kettenlinie; die Meßkette dagegen bildet, wegen der Länge und Unbiegsamkeit ihrer Glieder, ein Polygon, das sich jedoch einer Curve nähert. Der Einfachheit halber mag hier die Linie, welche die Kette bildet, als stetig gekrümmt, und zwar als Kreisbogen angesehen werden, weil für unsern Zweck die Abweichung des Kettenbogens von einem Kreisbogen nicht wesentlich ist, die Berechnung aber viel leichter wird.

Setzt man nun die Kettenlänge ADB (Fig. 265) $= k$, die Sehne AB dieses Bogens $= s$, den zum Bogen ADB gehörigen Centriwinkel $ACB = \varphi$ im Bogenmaß für den Radius 1, und die Größe DE, um welche die Kette in ihrer Mitte unter die Horizontale sinkt, $= u$, sowie den Radius AC des Bogens $ADB = r$; so ist der Fehler f, welchen man bei einer Kettenlänge begeht,

$$f = k - s,$$

und dieses f soll nun durch k und u ausgedrückt

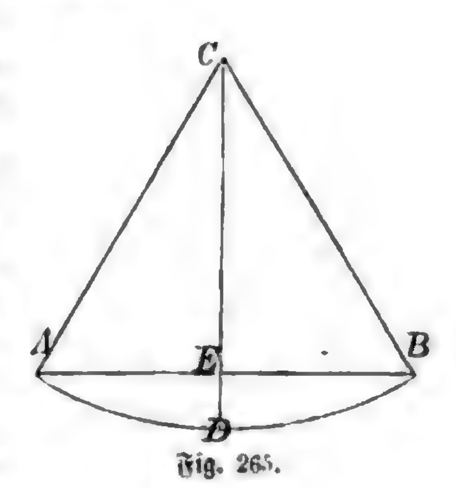


Fig. 265.

werden, da man k bereits kennt und u jederzeit messen kann. Wegen der oben angenommenen Bedeutung von φ ist:

$$k = r\varphi$$

also:

$$\varphi = \frac{k}{r}.$$

Nun ist $s = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$. Entwickelt man $\sin\frac{\varphi}{2}$ in eine Reihe nach der bekannten Formel (§. 25), nimmt aber nur die ersten beiden Glieder, so erhält man:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{48},$$

und substituirt man für φ den oben gefundenen Werth $\frac{k}{r}$, so gibt dies:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{48r^3},$$

also:

$$s = k - \frac{k^3}{24r^2}$$

und

$$f = \frac{k^3}{24r^2}.$$

Aus diesem Ausdruck soll nun noch r eliminirt und dafür p eingeführt werden. Es ist:

$$p = DE = CD - CE = r - r \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 2r \cdot \sin\frac{\varphi^2}{4}$$

$$= 2r\left(\frac{\varphi}{4} - \frac{\varphi^3}{384}\right)^2 = 2r\left(\frac{\varphi^2}{16} - \frac{\varphi^4}{768}\right),$$

wo die vierte und höhern Potenzen vernachlässigt werden können; dann ist, wenn man $\frac{k}{r}$ für φ substituirt:

$$p = r \cdot \frac{\varphi^2}{8} = \frac{k^2}{8r},$$

also

$$8rp = k^2,$$

$$r = \frac{k^2}{8p},$$

folglich

$$f = \frac{k^3}{24} \cdot \frac{64p^2}{k^4} = \frac{8p^2}{3k}.$$

Der Fehler steht also im geraden quadratischen Verhältniß der größten Abweichung der Kette unter die Horizontale und im umgekehrten Verhältniß der Kettenlänge. Setzt man $p = 1$ Fuß, $k = 50$ Fuß, so ist $f = 0{,}8$ Zoll dec., d. h. weniger als $^1/_{600}$ der Kettenlänge.

§. 245. **Aufgabe.** Zu einer im Felde abgesteckten Geraden AB durch einen gegebenen Punkt C ein Perpendikel abzustecken.

Erster Fall. Der gegebene Punkt C liegt in der Geraden AB.

Auflösung 1. Mit der Meßkette. Zu beiden Seiten des Punktes C (Fig. 266) nehme man in AB eine gleiche Länge Ca = Cb, setze in a das eine, in b das andere Ende der Meßkette mittels der Kettenstäbe fest, ergreife dann die Mitte c der Kette, und spanne sie nach der Seite der Geraden AB aus, nach welcher das Perpendikel zu liegen kommen soll; so bilden a, b, c ein gleichschenkeliges Dreieck, also ist Cc das verlangte Perpendikel, das man nöthigenfalls beliebig verlängern kann, indem man dabei nach §. 241 verfährt.

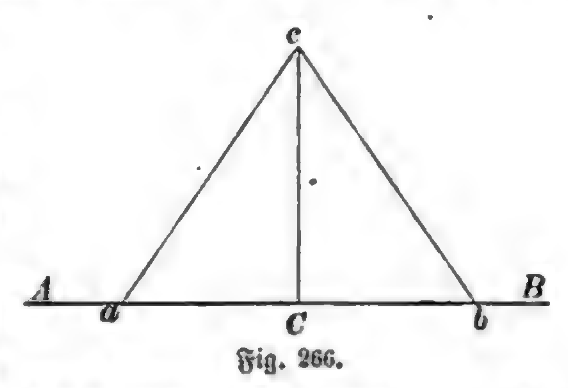


Fig. 266.

Auflösung 2. Mit der Meßschnur. Man messe auf AB (Fig. 267) eine Länge Ca von vier Ruthen ab und auf der Meßschnur nehme man eine Länge von 8 Ruthen, setze die Enden dieser 8 Ruthen der Schnur in C und a ein, und strecke die Schnur so nach c aus, daß Cc = 3 Ruthen, ac = 5 Ruthen lang wird, so ist aCc ein Dreieck, in welchem die Seiten, beziehlich die Längen 3, 4 und 5 Ruthen haben. Da aber $3^2 + 4^2 = 5^2$, so ist aCc ein rechter Winkel, also Cc das verlangte Perpendikel.

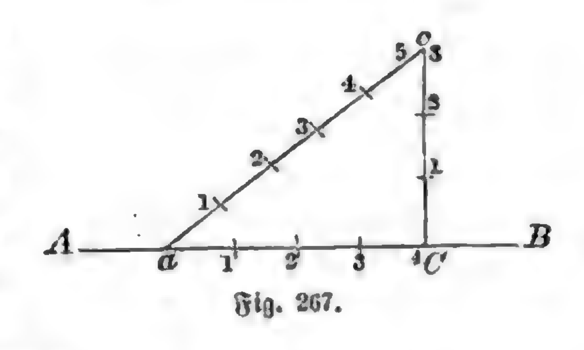


Fig. 267.

Auflösung 3. Mit dem Meßtische. Man stelle in dem Punkte C (Fig. 268) den Meßtisch auf, gebe dem Blatte eine horizontale Lage und bestimme den Punkt c auf dem Papier, welcher vertical über C liegt, stecke in c eine Nadel ein und lege das Lineal gegen diese Nadel. Nun drehe man das losgemachte Tischblatt so lange, bis die Visirlinie des Lineals (Diopterlineal oder Kippregel) in die Richtung der im Felde abgesteckten Geraden fällt; statt dessen kann man hier auch das Tischblatt festschrauben und das Lineal so weit um die in c eingesteckte Nadel herumdrehen, bis die Visirlinie mit AB zusammenfällt, was jedenfalls richtiger ist, weil durch ersteres Verfahren c aus der durch C gehenden Ver-

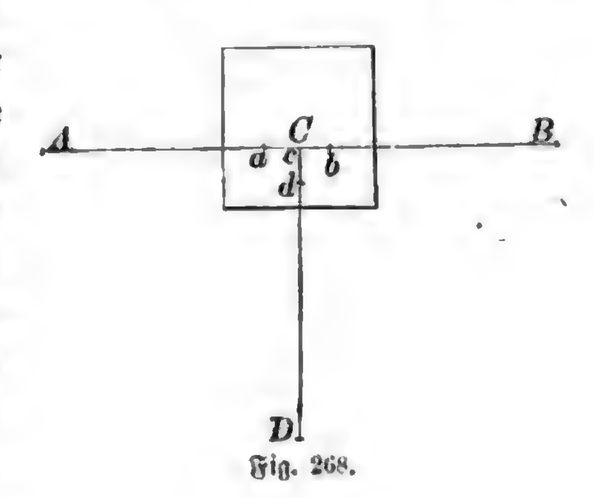


Fig. 268.

ticalen herausgebracht würde, wenn cC nicht zufällig gerade durch die Drehachse des Tischblattes ginge. Nun ziehe man längs des Lineals eine Gerade auf dem Papier, so fällt diese in die durch AB gelegte Verticalebene. In dem Punkte c errichte man durch gewöhnliche geometrische Construction auf ab ein Perpendikel cd, drehe das Lineal um c herum in die Richtung der Geraden cd, visire durch die Diopter oder das Fernrohr des Instruments und lasse in der Visirlinie in beliebiger Entfernung einen Stab D so einsetzen, daß er vom Faden des Instruments genau gedeckt wird, so ist CD das verlangte Perpendikel zu AB.

Auflösung 4. Mit dem Winkelmesser. Man stelle den Winkelmesser (Astrolabium oder Theodolit) so auf, daß das Centrum des Horizontalkreises vertical über C zu liegen kommt *), und stelle den Kreis horizontal. Ist das Instrument ein Astrolabium, so richte man die festen Diopter, also die Limbusstriche 0° und 180° auf AB ein, indem das Instrument auf seinem Stativ so lange um den Centralzapfen in der Horizontalebene herumgedreht wird, bis die gewünschte Richtung erreicht ist, stelle dann den Kreis fest und führe die Alhidade auf 90°, befestige letztere in dieser Lage und lasse in der Richtung der Diopterebene einen Stab aussetzen.

Bedient man sich eines Theodoliten, so ist es ganz gleichgültig, welche Limbustheile in die Richtung AB fallen; man gebe also dem Kreise eine horizontale Lage und stelle ihn fest; dann führe man den Alhidadenkreis so weit herum, daß die Visirlinie des Fernrohrs in die Richtung der Geraden AB fällt, stelle die Alhidade fest und corrigire mittels der Mikrometerschraube. Deckt der Verticalfaden des Fadenkreuzes genau das Signal in A oder B, so lese man vom Limbus die durch den Index des Nonius angezeigte Gradzahl ab, löse die Alhidade und führe sie auf den genau um 90° rechts oder links davon abstehenden Theilstrich, stelle die Alhidade fest und lasse in der jetzigen Collimationslinie einen Stab aussetzen.

Auflösung 5. Mit dem Winkelspiegel oder Winkelkreuz, der Winkeltrommel oder dem Prismenkreuz. Man verfährt dabei nach der Anleitung der §§. 171, 167, 169, 176.

Zweiter Fall. Der gegebene Punkt C liegt außerhalb der Geraden AB.

Auflösung 1. Mit der Meßkette. Ist der Punkt C (Fig. 269) weniger als eine Kettenlänge von AB entfernt, so bestimme man in AB zwei Punkte a und b so, daß Ca = Cb, halbire ab, indem man ab mißt und die Hälfte des gefundenen Maßes von a oder b aus auf ab absteckt; dadurch

*) Wir werden dies künftig dadurch bezeichnen, daß wir sagen, „man stelle den Winkelmesser centrisch über C auf“.

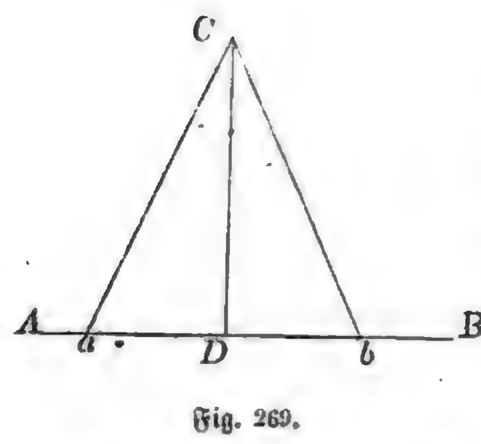


Fig. 269.

bestimmt sich der Punkt D als Mitte der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks, also der Fußpunkt D des verlangten Lothes CD.

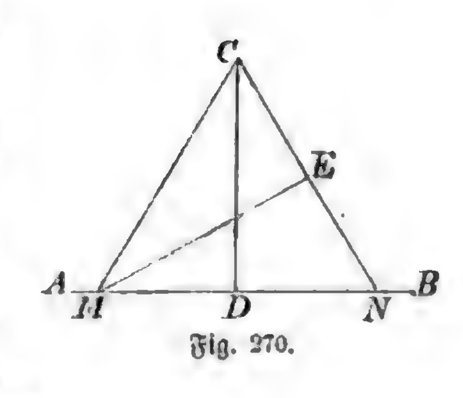


Fig. 270.

Ist aber C um mehr als eine Kettenlänge von AB entfernt (Fig. 270), so nehme man in AB einen Punkt M beliebig an, messe MC, mache MN = MC, halbire CN in E und mache

$$ND = \frac{(2 \cdot NE)^2}{2 \cdot MN},$$

so ist CD ein Perpendikel zu AB.

Beweis. Wenn

$$ND = \frac{(2 \cdot NE)^2}{2 \,.\, MN},$$

so ist $$2\,MN \cdot ND = 4 \cdot NE^2,$$

oder $$MN \cdot ND = 2 \cdot NE^2;$$

nun ist $$2 \cdot NE = CN,$$

also $$MN \cdot ND = CN \cdot NE,$$

oder $$\frac{ND}{CN} = \frac{NE}{MN}.$$

Daher ist Dreieck CDN $\sim$ MEN. Nun ist W. MEN ein rechter, also auch W. CDN ein rechter, und CD ein Perpendikel zu MN oder AB.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man bestimme nach dem Augenmaße so nahe als möglich den Punkt D (Fig. 271), in welchem das von C aus zu fällende Loth die Gerade AB treffen wird; hier stelle man den Meßtisch auf, richte das Blatt horizontal und bestimme auf dem Papier den Punkt d vertical über dem vermuthlichen Punkte D, lege das Lineal an d an, visire es nach der Linie AB ein und ziehe die Richtungslinie ab; in d errichte man durch geometrische Construction auf dem Papier ein Loth zu ab, lege das Lineal an dieses Loth und sehe zu, ob die Visirlinie das Signal in C treffe. Ist dies der Fall, so ist CD das gesuchte Perpendikel. Trifft aber die Visirlinie das Signal C nicht, so rücke man den Meßtisch nach rechts oder links, richte die

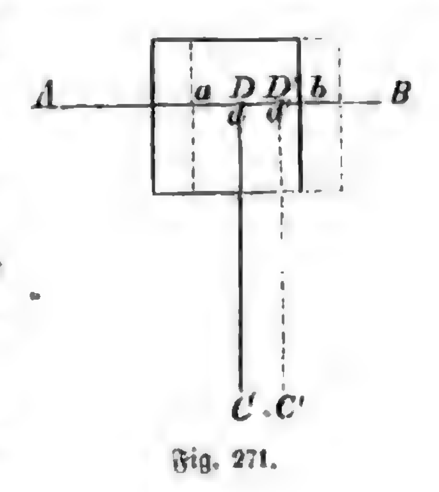


Fig. 271.

Linie ab wieder auf AB ein, indem man die Bremsschraube des Blattes löst, den Punkt d auf dem Papier senkrecht über AB richtet, das Lineal an ab anlegt, das Blatt dreht, bis das Object B gedeckt wird, dann die Bremsschraube anzieht, mit der Mikrometerschraube corrigirt, das Lineal umlegt, nach A visirt und prüft, ob auch dieses Signal gedeckt wird; sollte dies nicht stimmen, so läge d nicht in der durch AB gehenden Verticalebene und man müßte die Stellung des Tisches demgemäß verbessern. Ist man dahin gelangt, daß beim Vor- und Rückwärtsvisiren beide Objecte, A und B, gedeckt werden, während das Lineal genau an ab anliegt, so lege man das Lineal wieder an das in d zu ab errichtete Loth dc und prüfe, ob das Object C nun gedeckt werde; sollte es noch nicht genau der Fall sein, so müßte man in gleicher Weise, wie bisher, die Stellung des Tisches verändern, bis die verlangte Deckung erreicht wäre. Dann ist der lothrecht unter d liegende Punkt D der Fußpunkt des verlangten Lothes.

Auflösung 3. Mit dem Winkelmesser. Wie in 2 suche man den Punkt D in der Linie AB, wo, nach Schätzung mit dem Augenmaße, ein zu AB errichtetes Loth annähernd durch C geht; stelle hier den Winkelmesser centrisch auf, führe die Gesichtslinie des Fernrohrs in die Richtung AB, lese die Nonien ab, drehe dann die Alhidade um 90° weiter und sehe zu, ob die Visirlinie auf das Signal C fällt. Ist dies der Fall, so ist D der gesuchte Fußpunkt des Lothes CD. Trifft aber die Visirlinie den Punkt C nicht, so rücke man den Winkelmesser nach rechts oder links so lange fort, bis, bei gehöriger Orientirung desselben, die wie oben bestimmte Gesichtslinie auf das Signal C fällt.

Auflösung 4. Mit dem Winkelspiegel, Winkelkreuz, der Winkeltrommel oder dem Prismenkreuz. Vgl. §§. 171, 167, 169 und 176. Dieses Verfahren ist auch dann anwendbar, wenn der Punkt C nicht zugänglich sein sollte.

§. 246. **Aufgabe.** Einen durch die Gradzahl gegebenen Winkel auf dem Papier zu verzeichnen.

Auflösung 1. Mit dem halbkreisförmigen Transporteur. Das Verfahren kann als bekannt vorausgesetzt werden, gewährt aber meist nicht die geforderte Genauigkeit, da die Theilung des Transporteurs nicht weit genug geht.

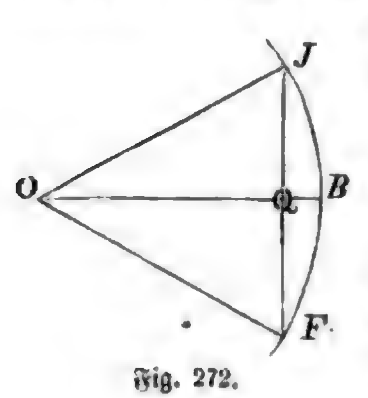


Fig. 272.

Auflösung 2. Mit der Chordenscala oder dem geradlinigen Transporteur. Es sei JOF (Fig. 272) ein Winkel $= 2\alpha$, JBF der dem Winkel JOF entsprechende Bogen, JF seine Sehne oder Chorde, OQB die Winkelhalbirungslinie, $OJ = OF = r$ der Radius des Bogens JBF; so ist:

$$JF = 2r \cdot \sin \alpha.$$

Vermittelst der trigonometrischen Tafeln findet man also zu jedem in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel 2α die Größe seiner Sehne in Theilen des Radius ausgedrückt. Der Radius ist gleich der Sehne von 60°. Hat man also einen genauen Maßstab, so kann man die Größe der Chorde (Sehne) jedes Winkels für den Radius 1 daraus entnehmen; die Zeichnung aller Chorden von 0° bis 90° bildet eine Chordenscala. Ist dann ein Winkel durch seine Gradzahl gegeben, so nimmt man aus der Scala die Chorde von 60°, beschreibt damit als Radius einen Kreisbogen und trägt in diesen die ebenfalls aus der Scala entnommene Sehne des gegebenen Winkels ein; der zu dieser Sehne gehörige Centriwinkel ist der verlangte. Z. B.

für $2\alpha = 16° \; 45' \; 18''$ ist $\alpha = 8° \; 22' \; 39''$,

$$\begin{aligned} \log \sin \alpha &= 9{,}1634431 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline \log (2 \sin \alpha) &= 9{,}4644731 \end{aligned}$$

$2 \sin \alpha = 0{,}291389$ für den Radius 1.

Chorde von 2α oder $16° \; 45' \; 18'' = 291{,}389$ für den Radius 1000. Hat man mit 1000 Einheiten des Maßstabes einen Bogen beschrieben und trägt die Länge 291,389 Einheiten aus demselben Maßstabe als Sehne ein, so ist der zugehörige Centriwinkel der gesuchte.

Auflösung 3. Mittels der trigonometrischen Tafeln. Man suche die dem Winkel zugehörige trigonometrische Tangente für den Radius 1, verzeichne einen rechten Winkel, mache den einen Schenkel der Einheit des Maßstabes, den andern der gefundenen Tangente gleich, verbinde die so bestimmten Punkte durch eine Gerade, so ist der der Tangente gegenüberliegende Winkel der verlangte. Wäre der gegebene Winkel größer als 90°, so müßte man seinen spitzen Nebenwinkel zeichnen und einen Schenkel desselben über den Scheitelpunkt hinaus verlängern.

Wäre z. B. der zu verzeichnende Winkel = 34° 15′, so hätte man:

$\log \operatorname{tg} 34° \; 15' = 9{,}8330679$ für den Radius 10^{10},

$\operatorname{tg} 34° \; 15' = 0{,}680876$ für den Radius 1,

$\operatorname{tg} 34° \; 15' = 680{,}876$ für den Radius 1000.

Mit der aus dem Maßstabe entnommenen Linie = 1000 und der andern = 680,8 verzeichne man einen rechten Winkel ACB (Fig. 273), mache $AC = 1000$, $BC = 680{,}8$, so ist $BAC = 34° \; 15'$.

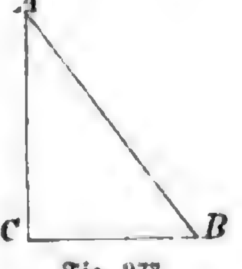


Fig. 273.

§. 247. **Aufgabe.** Einen durch Zeichnung gegebenen Winkel in Graden und Theilen des Grades auszudrücken.

Auflösung 1. Durch den halbkreisförmigen Transporteur nach bekanntem Verfahren.

Auflösung 2. Durch die Chordenscala. Man suche in der Chordenscala die Sehne von 60°, schlage mit dieser als Radius aus dem Scheitel des gegebenen Winkels einen Bogen, der beide Schenkel durchschneidet, verbinde die Durchschnittspunkte durch eine Gerade, trage diese Sehne in die Chordenscala und entnehme daraus den entsprechenden Winkel in Graden, Minuten und Secunden. Da indeß die Chordenscala nicht so weit gehen möchte, um auch kleine Bruchtheile des Grades anzugeben, so dürfte folgendes Verfahren vorzuziehen sein. Heißt s die Sehne des Winkels 2α, so ist nach §. 246

$$s = 2r \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{s}{2r}.$$

Man suche also aus der Chordenscala die Sehne von 60°, nehme davon den doppelten Werth in Zahlen nach dem Maßstabe, beschreibe aus dem Scheitel des gegebenen Winkels mit dem Radius r, d. h. mit der Sehne von 60°, einen Kreisbogen, welcher beide Schenkel des gezeichneten Winkels schneidet, ziehe in diesem Bogen die dem Winkel zugehörige Sehne, bestimme ihre Größe s nach dem Maßstabe in Zahlen und dividire sie durch den doppelten Radius, wie solcher soeben in Zahlen gefunden worden; die gefundene Zahl ist der Sinus des halben Winkels. Durch die trigonometrischen Tafeln bestimmt sich aus dem Sinus der halbe Winkel.

Auflösung 3. Mittels der trigonometrischen Tafeln. Man mache den einen Schenkel des gegebenen Winkels = 1000 Theilen des Maßstabes, errichte in dem so bestimmten Endpunkte ein Loth auf diesem Schenkel, verlängere dieses Loth, bis es den andern Schenkel trifft, und messe das Loth nach dem Maßstabe; ist sein Maß = p, so ist $\frac{p}{1000}$ die trigonometrische Tangente des gesuchten Winkels. Zu der Zahl $\frac{p}{1000}$ sucht man den Logarithmus, vermehrt ihn um 10 und sucht die so gefundene Zahl in der Tafel der Tangenten auf, welche den verlangten Winkel im Gradmaß gibt.

§. 248. **Aufgabe.** Einen im Felde abgesteckten Horizontalwinkel ABC, dessen Schenkel ihrer ganzen Länge nach zugänglich und übersehbar sind, auszumessen.

Auflösung 1. Mit der Meßkette. Auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ABC stecke man beliebige Weiten BA, BC ab und messe sie; dann messe man auch AC. Nun trage man auf dem Papier das Dreieck ABC nach verjüngtem Maßstabe auf, so bekommt man darin auch den Winkel ABC, den man erforderlichenfalls nach §. 247 auch im Gradmaß ausdrücken kann.

Oder man messe wie oben, BA, BC und AC, und berechne den W. ABC nach der Formel:

$$\sin ABC = \frac{2}{AB \cdot BC} \cdot \sqrt{{}^1\!/_2\, s \cdot ({}^1\!/_2\, s - BC)\,({}^1\!/_2\, s - AC)\,({}^1\!/_2\, s - AB)},$$

wo $s = AB + AC + BC$ ist. Oder man rechne nach einer der folgenden Formeln:

$$\sin {}^1\!/_2\, ABC = \sqrt{\frac{({}^1\!/_2\, s - BC)\,({}^1\!/_2\, s - AB)}{AB \cdot BC}}.$$

$$\cos {}^1\!/_2\, ABC = \sqrt{\frac{{}^1\!/_2\, s \cdot ({}^1\!/_2\, s - AC)}{AB \cdot BC}}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2\, ABC = \sqrt{\frac{({}^1\!/_2\, s - BC)\,({}^1\!/_2\, s - AB)}{{}^1\!/_2\, s\,({}^1\!/_2\, s - AC)}}.$$

Oder man messe $AB = BC$ ab, so wird:

$$\sin {}^1\!/_2\, ABC = \frac{AC}{2 \cdot AB}.$$

Bei der Berechnung durch den Sinus des ganzen Winkels bleibt es, wenn zufällig AC die größte Seite im Dreiecke ist, ungewiß, ob man den spitzen Winkel oder seinen stumpfen Nebenwinkel zu nehmen habe, da beiden derselbe Sinus zukommt. Rechnet man nach einer der Formeln für den halben Winkel, so ist solcher stets spitz, weil ein Dreieckswinkel $< 180°$ ist.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man stelle den Meßtisch über dem Scheitel B des gegebenen Winkels ABC auf und bestimme den Punkt b, welcher vertical über B liegt. In b stecke man eine Nadel ein, schlage das Lineal fest gegen diese an und visire es nach A ein, ziehe die Linie ba, visire dann das Lineal von b nach C ein und ziehe die Linie bc in dieser Richtung, so ist abc der verlangte Winkel, den man nach §. 247 auch noch im Gradmaß ausdrücken kann.

Auflösung 3. Mit dem Winkelmesser. Mit dem Astrolabium verfährt man nach §. 203, mit dem einfachen Theodoliten nach §. 207, mit dem Repetitionstheodoliten nach §. 210, mit der Boussole nach §. 198, mit dem Spiegelsextanten nach §. 215.

Auflösung 4. Mit Stab und Schnur. Es sei der Winkel BAC (Fig. 274) = x zu messen. Mit einem Meßstabe messe man von A aus die gleichen, sonst beliebigen Weiten AB, AC ab und messe BC. Betrachtet man x als Centriwinkel, so ist BC Sehne desselben für den Radius $AC = r$, also:

$$BC = 2 \cdot r \cdot \sin x,$$

$$\sin x = \frac{BC}{2r},$$

Fig. 274.

woraus der Winkel x mittels der Tafeln berechnet werden kann.

Dieses Verfahren ist besonders bei beschränktem Raume anwendbar, z. B. wenn man die Winkel unregelmäßiger Bauanlagen zu messen hat, wie dies

bei der Aufnahme der einzelnen Grundstücke von Städten und Dörfern häufig vorkommt. Sehr bequem bedient man sich hierbei statt des Stabes einer Schnur oder eines Meßbandes. Zur nachherigen Berechnung des Winkels können zweckmäßig sogenannte Sehnentafeln gebraucht werden, wie sich solche in der neuen Ausgabe der größern Vega'schen Logarithmentafeln von Hülfe finden; sie sind für r = 500 berechnet, so daß 2r = 1000 ist; macht man also AC = AB = 500 Einheiten des Maßstabes, so gibt die Länge BC sofort die Sehne für 2r = 1000 und die Tafel den Winkel.

§. 249. **Aufgabe.** Durch einen gegebenen Punkt C außerhalb einer gegebenen Geraden AB, welche überall zugänglich ist, eine mit AB parallele Gerade abzustecken.

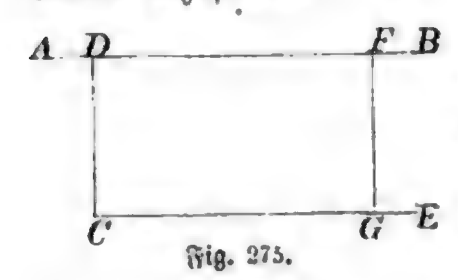


Fig. 275.

Auflösung 1. Durch zwei Perpendikel. Man fälle von C (Fig. 275) ein Perpendikel CD auf AB (§. 245) und errichte in C ein Perpendikel CE auf CD, so ist CE ∥ AB.

Auflösung 2. Durch gleiche Perpendikel. Man fälle von C (Fig. 275) ein Perpendikel CD auf AB und errichte in einem von D möglichst weit entfernten Punkte F der Geraden AB ein Perpendikel FG auf AB, messe CD und mache FG = CD, so ist CG ∥ AB.

Auflösung 3. Mit der Boussole. Man beobachte in irgend einem Punkte D (Fig. 276) der Geraden AB den Winkel α, welchen die Nadel der Boussole mit AB macht, stelle dann die Boussole in C auf und stecke eine Gerade CE ab, welche mit dem magnetischen Meridiane ebenfalls den Winkel α bildet, so ist CE ∥ AB, weil die Nadel an zwei so nahe gelegenen Orten mit sich selbst parallel bleibt, also DN ∥ CN' und $\alpha' = \alpha$ ist.

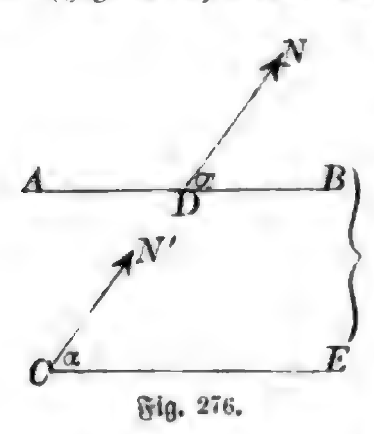


Fig. 276.

Auflösung 4. Mittels eines entfernten Richtobjects. Befindet man sich in einer freien Ebene mit weiter Aussicht, so visire man mittels der Kippregel in der Richtung der gegebenen Linie AB (Fig. 277) nach einem in dieser Richtung am fernen Horizonte liegenden Objecte O, merke sich dieses ganz genau, trage die Kippregel nach C und richte sie dort ebenfalls auf das Object O, lasse in der Visirlinie Stäbe aussetzen, so ist die Linie CO der AB um so näher parallel, je weiter O entfernt und je kürzer die Linie AB selbst ist.

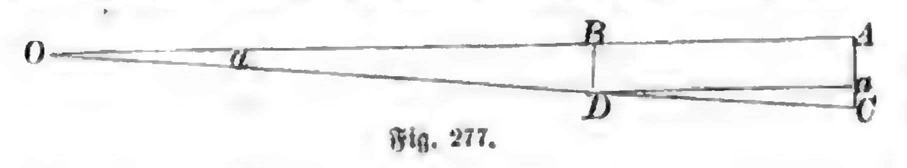


Fig. 277.

Beweis. In A und B errichte die Lothe AC, BD (Fig. 277), ziehe Da ⫲ AB, verlängere CD und AB, bis sie sich in O treffen, so ist W. $CDa = AOC = \alpha$, $Da = AB$ und $tg\alpha = \frac{Ca}{Da} = \frac{Ca}{AB}$, also:

$$Ca = AB \cdot tg\alpha;$$

aber:

$$tg\alpha = \frac{AC}{AO};$$

folglich

$$Ca = AB \cdot \frac{AC}{AO}.$$

CD ist um so genauer parallel AB, je kleiner Ca ist, also je größer AO und je kleiner AB.

Setzt man $AO = 10000$ Fuß, $AB = 100$ Fuß, $AC = 50$ Fuß, so ist $Ca = \frac{1}{2}$ Fuß und W. $\alpha = 0^\circ\ 17'\ 11''$, woraus man sehen wird, daß man Objecte, die nur mehrere hundert Fuß entfernt sind, hierzu nicht benutzen darf.

§. 250. **Aufgabe.** In einem gegebenen Punkte B eine Gerade BA unter einem gegebenen schiefen Winkel α an eine im Felde abgesteckte Gerade MN anzutragen.

Erster Fall. Der Punkt B liegt in der Geraden MN.

a) Der Winkel α ist durch Zeichnung gegeben.

Auflösung 1. Mit dem Meßtische. Man zeichne den Winkel α auf den Meßtisch, $abc = ABC$ (Fig. 278), stelle den Meßtisch so über B auf, daß der Scheitelpunkt b des gezeichneten Winkels abc genau senkrecht über B zu liegen kommt, so wie der eine Schenkel bm des gezeichneten Winkels α in das Alignement von MN. Dann lege man das Lineal an den andern Schenkel ba des construirten Winkels α oder abc, und lasse in beliebiger Entfernung Stäbe in die Visirlinie ba einsetzen.

Fig. 278.

Man könnte auch den Meßtisch über B aufstellen, den Punkt b senkrecht über B darauf suchen, die in das Alignement von BM fallende Gerade bm auf dem Meßtische ziehen, an diese den Winkel α anlegen und sie vermittelst des Visirens auf das Feld übertragen.

Auflösung 2. Mit dem Winkelmesser. Man messe den gezeichneten Winkel α und drücke ihn in Gradmaß aus (§. 247); dann stelle man centrisch über B einen Winkelmesser auf, richte die optische Achse durch Drehung der Alhidade in das Alignement von MN, lese vom Nonius ab, vermehre die abgelesene Gradzahl um die Gradzahl des Winkels α, stelle dann den Index

des Nonius auf die so gefundene Summe beider Winkelgrößen ein und visire durch das Fernrohr einige Stäbe in die jetzige Gesichtslinie ein.

b) Der Winkel α ist im Gradmaß gegeben.

Auflösung 1. Mit dem Meßtische. Man construire den Winkel α nach §. 246 auf dem Meßtische und verfahre dann wie bei a, 1.

Auflösung 2. Mit dem Winkelmesser. Man trage den Winkel α sogleich mittels des Winkelmessers auf das Feld über (vgl. a, 2).

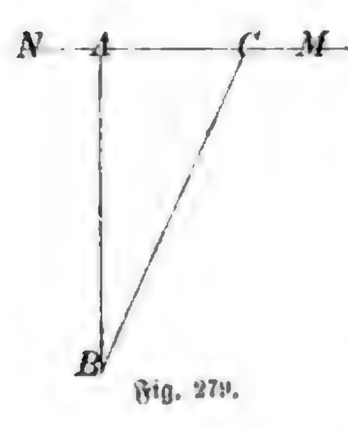


Fig. 279.

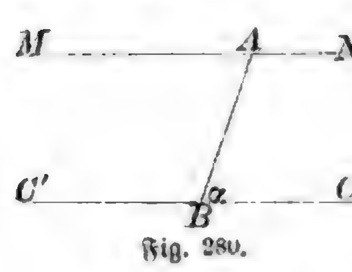


Fig. 280.

Fig. 281.

Zweiter Fall. Der gegebene Punkt B liegt außerhalb der Geraden MN.

Auflösung 1. Von dem Punkte B (Fig. 279) fälle man auf MN ein Perpendikel BA (§. 245) und stecke den Winkel CBA $= 90° - \alpha$ nach §. 250, I ab, so ist W. BCA $= \alpha$.

Auflösung 2. Man lege durch B (Fig. 280) eine mit MN parallele Gerade BC (§. 249), mache den Winkel CBA $= \alpha$ (§. 250, I), so ist auch W. MAB $= \alpha$. Sollte NAB $= \alpha$ werden, so müßte man C'BA $= \alpha$ machen.

Auflösung 3. In einem beliebigen Punkte von MN (Fig. 281), z. B. in D, lege die Gerade DE so an MN, daß W. MDE $= \alpha$ wird (§. 250, I): durch B lege BA $\#$ DE (§. 249), so ist W. MAB $= \alpha$. Sollte W. NAB $= \alpha$ werden, so müßte man NDE $= \alpha$ machen.

Auflösung 4. Von B (Fig. 279) fälle man ein Loth BA auf MN, messe BA und mache nun, wenn α der gegebene Winkel ist,

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Zieht man dann von B nach dem so bestimmten Punkte C die Gerade BC, so ist W. BCA $= \alpha$.

§. 251. **Aufgabe.** Einen Verticalwinkel zu messen.

Auflösung 1. Mit dem Quadranten. Man stelle den Quadranten im Scheitel des gegebenen Winkels nach Anleitung des §. 200 auf, dann drehe man die Limbusebene des Kreises in die Ebene des zu messenden Winkels, befestige sie in dieser Lage, bringe das Fernrohr durch grobe Bewegung in die Richtung des einen Schenkels und bewirke durch feine Bewegung die vollständige Coincidenz der Kreuzfäden mit dem Objecte. Nun lese man die Höhe a vom Limbus ab, löse das Fernrohr und bringe es ebenso in die Richtung des andern Schenkels; die jetzige Ablesung a' gibt die Höhe dieses zweiten

Objects. War jenes der tiefere, dieses der höhere Punkt, so ist $a' - a$ die Größe des gesuchten Winkels.

Dies ist das Verfahren, wenn der zu messende Winkel kein Höhenwinkel ist (§. 166). Handelt es sich aber um die Bestimmung eines Höhenwinkels, dessen einer Schenkel also eine Horizontallinie ist, so gibt die richtige Einstellung des Fernrohrs auf das bezeichnete Höhenobject sofort den Höhenwinkel, wenn nur der Quadrant richtig justirt ist. Hat das Instrument einen Collimationsfehler, so muß die gemachte Ablesung noch davon befreit werden.

Auflösung 2. Mit dem Theodoliten, nach §. 207.

Auflösung 3. Mit dem Spiegelsextanten, nach §. 217.

§. 252. **Aufgabe.** Ueber einer im Felde abgesteckten geraden Linie ab ein Quadrat zu beschreiben.

Auflösung. Man errichte in jedem Endpunkte der gegebenen Geraden ab (Fig. 282) ein Loth ad, bc, mache ad = bc = ab, so bilden die so gefundenen Punkte c, d die fehlenden Ecken des Quadrats abcd.

Um sich von der Richtigkeit der Figur zu überzeugen wird man indeß noch beide Diagonalen messen; finden sie sich ungleich, so muß der Fehler corrigirt werden.

Fig. 282.

§. 253. **Aufgabe.** Ueber einer im Felde abgesteckten Geraden ab ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

Auflösung. In einem Endpunkte a der gegebenen Geraden ab (Fig. 283) trage man einen Winkel α von 60° an und mache den Schenkel ac an Länge gleich ab; der so gefundene Endpunkt c ist die dritte Ecke des verlangten Dreiecks.

Zur Prüfung wird man noch die dritte Seite bc, oder einen der ihr anliegenden Winkel β, γ messen.

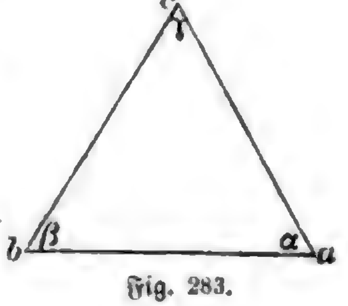


Fig. 283.

§. 254. **Aufgabe.** Einen Rhombus im Felde zu construiren, von dem die Seite und ein Winkel gegeben sind.

Auflösung. Es sei (Fig. 284) $s = ab$ die Seite, α der gegebene Winkel, $2h$ die dem Winkel α gegenüberliegende, $2k$ die andere Diagonale, so berechne man aus:

$$h = s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

und

$$k = s \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

beziehlich h und k, dann 2h und 2k; stecke diese beiden Diagonalen so ab, daß sie sich in m rechtwinkelig durchschneiden und gegenseitig halbiren, so bil-

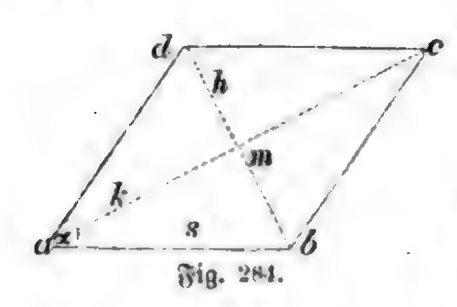


Fig. 284.

den die Endpunkte a, b, c, d die Ecken des gesuchten Rhombus.

Die Auflösung eignet sich besonders für den Fall, wo der Mittelpunkt des Rhombus vorgeschrieben ist. Zur Probe wird man die Gleichheit der Seiten zu prüfen haben.

§. 255. **Aufgabe.** Ueber einer im Felde abgesteckten Geraden ein regelmäßiges Achteck zu construiren.

Auflösung. Heißt s die gegebene Gerade ab (Fig. 285), so verlängere man s auf jeder Seite um $\frac{1}{2}\ s \cdot \sqrt{2} = 0{,}70710678 \cdot s = bm = an$, construire über der so gefundenen Linie nm ein Quadrat mnpq, bestimme die Mitte jeder Seite des Quadrats, x, y, z und u, und trage von der Mitte aus nach jeder Seite hin $\frac{1}{2}\ s = yc = yd = ze = zf =$ u. s. w. ab, so sind die so gefundenen Punkte c, d, e, f, g, h die Ecken des verlangten Achtecks. Zur Probe wird man die Gleichheit der durch die Mitte O gehenden Diagonalen ae, bf, cg, dh prüfen.

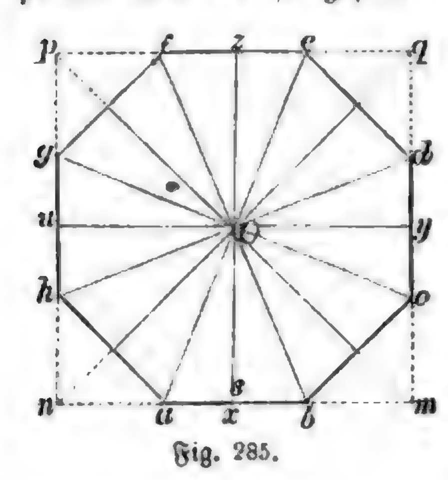


Fig. 285.

Verlängert man nämlich zwei Paar parallele Seiten ab, ef und cd, gh eines regelmäßigen Achtecks nach beiden Seiten hin, so bilden ihre Convergenzpunkte m, n, p, q die Ecken eines Quadrats, und eine Seite des Achtecks schneidet in jeder Ecke des Quadrats ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck mbc ab; heißt x die Kathete bm = cm dieses Dreiecks, so ist:

$$2x^2 = s^2$$

$$x = \frac{1}{2}\ s\ \sqrt{2},$$

woraus das Uebrige von selbst folgt.

§. 256. **Aufgabe.** Um einen gegebenen Mittelpunkt O ein regelmäßiges Achteck im Felde so zu construiren, daß eine Seite einer gegebenen Geraden MN parallel sei und der kleine Radius des Achtecks eine vorgeschriebene Größe ρ habe.

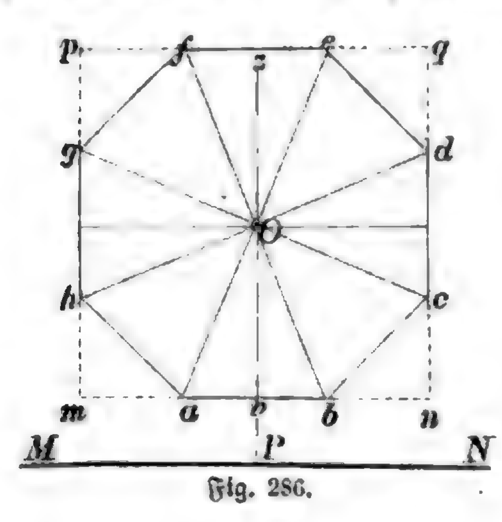


Fig. 286.

Auflösung. Von dem gegebenen Mittelpunkte O (Fig. 286) fälle man ein Loth OP auf die gegebene Gerade MN, stecke darauf den kleinen Radius Ov = ρ ab, errichte in v ein Loth mn zu Ov, verlängere vO, mache Oz = Ov = ρ, in z errichte ein Loth pq zu Oz; mache vm

$= vn = zp = zq = \varrho$, so sind m, n, p, q die Ecken eines Quadrats. Man messe nun mn und mache $av = bv = \frac{mn}{2(1 + \sqrt{2})}$, visire von a durch O nach e, von b durch O nach f, mache $nc = nb$, $dq = eq$, $mh = ma$, $gp = fp$, so sind die Ecken des Achtecks gefunden. Zur Probe wird man die Gleichheit der Diagonalen prüfen.

§. 257. **Aufgabe.** Durch drei im Felde gegebene Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man messe AB, BC, bezeichne die Mittelpunkte D, E von AB, BC; in D errichte man ein Loth zu AB, in E ein Loth zu BC; die Lothe schneiden sich in O. In O setze man einen Pflock ein und binde eine Schnur an denselben, strecke sie bis A, oder B, oder C aus, und beschreibe mit dieser Länge den Kreis, indem man eine ausreichende Zahl von Punkten mit Pflöcken bezeichnet.

Weiterhin werden wir noch eine andere Auflösung für die Construction eines Kreises kennen lernen.

B. Zusammengesetztere Aufgaben über das Abstecken und Messen der Linien.

§. 258. **Aufgabe.** Zwischen zwei im Felde gegebenen Punkten A und B, die sich einer vom andern aus, wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses, nicht anvisiren lassen, die Gerade AB durch beliebig viel Signale zu bezeichnen.

Auflösung 1. Ein Gehülfe stelle sich irgendwo zwischen A und B (Fig. 287), so nahe an die Gerade AB, als es nach dem Augenmaße möglich ist, etwa in C; ein zweiter werde in D in das Alignement von AC einvisirt; nun visire D den C auf B ein, so daß C sich nach C_1 begibt; aus C_1 visire C den D auf A ein, so daß D sich nach D_1 begibt; dann visire wieder D_1 den C_1 auf B ein, wobei C_1 nach C_2 geht, dann C_2 den D_1 auf A u. s. w., so kommen beide allmählich der Linie AB näher und werden sie zuletzt erreichen; dies ist der Fall, wenn C, D und A und auch D, C und B in gerader Linie liegen.

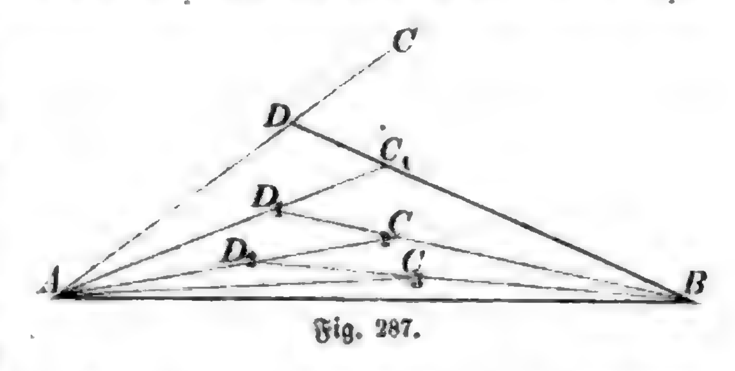


Fig. 287.

Auflösung 2. Man nehme drei Gehülfen C, D, E (Fig. 288); der erste

stelle sich so nahe als es angeht in das Alignement von AB, in C; C visire D auf A und E auf B ein; dann visire D den C auf E ein (oder umgekehrt, E den C auf D); C geht hierbei nach C_1; nun visire C_1 den D auf A, den E auf B ein; D geht dabei nach D_1, E nach E_1; dann visire D_1 den C_1 auf E_1 ein, wobei C_1 nach C_2 geht u. s. w., bis C, D, A, und auch C, E, B eine gerade Linie bilden, weil dann A, C, D, E und B in gerader Linie liegen.

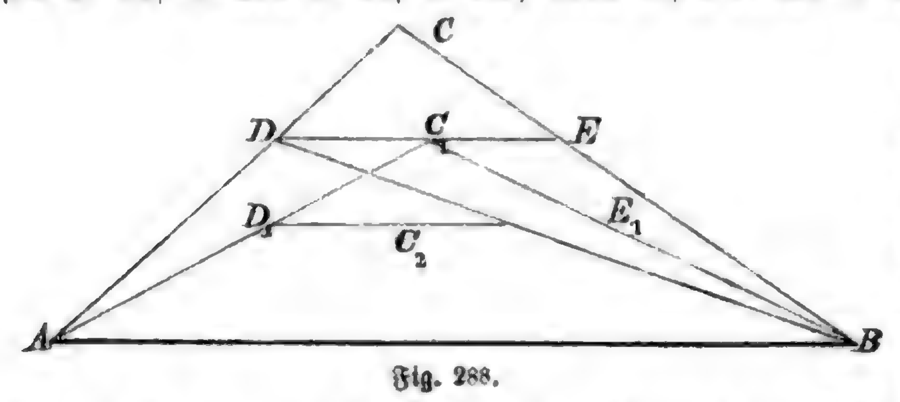


Fig. 288.

§. 259. **Aufgabe.** Eine gerade Linie zwischen zwei Punkten abzustecken, zwischen welchen sich ein undurchsichtiger Wald befindet.

Auflösung 1. Mit der Kette. Es seien A, B (Fig. 289) die auf der Grenze des Waldes gegebenen Punkte. Außerhalb des Waldes, und nicht zu nahe, suche man einen Punkt C, von welchem aus man A und B sehen kann. In AC suche man einen Punkt D, aus welchem man B, und in BC einen Punkt E, aus welchem man A sehen kann. Dann suche man den Durchschnitt F der Geraden BD und AE dadurch, daß einer in B nach D, ein anderer in E nach A visirt, und ein dritter einen Stab nach Anweisung dieser beiden in F einsetzt, wo beide Richtungslinien sich schneiden. Ebenso bestimme man den Durchschnitt G der Geraden CF und ED. Dann messe man die Linien EG, ED, berechne den Ausdruck

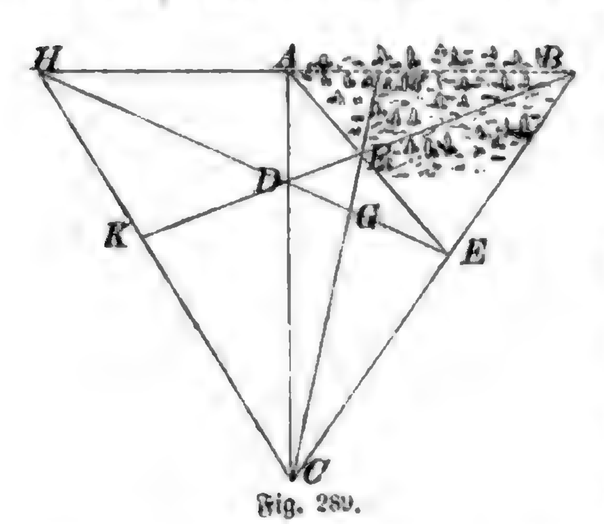


Fig. 289.

$$x = \frac{EG \cdot ED}{EG - DG},$$

verlängere ED über D hinaus und messe von D aus die Länge x — ED ab, so muß der so gefundene Punkt H in der Verlängerung von BA liegen; man kann also HA durch den Wald verlängern und diesen allmählich aushauen lassen.

Beweis. ABFDCE ist ein vollständiges Viereck (§. 22, Lehrsatz 6); zieht man darin AFE, EDH, so wird EH in D und G harmonisch getheilt und es ist:

$$DG : GE = DH : EH,$$

also auch:

$$EG - DG : EG = EH - DH : EH,$$

d. h. $$EG - DG : EG = ED : EH,$$

also: $$EH = \frac{EG \cdot ED}{EG - DG},$$

und der so bestimmte Punkt H muß mit AB in gerader Linie liegen.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man nehme zwei Punkte C, D (Fig. 290) so an, daß man A und B von beiden aus sehen kann, messe CD und trage sie nach verjüngtem Maßstabe als cd auf das Meßtischblatt auf. Dann stelle man den Meßtisch bei C auf, so daß c vertical über C zu liegen kommt, orientire ihn nach CD (§. 188), ziehe die Richtungslinien cA, cB, bringe den Meßtisch nach D, orientire ihn nach DC und ziehe die Richtungslinien dA, dB, indem man von D nach A und B visirt; cA, dA schneiden sich in a, cB, dB in b, und ab stellt das verjüngte Bild von AB vor, nach demselben Maßstabe, nach welchem cd aufgetragen wurde. Denn da man cd bei D in die Richtung von CD gebracht hat, ist auch ca ‡ CA, also Dreieck acd ∼ ACD, folglich:

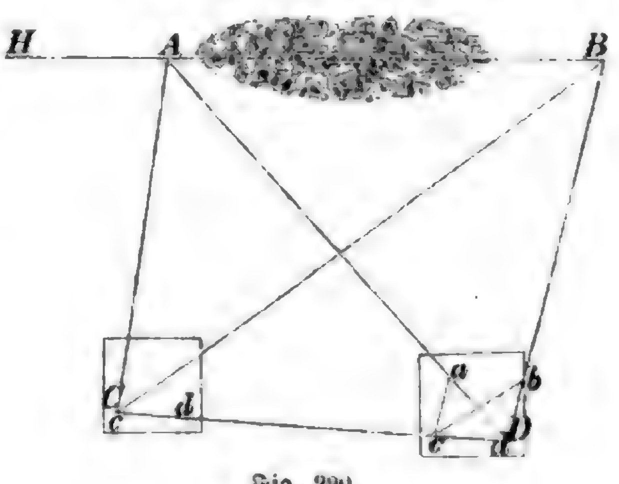


Fig. 290.

$$ac : AC = cd : CD.$$

Ebenso ist cb ‡ CB, also Dreieck bcd ∼ BCD, und

$$bc : BC = cd : CD$$

folglich: $$ac : AC = bc : BC.$$

Da überdies ac ‡ AC und bc ‡ BC, so ist W. acb = ACB, also Dreieck acb ∼ ACB, folglich:

$$ab : AB = ac : AC = cd : CD.$$

Da Dreieck bac ∼ BAC, so ist W. bac = BAC. Man hat also den W. BAC gefunden, dadurch seinen Nebenwinkel CAH = 180° — BAC; trägt man also 180° — BAC in A an CA an, so findet man die Richtung AH der Geraden AB und kann sie nach und nach durch den Wald hindurch verlängern; bei genauem Arbeiten muß sie zuletzt auf B stoßen.

Auflösung 3. Trigonometrisch. Man nehme C so an, daß man von C aus nach A und B (Fig. 289) visiren und messen kann, messe AC, BC und W. ACB, berechne daraus W. BAC, dann W. CAH = 180° — BAC, und verfahre weiter wie bei 2.

Auflösung 4. Durch Construction im Felde. Man nehme einen Punkt O (Fig. 291) an, von dem aus man die beiden gegebenen Punkte A, B anvisiren kann. Auf den Verlängerungen von OA, OB nehme man die beliebigen Punkte D, E an; bestimme den Punkt F, in welchem sich BD und AE schneiden; dann nehme man in OF den beliebigen Punkt G an und bestimme den Punkt H, in welchem OB von AG, und den Punkt J, in welchem OA von BG geschnitten wird. Dann liegt der Punkt, in welchem DE und JH sich treffen, in der Verlängerung von AB.

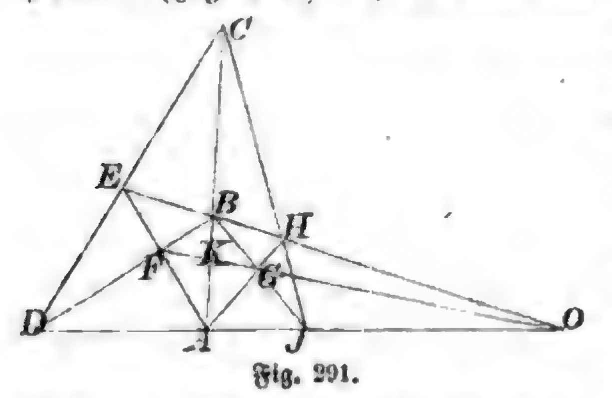


Fig. 291.

Beweis. DEBAOC ist ein vollständiges Viereck; OA, OF, OB sind drei harmonische Strahlen, wozu der vierte Ox ist, welcher durch den Convergenzpunkt x von AB und DE geht (§. 23).

ABHJCO ist ein vollständiges Viereck; OA, OG, OB sind drei harmonische Strahlen, wozu der vierte Oy ist, welcher durch den Convergenzpunkt y von AB, JH geht.

OF und OG sind aber ein und derselbe Strahl, wie aus der Construction folgt. Die Linie AB wird von beiden Strahlenbüscheln geschnitten, und zwar vom ersten in den Punkten A, K, B, x, vom zweiten in den Punkten A, K, B, y, und in diesen Punkten jedesmal harmonisch getheilt. AB kann aber nur auf eine einzige Art harmonisch getheilt werden*); also fallen x und y mit C zusammen, wo DE, JH convergiren.

§. 260. **Aufgabe.** Es sind zwei Punkte A, B (Fig. 291) im Felde gegeben; über B hinaus ist ein undurchsichtiges Hinderniß, z. B. ein dichter Wald, so daß man in dieser Richtung nicht visiren kann. Man soll jenseit des Hindernisses einen oder mehrere Punkte finden, welche in der Verlängerung von AB liegen.

Auflösung. Man construire wie im §. 259, nur nehme man die Punkte D, E so an, daß die durch sie bestimmte Gerade DE neben dem Hindernisse vorbeigeht.

---

*) Gäbe es außer C noch einen Punkt Z so, daß

1) $AK : BK = AC : BC$

und 2) $AK : BK = AZ : BZ$,

so wäre: $AC : BC = AZ : BZ$,

also: $AC - BC : BC = AZ - BZ : BZ$,

oder $AB : BC = AB : BZ$,

d. h. $BC = BZ$.

§. 261. **Aufgabe.** Es sind zwei convergente Gerade BC, DE (Fig. 292) im Felde abgesteckt, und ein Punkt A gegeben. Der Convergenzpunkt W der Geraden BC, DE ist unzugänglich und kann, wegen eines Hindernisses, auch nicht anvisirt werden. Man soll durch A eine Gerade abstecken, deren Verlängerung durch W geht.

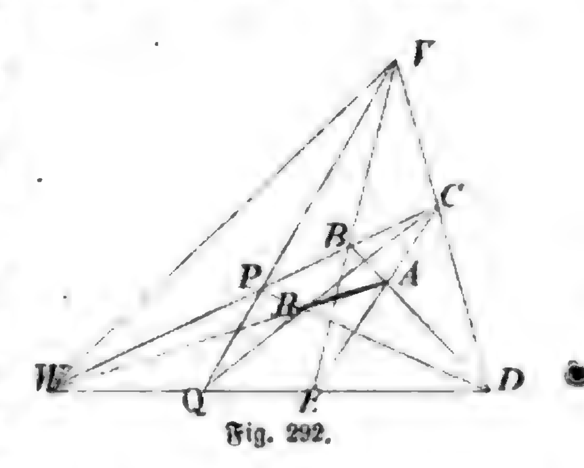


Fig. 292.

Auflösung. Durch den Punkt A lege man irgend zwei Gerade, welche die gegebenen Geraden BC, DE in beliebigen Punkten B, D und C, E treffen; dann bezeichne man den Convergenzpunkt V der Geraden CD, BE, stecke eine Gerade ab, welche durch V geht, und die gegebenen Geraden BC, DE (oder ihre Verlängerungen) in beliebigen Punkten P, Q schneidet, und bestimme den Durchschnittspunkt R der Geraden CQ, DP, so ist AR eine Gerade, welche verlängert durch W geht.

Beweis. CBEDVW ist ein vollständiges Viereck, also sind WD, WA, WC, WV harmonische Strahlen (§. 23); BEQPVW ist gleichfalls ein vollständiges Viereck, also sind auch WE, WR, WB, WV harmonische Strahlen. WD und WE sind aber dieselben Strahlen, ebenso WC, WB; durch drei harmonische Strahlen ist der vierte bestimmt: also sind WA und WR ein und derselbe Strahl, oder: AR geht verlängert durch W.

§. 262. **Aufgabe.** Die Horizontalweite zweier Punkte auf sehr unebenem Terrain zu messen.

Auflösung 1. Durch Staffelmessung. Ist die Horizontalweite AB (Fig. 293) der Punkte A und E, also die Horizontalprojection der Entfernung AE zu messen, so stecke man die Linie AE in sehr engen Zwischenräumen ab, und setze besonders da, wo die Neigung des Terrains sich ändert, Signalstäbe ein, wie hier in C, D, F, G, messe mittels der §. 161 beschriebenen Vorrichtung die horizontalen Entfernungen AC = a, cD = b, dF = c, fG = d, gE = e, so ist:

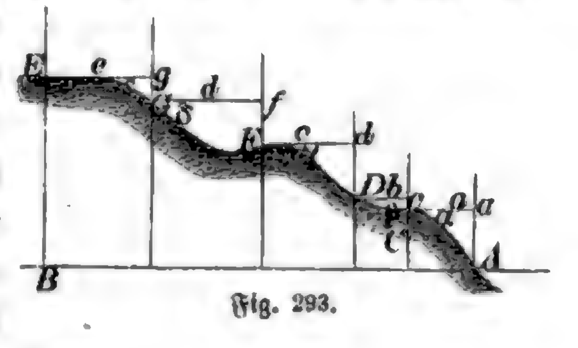


Fig. 293.

$$a + b + c + d + e = AB,$$

d. h. gleich der Horizontalweite der Punkte A und E.

Diese Art der Messung heißt Staffelmessung. Da es hier mehr als bei Messungen auf ebenem Terrain darauf ankommt, daß die als Grenzpunkte jeder Stab- oder Kettenlänge auf der Erde genommenen Punkte genau senkrecht unter dem Ende des Stabes oder der Kette liegen, so wird man stets

diese Punkte durch das Loth und die horizontale Lage der Meßstange mit der Setzwage bestimmen.

Auflösung 2. Durch Reduction auf den Horizont. Man messe die einzelnen geradlinigen Segmente der ansteigenden Linie AE, nämlich AC, CD, DF, FG, GE; zu jeder so gemessenen Linie messe man auch den Neigungswinkel, den dieselbe mit dem Horizonte macht, nämlich W. CAB = ACa = α, CDc = β, DFd = γ, FGf = δ, GEg = ε, und multiplicire die schiefe Gerade mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels (§. 47), bilde also die Producte:

$$a \cdot \cos\alpha,\ b \cdot \cos\beta,\ c \cdot \cos\gamma,\ d \cdot \cos\delta,\ e \cdot \cos\varepsilon;$$

so ist die Summe dieser Producte gleich der gesuchten Horizontalprojection AB der schiefen Geraden AE.

Die Neigungswinkel wird man hier am bequemsten mit dem Böschungsmesser (§. 225) bestimmen.

§. 263. **Aufgabe.** Eine Gerade im Felde zu messen, die nicht ihrer ganzen Länge nach zugänglich ist.

Erster Fall. Es sind blos beide Endpunkte A und B zugänglich, die Linie selbst aber wegen eines Hindernisses unzugänglich.

Auflösung 1. Mit der Kette. a) Man wähle außerhalb AB (Fig. 294) einen Punkt so, daß man von C nach A und B messen kann, messe CA, CB, verlängere beide über C hinaus und mache CD = CA, CE = CB, so ist DE = AB. Mißt man also DE, so ist damit auch AB gemessen.

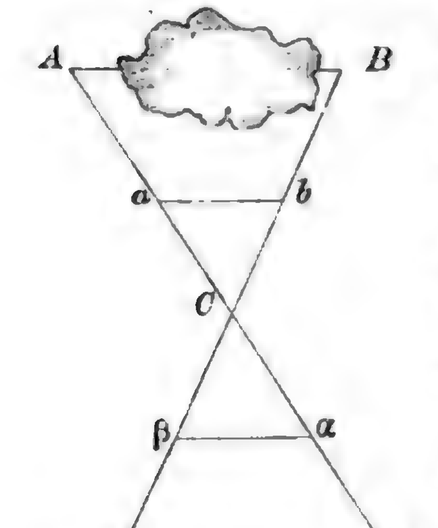


Fig. 294.

Wäre hinter C nicht Raum genug vorhanden, das Dreieck CDE zu construiren, so messe man von C aus auf CA und CB selbst einen beliebigen aliquoten Theil dieser Linien ab, $Ca = \frac{1}{n} \cdot CA$, $Cb = \frac{1}{n} \cdot CB$, und messe $ab = \frac{1}{n} \cdot AB$; so hat man $AB = n \cdot ab$. Wenn der Raum es gestattet, so kann man natürlich auch auf den Verlängerungen $C\alpha = \frac{1}{n} \cdot CA$, $C\beta = \frac{1}{n} \cdot CB$ nehmen, so wird $\alpha\beta = \frac{1}{n} \cdot AB$, oder $AB = n \cdot \alpha\beta$.

Fig. 295.

b) Oder man errichte in A und B die Lothe AD, BC (Fig. 295) auf AB, mache AD = BC und messe CD.

c) Oder man stecke eine beliebige Gerade MN (Fig. 296) ab, fälle von A und B Lothe auf MN, nämlich AC und BD, messe CD, AC und BD, berechne AC — BD, so ist:

$$\frac{AC - BD}{CD} = tg\ ABE,$$

wenn BE $\#$ MN gedacht wird; dann ist auch:

$$CD = AB \cdot \cos ABE,$$

also

$$AB = \frac{CD}{\cos ABE}.$$

Man könnte auch CE = BD machen, in E ein Signal einstecken, den Winkel ABE messen, so hätte man ebenfalls für AB die letztere Formel.

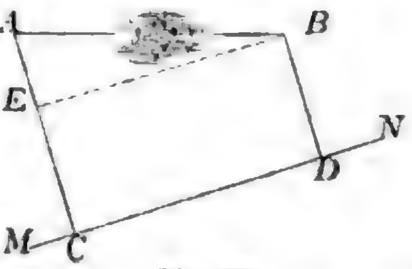


Fig. 296.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man wähle außerhalb AB einen Standpunkt C (Fig. 297) so, daß man von C nach A und B hin visiren und messen kann. In C stelle man den Meßtisch auf, gebe dem Blatte die horizontale Lage und bestimme mittels des Lothes den Punkt c auf dem Papier, der vertical über C liegt, stecke in c eine Nadel ein, schlage an diese den Rand der Kippregel oder des Diopterlineals an, und richte die Visirlinie auf den Punkt A; nun ziehe man von c aus mit Blei eine Linie längs der Kante des Lineals. Ebenso verfahre man mit dem Punkte B. Dann messe man CA und CB, trage diese Längen nach einem verjüngten Maßstabe als ca und cb auf die beiden Visirlinien auf und ziehe ab; endlich messe man ab nach demselben Maßstabe, nach welchem ca, cb aufgetragen sind, so hat man damit das Maß von AB.

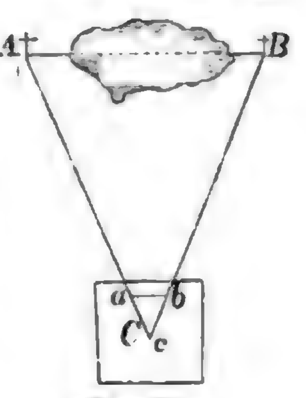


Fig. 297.

Auflösung 3. Geometrisch. Man messe CA und CB (Fig. 297), dann den W. ACB, construire daraus nach einem beliebig verjüngten Maßstabe das Dreieck acb $\sim$ ACB, so gibt ab die verlangte Weite nach demselben Maßstabe.

Auflösung 4. Trigonometrisch. Man messe wie in 3 und berechne aus AC, BC und W. ACB die dritte Seite AB.

Zweiter Fall. Es ist blos der eine Endpunkt A zugänglich.

Auflösung 1. Mit der Kette. Man verlängere BA (Fig. 298) über A hinaus beliebig bis F, nehme außerhalb AB einen Punkt C an, von dem man nach A und F messen kann, messe CA, CF, und trage sie beziehlich auf ihren Verlängerungen über C hinaus ab, CD = CA, CG = CF; bei D und G setze man Stäbe ein und suche den Punkt E, der mit G und D, und zugleich mit B und C in gerader Linie liegt, so ist DE die gesuchte

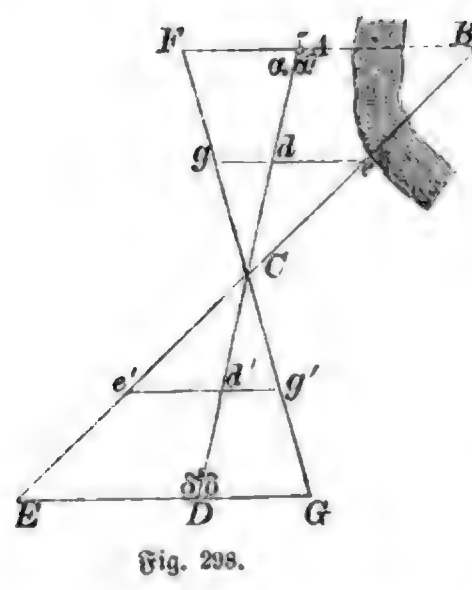


Fig. 298.

Länge von AB, denn die Dreiecke ACB und DCE sind identisch, weil Dreieck CDG ≡ CAF, also W. $\alpha = \delta$, folglich $\alpha' = \delta'$; ACB und CDE haben also eine Seite und zwei Winkel gleich.

Wenn es hinter C am Raume fehlen sollte, so kann man proportionale Stücke von CA, CF auf der einen oder andern Seite von C abtragen, z. B. $Cg = \frac{1}{n} \cdot CF$ und $Cd = \frac{1}{n} \cdot CA$, oder $Cg' = \frac{1}{n} \cdot CF$ und $Cd' = \frac{1}{n} \cdot CA$ machen. Dann ist:

$$de : AB = Cd : CA = 1 : n$$

oder:

$$de = \frac{1}{n} \cdot AB$$

$$AB = n \cdot de.$$

Ebenso ist:

$$d'e' : AB = Cd' : CA = 1 : n$$

oder

$$AB = n \cdot d'e'.$$

Auflösung 2. Man stecke eine beliebige Gerade MN (Fig. 299) ab; von A, B fälle man die Lothe AC, BD auf MN, messe AC und mache DE = AC; dann messe man W. BAE = φ, so ist:

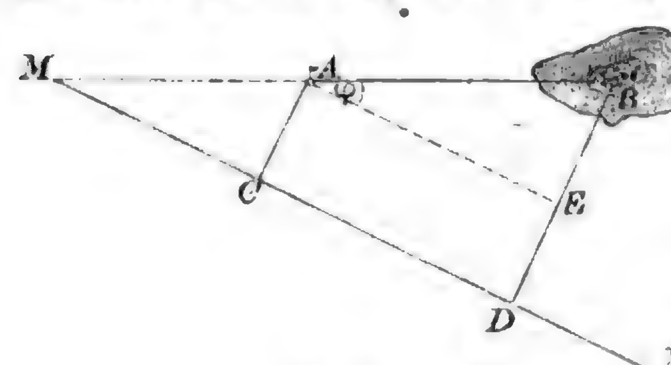


Fig. 299.

$$\frac{CD}{AB} = \cos \varphi$$

$$AB = \frac{CD}{\cos \varphi}.$$

Man könnte auch in MN den Punkt M bestimmen, der im Alignement von AB liegt und W. BMN messen; da BMN = BAE = φ, so erhielte man auf diesem Wege dieselbe Formel.

Auflösung 3. Geometrisch. Außerhalb AB nehme man zwei Punkte C, H (Fig. 300) so an, daß sie mit A in gerader Linie liegen, jedoch der eine diesseit, der andere jenseit A, und daß man von beiden nach B visiren könne. In BH nehme man

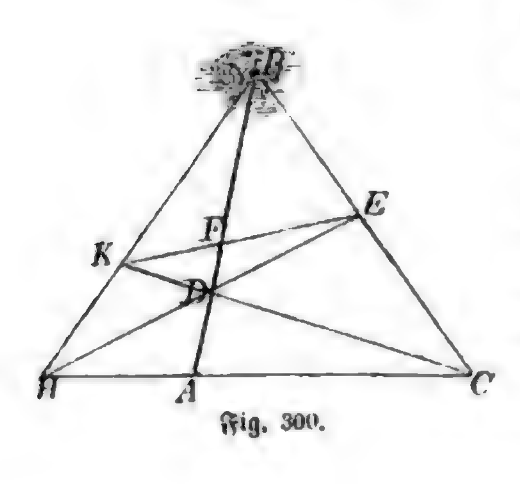


Fig. 300.

einen beliebigen Punkt K an, der von C aus sichtbar ist, bestimme den Durchschnitt D der Visirlinien AB und CK, und in BC den Punkt E, der mit H und D in gerader Linie liegt; endlich noch den Durchschnitt F von AB und EK. Dann ist:

$$AB = \frac{AD \cdot AF}{AD - DF}.$$

Beweis. BHDC ist ein vollständiges Viereck, AB Diagonale dieses Vierecks, daher liegen die Punkte A, D, F, B harmonisch und es ist:

$$DF : DA = BF : BA$$
$$DA - DF : DA = BA - BF : BA$$
$$DA - DF : DA = AF : AB$$
$$AB = \frac{AD \cdot AF}{AD - DF}.$$

Auflösung 4. Mit dem Meßtische. Man wähle einen beliebig seitwärts von AB liegenden Punkt C (Fig. 301), aus welchem man nach A und B visiren kann, stelle den Meßtisch über C auf, bestimme den Punkt c, welcher auf dem Tischblatte vertical über C liegt, stelle den Tisch in horizontaler Lage des Blattes fest und visire nach A und B, ziehe die Visirlinien ca, cb, messe CA und trage dasselbe nach verjüngtem Maßstabe auf die entsprechende Visirlinie auf; dann bringe man den Meßtisch nach A und stelle ihn so auf, daß a vertical über A liegt, lege das Lineal an ac an und drehe das Tischblatt im Kreise herum, bis das Haar des Diopters, oder das Fadenkreuz des Fernrohrs das in C aufgestellte Signal schneidet, stelle den Tisch fest und corrigire noch durch die feine Bewegung, visire nach B und ziehe ab, so ist Dreieck abc $\sim$ ABC, also gibt ab, nach dem verjüngten Maßstabe, das Maß von AB.

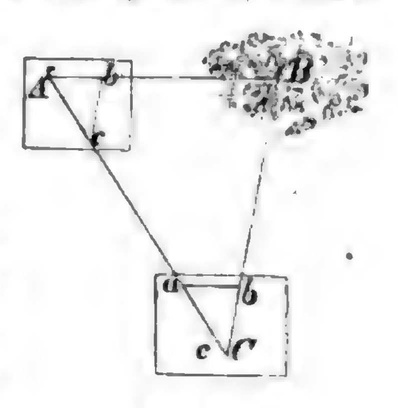


Fig. 301.

Auflösung 5. Durch geometrische Construction. Man nehme C wie vorhin an, messe AC und die beiden Winkel ACB und CAB, construire aus diesen drei Stücken das Dreieck abc $\sim$ ABC nach dem Maßstabe; im Dreieck abc gibt ab das Maß von AB.

Auflösung 6. Trigonometrisch. Man messe wie in 5 und berechne aus den gemessenen Stücken im Dreiecke ABC die Seite AB.

Dritter Fall. Es ist keiner der Endpunkte der Linie AB zugänglich.

Auflösung 1. Mit der Meßkette. Man wähle in der Verlängerung von AB (Fig. 302) einen beliebigen Punkt D, stecke eine Linie DC unter einem beliebigen Winkel mit AD und von beliebiger Länge ab, messe CD, trage von C aus einen beliebigen aliquoten Theil Cd der gemessenen Linie CD

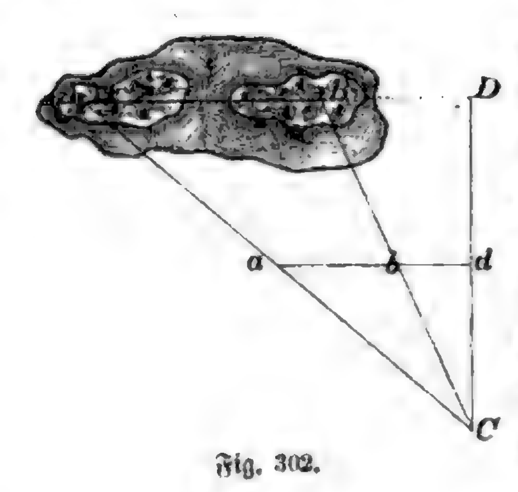


Fig. 302.

ab, durch d stecke man eine Gerade da unter demselben Winkel Cda ab, welchen CD mit DA macht; sie schneidet CB in b, CA in a; man messe ab, so ist:

$$ab : AB = Cd : CD.$$

Macht man ADC = 90°, so ist die nachherige Construction des Winkels adC erleichtert. Man kann übrigens auch nach I, 2 am Ende verfahren.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man nehme eine beliebige, nur nicht zu kleine Standlinie CD (Fig. 303) an und messe sie; dann bringe man den Meßtisch nach C, bestimme den über C liegenden Punkt c des Tischblattes, stelle den Meßtisch fest und visire nach D, ziehe die Richtungslinie cd und trage das Maß von CD verjüngt auf cd ab. Nun visire man nach A und B und ziehe die entsprechenden Richtungslinien Ca, Cb. Man bringe dann den Meßtisch nach D, orientire ihn nach DC, visire wieder nach A und B und ziehe die Visirlinien Da, Db. Die Gerade ab gibt, nach demselben Maßstabe gemessen, nach welchem CD aufgetragen wurde, das Maß der Linie AB.

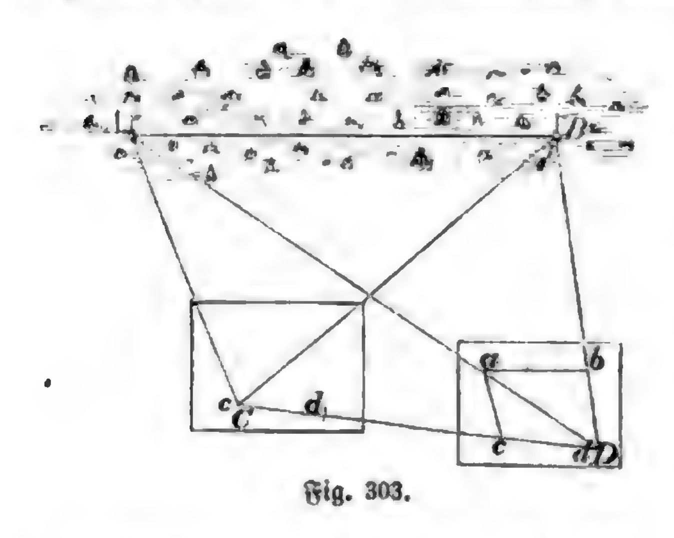


Fig. 303.

Auflösung 3. Geometrisch. Man messe das nach 2 abgesteckte CD (Fig. 303), trage es verjüngt auf, messe die Winkel ACB, BCD, CDA, BDA und trage sie in derselben Lage und Ordnung an die verjüngte cd an, endlich messe man das so construirte ab nach demselben Maßstabe, nach welchem CD aufgetragen wurde..

Auflösung 4. Trigonometrisch. Man messe wie in 3, berechne im Dreieck ACD (Fig. 303) die Seite AD, und im Dreieck BCD die Seite BD, so läßt sich im Dreieck ADB die Seite AB aus AD, BD und W. ADB berechnen. Das Verfahren bliebe noch dasselbe, wenn die Linie AB die Standlinie CD durchschnitte.

In allen Fällen, die im Vorhergehenden aufgeführt worden, auch selbst dann, wenn zwar die Linie AB vollkommen zugänglich ist, aber wegen ihrer bedeutenden Länge doch wol nicht mit ausreichender Genauigkeit gemessen werden kann, ist folgendes Verfahren allen andern vorzuziehen. Man stecke entweder in der Umgebung der Linie AB (Fig. 304), oder auch, wenn dies

nicht thunlich, in weiterer Entfernung davon eine Anzahl Punkte C, D, E, F so ab, daß sie sich zu einer Reihe von Dreiecken verbinden lassen, in welchen A und B zwei solche Dreieckspunkte ausmachen. Unter den verschiedenen Dreiecksseiten suche man nun diejenige heraus, welche sich am leichtesten und sichersten mit der Kette oder mit Stäben messen läßt; es sei dies z. B. CD; man messe sie auf die eine oder andere Art, je nach dem geforderten Grade der Genauigkeit. Ihr Maß sei = a Ruthen. Dann messe man alle Winkel des Dreiecks ACD (den dritten zur Prüfung und Verbesserung der ersten beiden). Aus diesen Größen berechne man AC, nämlich:

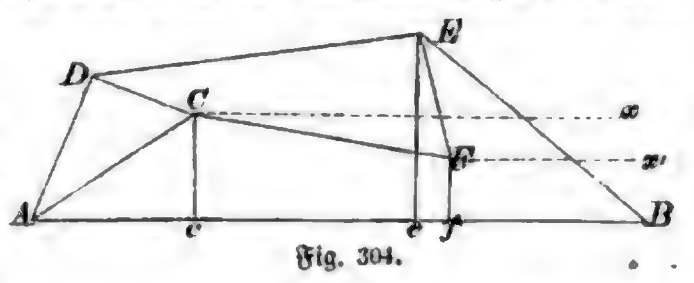


Fig. 304.

$$AC = \frac{a \cdot \sin D}{\sin A}.$$

Man messe ferner den Winkel CAB und berechne die Projection Ac von AC auf AB, nämlich: $Ac = AC \cdot \cos CAB$.

Dann messe man im Dreieck CDE zwei Winkel, berechne

$$CE = \frac{a \cdot \sin CDE}{\sin CED}.$$

Man betrachte dann AC, CE, EB als Seiten eines Polygons ACEB; da die Neigung von AC zu AB bekannt ist und die Winkel ACD und DCE gemessen sind, so ist auch der Polygonwinkel ACE bekannt, also kann nach §. 46 der Neigungswinkel ECx von EC zu einer durch C gedachten Parallelen Cx berechnet werden; man kann also auch die Projection

$$ce = CE \cdot \cos ECx$$

finden. Nun messe man die Winkel des Dreiecks CEF; aus ihnen und CE berechne man EF; messe endlich die Winkel des Dreiecks EFB und berechne EB, sowie den Neigungswinkel von EB zu AB, daraus die Projection Be von BE auf AB. Dann ist:

$$AB = Ac + ce + eB.$$

Man könnte auch im Dreieck CEF die Seite CF berechnen, daraus und ihrem Neigungswinkel zu Fx' die Projection cf, dann im Dreieck EFB die Seite FB und ihre Projection Bf u. s. w.

§. 264. **Aufgabe.** Durch einen außerhalb einer Geraden AB gegebenen Punkt C eine mit AB parallele Gerade abzustecken, wenn AB selbst nicht zugänglich ist.

Auflösung 1. Geometrisch. Man nehme außer dem gegebenen Punkte C (Fig. 305) noch einen Punkt D an, von welchem aus man nach A und B visiren kann, messe CD und trage es nach verjüngtem Maßstabe auf; dann messe man die Winkel ACD und ADC, so läßt sich Dreieck ACD verjüngt entwerfen. Ebenso entwerfe man das Dreieck BCD aus CD und den

Winkeln BCD und BDC, welche gemessen werden. Hat man nun beide Dreiecke ACD und BCD, in ihrer richtigen Lage an CD angetragen, so bestimmt sich dadurch AB, also auch Winkel ABC. Die Linie BC aber ist im Felde bestimmt und bezeichnet. Man trage also an BC in C den W. BCE = ABC, so ist CE $\#$ AB. Dies letztere aber geschieht dadurch, daß man W. ABC nach §. 247 aus der Zeichnung in Graden bestimmt und in C mit dem Winkelmesser oder mit der Kette anträgt.

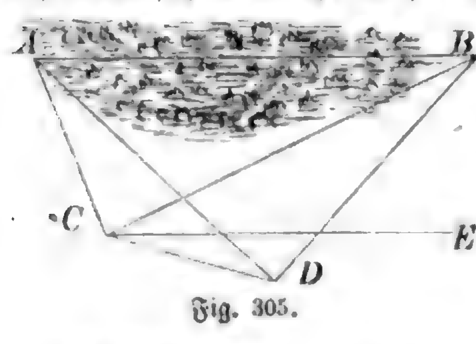


Fig. 305.

Auflösung 2. Trigonometrisch. Man nehme CD (Fig. 305) an wie in 1, messe CD und die Winkel ACD und ADC, berechne daraus AC; dann messe man die Winkel BCD und BDC, berechne im Dreieck BCD die Seite BC; endlich messe man noch Winkel ACB und berechne im Dreieck ACB den W. ABC aus AC, BC und W. ACB. Den Winkel ABC trage man in C an BC an, so ist CE $\#$ AB.

Auflösung 3. Mit der Kette. Wenn wenigstens zwei Punkte A, B (Fig. 306) der gegebenen Geraden AB zugänglich sind, so nehme man in BC einen beliebigen Punkt O an, messe AO, BO und CO und setze:

$$AO : BO = x : CO,$$

so hat man:

$$x = \frac{AO \cdot CO}{BO};$$

dann verlängere man AO und trage den eben gefundenen Werth x von O aus in der Verlängerung von AO ab, so daß OD = x wird, so ist CD $\#$ AB, weil dann die Dreiecke AOB und COD ähnlich, also die Winkel ABC und BCD gleich sind.

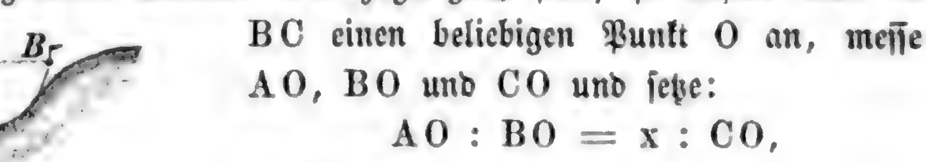


Fig. 306.

Wenn die Linie AB ganz unzugänglich ist, so kann man auch die Lösung §. 249, 4 anwenden.

Auflösung 4. Mit dem Meßtische. Man wähle, wie in 1, außer C noch einen Punkt D (Fig. 307), aus welchem man nach A, B und C visiren kann, stelle den Meßtisch in D auf, bemerke sich genau den Punkt d des Tischblattes senkrecht über D, mache das Blatt gehörig horizontal und stelle es

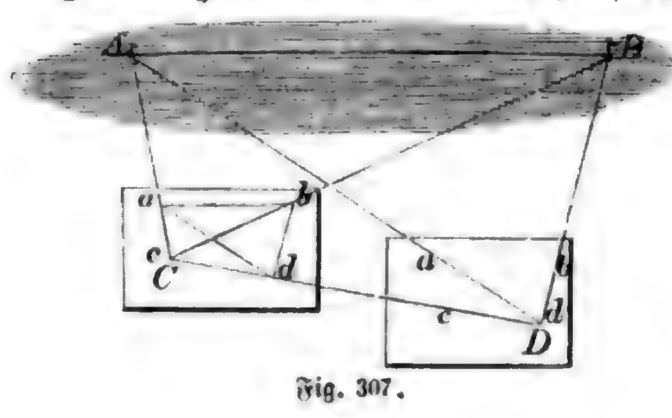


Fig. 307.

dann fest. Nun visire man nach A, B und C und ziehe auf dem Papier die entsprechenden Richtungslinien da, db, cd. Dann messe man CD und trage das gefundene Maß nach dem verjüngten Maßstabe von d aus auf dc ab, so ist auf dem Papier der dem Punkte C im Felde entsprechende Punkt c gefunden. Man bringe dann den Meßtisch nach C hin, stelle c genau senkrecht über C und drehe das Tischblatt zugleich so, daß cd in die Richtung von CD zu liegen kommt, stelle das Blatt fest und corrigire die geringe vielleicht noch vorhandene Abweichung mittels der feinen Bewegung; dann visire man nach A und B, und ziehe die entsprechenden Richtungslinien ca, cb. Da der Linie cd die Richtung von CD gegeben ist, und W. bdc = BDC ist, so ist bd ∦ BD, also Dreieck bcd ∼ BCD; folglich ist:

$$cd : bd = CD : BD.$$

Ebenso ist W. adc = ADC, also ad ∦ AD, folglich Dreieck adc ∼ ADC und

$$cd : ad = CD : AD,$$

also auch: $bd : ad = BD : AD.$

Da überdies W. adb = ADB, weil beide Schenkelpaare parallel sind, so ist Dreieck ADB ∼ adb, also AB ∦ ab. Man ziehe nun auf dem Papier des Tischblattes durch c die Gerade ce ∦ ab, überzeuge sich, ob der Meßtisch noch auf CD orientirt sei, und corrigire die etwa vorgefallene Verrückung; endlich visire man in der Richtung ce und lasse in dieser Richtung die Gerade CE abstecken, so ist CE ∦ AB.

Auflösung 5. Mit dem Winkelmesser. Durch den gegebenen Punkt C (Fig. 308) lege man eine beliebige Gerade MN, bestimme in MN denjenigen Punkt O, der im Alignement von AB liegt, messe dort den Winkel AOM = ω; in C trage man an NC den Winkel NCE = ω, so ist CE ∦ AB.

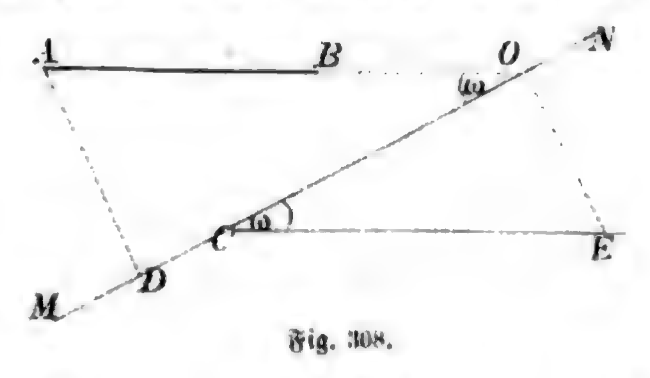


Fig. 308.

Man könnte dasselbe auch mit der Kette ausführen. Von A müßte man ein Loth AD auf MN fällen, in O ein Loth OE auf MN errichten, OD und, wenn es möglich ist, AD messen, dann auf OE von O aus die Länge x abtragen, bestimmt durch die Proportion:

$$OD : AD = OC : x$$

$$x = \frac{AD \cdot OC}{OD},$$

so ist CE ∦ AB. Denn Dreieck CEO ∼ OAD, also W. OCE = AOD, also CE ∦ AB.

§. 265. **Aufgabe.** Eine Gerade AB zu messen, wenn ein Theil CD derselben unzugänglich ist, dagegen zu jeder Seite des unzugänglichen Theils ein Stück gemessen werden kann, auch von einem Standpunkte O aus die Winkel α, β, γ, unter welchen die drei Theile der Linie AB erscheinen, gemessen werden können.

Auflösung 1. Geometrisch. Man messe AO, BO (Fig. 309) und W. AOB $= \alpha + \beta + \gamma$, und construire aus diesen Stücken das Dreieck AOB nach verjüngtem Maßstabe, so erhält man AB nach demselben Maßstabe. Wollte man besonders noch CD kennen, so müßte man AC, BD messen und abtragen, so bliebe CD übrig.

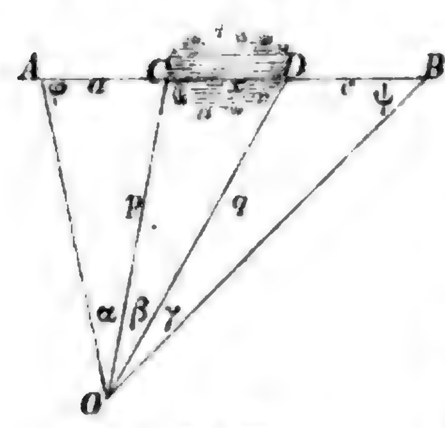


Fig. 309.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. In O (Fig. 309) nimmt man den W. AOB auf, bringt dann den Meßtisch nach A, orientirt ihn nach AO und nimmt W. BAO auf; dann mißt man AO im Felde und das entsprechende ao auf dem Papier, bestimmt danach den Maßstab, nach welchem ao aufgetragen, und mißt nun ab nach demselben Maßstabe.

Auflösung 3. Trigonometrisch. Es sei (Fig. 309) AC $=$ a, BD $=$ c gemessen, so ist CD $=$ x noch zu bestimmen. In O messe man die drei Winkel α, β, γ und setze nun noch OC $=$ p, OB $=$ q, W. CAO $= \varphi$ und W. DBO $= \psi$, obgleich diese Größen nicht gemessen sind und nachher aus der Rechnung wieder herausfallen. Dann ist:

im Dreieck AOC : $a : p = \sin\alpha : \sin\varphi$,

im Dreieck BOD : $c : q = \sin\gamma : \sin\psi$,

im Dreieck AOD : $q : a + x = \sin\varphi : \sin(\alpha + \beta)$,

im Dreieck BOC : $p : c + x = \sin\psi : \sin(\beta + \gamma)$.

Multiplicirt man diese vier Gleichungen und reducirt, so kommt:

$$\frac{ac}{(a + x)(c + x)} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)};$$

ordnet man die Glieder, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 + (a + c)\,x + ac = ac \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma},$$

deren Auflösung, da hier nur der positive Werth der Wurzel gelten kann, nach einiger Umformung:

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + c) + \tfrac{1}{2}(a - c)\sqrt{1 + \frac{4ac \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{(a - c)^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}}$$

liefert. Setzt man nun:

$$\frac{4ac \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{(a - c)^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \operatorname{tg} w^2,$$

so ist:

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + c) + \tfrac{1}{2}(a - c)\sqrt{1 + tg\, w^2}$$

oder $$x = -\frac{a + c}{2} + \frac{a - c}{2 \cos w}.$$

Für den besondern Fall, daß $a = c$, müßte man die Rechnung von vornherein führen, weil das eben gewonnene Endresultat für diesen Fall nicht den richtigen Werth gibt. Man erhält dann nämlich aus der ersten Gleichung, nachdem man die Proportionen multiplicirt hat:

$$\frac{a^2}{(a + x)^2} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)},$$

und hieraus:

$$a + x = a\sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}},$$

eine Formel, die zur numerischen Berechnung schon sehr geeignet ist.

§. 266. **Aufgabe.** Eine auf dem Papier verzeichnete unregelmäßig gekrümmte Linie im Felde abzustecken.

Auflösung. Es sei gegeben und auf dem Papier verzeichnet die krumme Linie ABCDEFGHJKL (Fig. 310). Von ihrem Anfangspunkte A aus lege man eine beliebige Gerade AX durch die Linie hindurch oder doch in ihrer Nähe; betrachte AX als Abscissenachse, A als den Anfangspunkt und messe die rechtwinkeligen Abscissen und Ordinaten jedes ausgezeichneten Punktes der krummen Linie, d. h. jedes Punktes, wo die krumme Linie eine Wendung macht u. dgl., nach einem beliebigen Maßstabe. Man habe z. B. gefunden:

die Coordinaten von $A = 0, 0$;
" " " $B = x_1, y_1$;
" " " $C = x_2, y_2$ u. s. w.

Nun stecke man im Felde die Abscissenachse AX ab, und zwar, wenn Bedingungen für die Lage der krummen Linie im Felde gegeben sind, so, daß diesen Bedingungen genügt wird, trage vom Anfangspunkte A aus die so gefundenen Maße aller Abscissen in wirklichem Maß (Ruthen, Fuß u. s. w.) auf, nämlich $AB_1 = x_1$, $AC_1 = x_2$, $AD_1 = x_3$ u. s. w., bezeichne die Punkte A_1, B_1, C_1 u. s. w., errichte in ihnen Lothe zur Achse AX und trage auf jedes dieser Lothe von der Abscissenachse aus die entsprechende Ordinate auf, nämlich $BB_1 = y_1$, $CC_1 = y_2$, $D = 0$, $EE_1 = y_4$, $FF_1 = y_5$ u. s. w. Die so gefundenen Punkte ABCDEF..... bestimmen die verlangte krumme Linie.

Bei der Wahl der Punkte, wo man die Coordinaten der krummen Linie bestimmt, sehe man insbesondere darauf, daß es solche Punkte sind, in welchen die krumme Linie eine Wendung macht, so daß man die dadurch im Felde bestimmten Punkte ohne erhebliche Fehler durch gerade Linien, oder doch

durch Bogen von nur schwacher Krümmung verbinden, d. h. hier noch in engern Zwischenräumen abstecken kann.

§. 267. **Aufgabe.** Eine im Felde bezeichnete unregelmäßig gekrümmte Linie in Grundriß zu legen, d. h. eine Horizontalprojection nach verjüngtem Maßstabe zu verzeichnen.

Auflösung. Man bezeichne alle Wendepunkte der krummen Linie mit Signalen, stecke eine Gerade ab, welche entweder längs der krummen Linie hinläuft oder sie ein oder mehrere Male schneidet, wie AX (Fig. 310), fälle von allen Wendepunkten der krummen Linie Lothe auf die Achse AX, messe die Abscissen und Ordinaten jener Wendepunkte in Bezug auf die Achse AX und A als Anfangspunkt, stelle solche in einem geordneten Verzeichniß zusammen, indem man die Ordinaten, welche auf die eine Seite von AX fallen als positive, die auf die entgegengesetzte Seite fallenden als negative verzeichnet, und lege nun auf dem Papier eine beliebige Gerade AX als Achse zu Grunde, trage auf ihr, von einem willkürlich in derselben gewählten Punkte A aus alle Abscissen, und senkrecht darauf alle Ordinaten ordnungsmäßig nach dem bei der Messung angelegten Register nach einem verjüngten Maßstabe auf und verbinde die so gewonnenen Endpunkte der Ordinaten durch Linien mit einander, welche mit den im Felde abgesteckten Verbindungslinien möglichst übereinstimmen.

A, B_1, b, B, C_1, C, D, E, E_1, F, F_1, G, G_1, H, H_1, J, K, K, L, X

Fig. 310.

§. 268. **Aufgabe.** Die Länge einer im Felde bezeichneten unregelmäßig gekrümmten Linie zu bestimmen.

Auflösung. Es sei die krumme Linie ABC.... L (Fig. 310) zu messen. Man bezeichne ebenso, wie vorhin, alle Wendepunkte der krummen Linie und bezeichne die Fußpunkte ihrer Ordinaten in der Achse AX; dann betrachte man jedes zwischen zwei Ordinaten liegende Bogenstück, wie z. B. AB, BC u. s. w., als gerade Linie, messe die Neigungswinkel dieser Linien zur Achse AX, nämlich $BAB_1 = \alpha$, $BCb = \gamma$, indem man hier, und wo es sonst nöthig ist, eine Parallele zur Achse absteckt, wie Cb, was leicht dadurch geschieht, daß man $B_1b = CC_1$ macht. Man hat dann:

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos\alpha, \quad \frac{bC}{BC} = \cos\gamma \text{ u. s. w.,}$$

oder, wenn $AB = \lambda_1$, $BC = \lambda_2$, $CD = \lambda_3$ u. s. w. gesetzt wird:

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{\cos\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{\cos\gamma}, \quad \lambda_3 = \frac{x_3 - x_2}{\cos\delta} \text{ u. s. w.,}$$

während $ABCD \ldots . L = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots .$

§. 269. **Aufgabe.** Um einen im Felde gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis abzustecken.

Auflösung. Durch den gegebenen Mittelpunkt C (Fig. 311) lege man zwei sich rechtwinkelig durchschneidende Gerade XX', YY' als Abscissen- und Ordinatenachse. Nennt man nun r den Radius, x die Abscissen, y die Ordinaten der Punkte der zu construirenden Kreislinie, so ist für jeden beliebigen Punkt M:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

oder:

$$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$$

$$y = \pm \sqrt{(r + x)(r - x)}.$$

Die Ordinate y bekommt reelle Werthe für alle positiven und negativen Werthe von x, die, absolut genommen, nicht größer sind als r, und zwar bekommt y für jeden Werth von x zwei, absolut genommen gleiche Werthe, einen positiven und einen negativen. Man gebe daher dem x nach dem Maßstabe, nach welchem r genommen werden soll, die Werthe + 1, + 2, + 3 ..... + r, dann auch die Werthe: — 1, — 2, — 3 ..... — r, trage diese vom gegebenen Mittelpunkte C aus auf der Abscissenachse XX' nach rechts und nach links hin auf, errichte in jedem der so bestimmten Punkte ein Loth als Ordinate, nach beiden Seiten der XX', wie MN in P, berechne dann zu jedem Werthe von x die beiden Werthe von y nach der obigen Formel, und trage den positiven Werth von y auf der entsprechenden Ordinate vom Fußpunkte P in der Abscissenachse XX' aus nach der einen, den negativen nach der andern Seite hin auf, so daß z. B. für P, PM die positive, PN die negative Ordinate ist; so hat man zuletzt so viele Punkte der verlangten Kreislinie bestimmt und bezeichnet, als man verschiedene Werthe für x angenommen hatte.

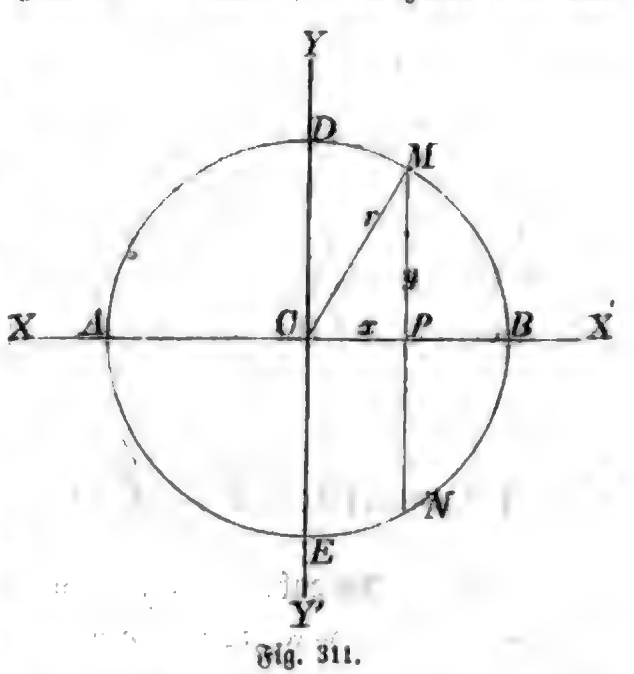


Fig. 311.

§. 270. **Aufgabe.** Um einen gegebenen und deutlich bezeichneten, aber unzugänglichen Mittelpunkt herum einen Kreis von gegebenem Radius abzustecken.

Auflösung. Es sei C (Fig. 312) der gegebene Mittelpunkt, AC = r der vorgeschriebene Radius des zu construirenden Kreises. Aus einem beliebigen Punkte D visire man über C fort nach der entgegengesetzten Seite und stecke die Linie DE ab. In beliebigen Punkten D, E errichte man Lothe Dd,

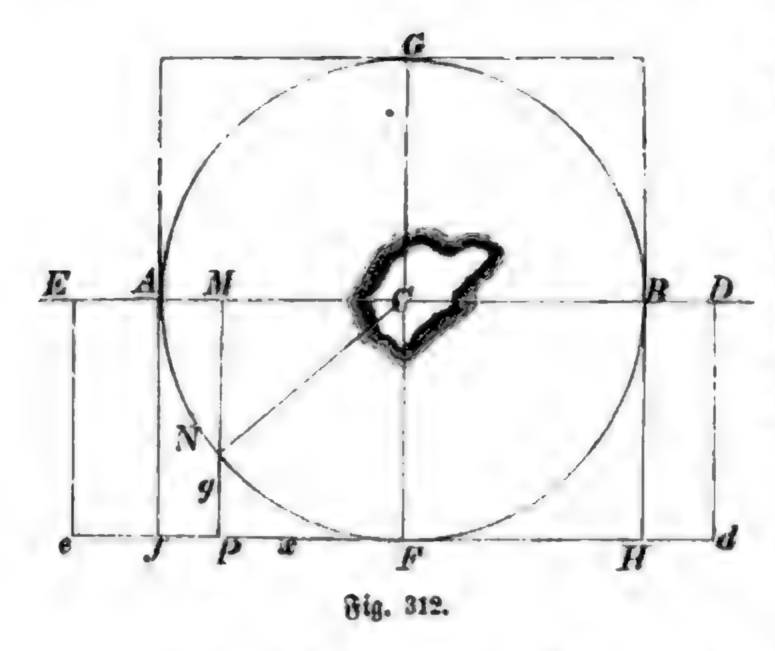


Fig. 312.

Ee auf DE und mache jedes dieser Lothe = r, so ist ed eine Tangente an den gesuchten Kreis; dann errichte man ein Loth FG, welches durch C geht, auf ed, mache FJ = FH = r, errichte JA senkrecht auf JH und = r, HB senkrecht auf JH und = r, so sind A, B Punkte des Kreises. Es sei nun FP = x, PN = y, so ist MN = r — y und

$$r^2 = x^2 + (r - y)^2 = x^2 + r^2 - 2ry + y^2$$
$$y^2 - 2ry = - x^2$$
$$y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2} = r \pm \sqrt{(r + x)(r - x)}.$$

Hiernach lassen sich die Ordinaten PN = y und alle andern für jedes x (= FP) berechnen, somit alle Punkte des Halbkreises AFB abstecken. Mit dem andern Halbkreise verfährt man ebenso.

C. Zusammengesetztere Aufgaben über das Messen der Winkel.

§. 271. **Aufgabe.** Einen im Felde abgesteckten Horizontalwinkel auszumessen, wenn man vom Scheitelpunkte aus nur auf dem einen Schenkel messen, auf dem andern nur visiren kann.

Auflösung. Es sei ABC (Fig. 313) der zu messende Winkel. Man verlängere AB über B hinaus um ein beliebiges Stück BD, messe BD und

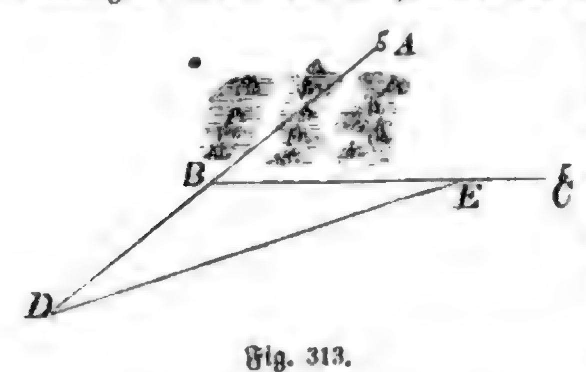


Fig. 313.

stecke auf BC ebenfalls ein beliebiges, gleichfalls gemessenes Stück BE ab, so läßt sich Dreieck BDE auf dem Papier aus seinen drei Seiten construiren, also auch der Winkel DBE bestimmen; dann ist W. ABC = 180° — DBE.

Sollte das Messen auf dem Schenkel BC auch nicht angehen, so müßte man auch diesen verlängern und den Scheitelwinkel von ABC messen oder doch indirect bestimmen.

Man sieht übrigens ein, daß diese besondere Auflösung des hier angenommenen Falles nur für die Kettenmessung nöthig ist; kann man an den Schei-

telpunkt B kommen, so bleibt die Bestimmung des Winkels durch Winkelmesser dieselbe, mögen die Schenkel im übrigen zugänglich sein oder nicht.

§. 272. **Aufgabe.** Einen schiefgeneigten Winkel auf den Horizont zu reduciren.

Auflösung. Es liege der Winkel BAC (Fig. 314) in einer gegen den Horizont schief geneigten Ebene und es soll die Größe seiner Horizontalprojection gefunden werden. AB_1 sei die Horizontalprojection des Schenkels AB, AC_1 die des Schenkels AC. In AB und AC nehme man zwei beliebige, aber einander gleiche Entfernungen Ab = Ac, fälle die Verticalen bb_1 und cc_1 auf die durch den Scheitel A gelegte Horizontalebene, so treffen diese die Projectionen AB_1 und AC_1 in b_1 und c_1. Da die Entfernungen Ab, Ac beliebig sind, so kann man sie auch der Einheit des Maßes gleich setzen, womit alle Linien der Figur gemessen werden. Setzt man dann noch W. BAC = α, $BAB_1 = \beta$, $CAC_1 = \gamma$, so ist:

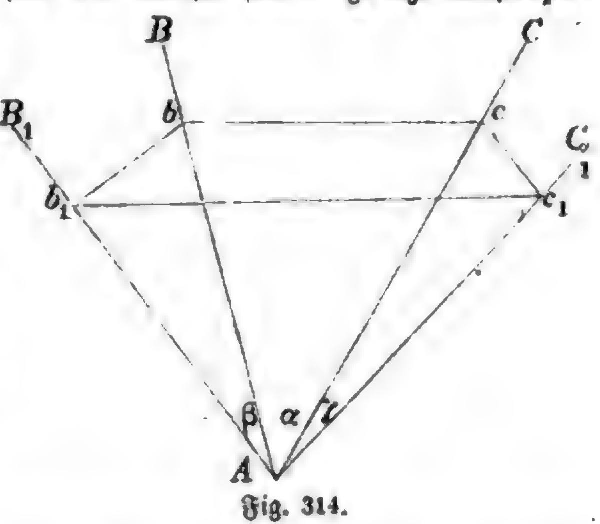


Fig. 314.

1) $Ab_1 = \cos\beta$; 2) $Ac_1 = \cos\gamma$;

3) $bb_1 = \sin\beta$; 4) $cc_1 = \sin\gamma$;

$$5)\ bc = 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2(1 - \cos\alpha)}.$$

Die Gerade b_1c_1 liegt in der Horizontalebene und bb_1 und cc_1 sind vertical, also ist W. $bb_1c_1 = cc_1b_1 = 90°$, und das Viereck bcc_1b_1 hat die Gestalt der (Fig. 315), wo die entsprechenden Punkte auch mit denen der (Fig. 314) gleich benannt sind; es ist ein Trapez mit zwei rechten Winkeln, zieht man darin ac ╪ b_1c_1, so hat man:

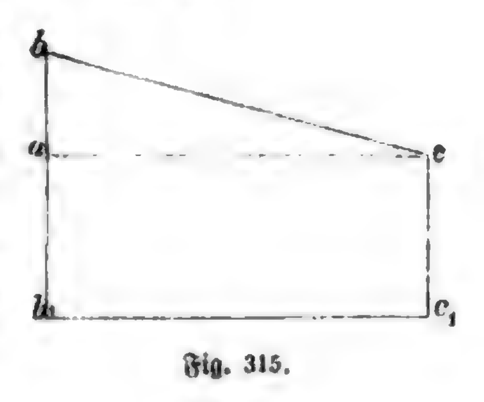


Fig. 315.

$$bc^2 = b_1c_1^2 + (bb_1 - cc_1)^2,$$

d. h. $2(1 - \cos\alpha) = b_1c_1^2 + (\sin\beta - \sin\gamma)^2$,

also: 6) $b_1c_1^2 = 2(1 - \cos\alpha) - (\sin\beta - \sin\gamma)^2$.

W. B_1AC_1 ist die Horizontalprojection des W. α; sie heiße x, so ist in dem Dreiecke b_1Ac_1:

$$7)\ b_1c_1^2 = Ab_1^2 + Ac_1^2 - 2Ab_1 \cdot Ac_1 \cdot \cos x.$$

Substituirt man hierin für b_1c_1, Ab_1 und Ac_1 ihre Werthe aus den Gleichungen (6), (1) und (2), so erhält man:

$$\cos x = \frac{\cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + (\sin\beta - \sin\gamma)^2 - 2(1 - \cos\alpha)}{2\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

$$8)\quad \cos x = \frac{\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

Dieser Ausdruck ist indeß zur Logarithmenrechnung noch nicht geeignet; er muß deshalb noch eine Umformung erleiden, indem man $^1/_2$ x statt x einführt. Nun ist:

$$\sin {}^1/_2\, x^2 = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

$$= \frac{\cos(\beta - \gamma) - \cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

$$= \frac{\sin {}^1/_2(\alpha + \beta - \gamma)\cdot\sin {}^1/_2(\alpha - \beta + \gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

$$9)\quad \sin {}^1/_2\, x = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2(\alpha + \beta - \gamma)\cdot\sin {}^1/_2(\alpha - \beta + \gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}}.$$

Ebenso findet man:

$$10)\quad \cos {}^1/_2\, x = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2(\alpha + \beta + \gamma)\cdot\cos {}^1/_2(\alpha - \beta - \gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}},$$

und aus (9) und (10) wieder:

$$11)\quad \mathrm{tg}\, {}^1/_2\, x = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2(\alpha + \beta - \gamma)\cdot\sin {}^1/_2(\alpha - \beta + \gamma)}{\cos {}^1/_2(\alpha + \beta + \gamma)\cdot\cos {}^1/_2(\alpha - \beta - \gamma)}}.$$

Lägen B und C, statt über dem Horizonte, unter demselben, so wären β und γ Depressionswinkel und man müßte ihre negativen Werthe in Rechnung bringen; und wäre B unter, C aber über dem Horizonte des Auges in A, so müßte statt β der negative Winkel — β in die Rechnung eingeführt werden; und läge endlich das eine Object, etwa C, im Horizonte, so würde der entsprechende Höhenwinkel $\gamma = 0^\circ$ werden.

Um daher die Horizontalprojection $b_1 A c_1$ oder x eines schief geneigten Winkels b A c oder B A C zu finden, hat man die drei Winkel α, β, γ zu messen, und aus diesen Größen x nach einer der Formeln (9), (10) oder (11) zu berechnen.

Beispiel. Es sei $\alpha = 68^\circ\ 23'\ 30''$, $\beta = 17^\circ\ 18'\ 0''$, $\gamma = -23^\circ\ 43'\ 30''$ durch Messung gefunden, so ist:

$$\alpha + \beta + \gamma = 61^\circ\ 58$$
$$^1/_2(\alpha + \beta + \gamma) = 30\quad 59$$

$$\alpha = 68^\circ\ 23'\ 30$$
$$\beta + \gamma = -\ 6\quad 25\quad 30$$
$$\alpha - (\beta + \gamma) = 74\quad 49\quad 0$$
$$^1/_2(\alpha - (\beta + \gamma)) = 37\quad 24\quad 30.$$

$\log\cos 30^\circ\ 59' = 9{,}9331415$		$\log\cos\beta = 9{,}9798946$	
$\log\cos 37\ 24\ 30 = 9{,}8999989$		$\log\cos\gamma = 9{,}9616800$	
$19{,}8331404$		$9{,}9415746$	
$9{,}9415746$			
2) $9{,}8915658-10$			

$$\log\cos \tfrac{1}{2}x = 9{,}9457829-10$$
$$\tfrac{1}{2}x = 28^\circ\ 2'\ 15'',8$$
$$x = 56\ \ 4\ \ 31{,}6.$$

§. 273. Es kommt zuweilen vor, daß man den Winkelmesser nicht genau am Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufstellen kann und sich dann begnügen muß, einen möglichst nahen Punkt zu wählen. Sollte z. B. (Fig. 316) von A aus der Winkel BAC = x gemessen werden und man könnte das Instrument wol in D, aber nicht in A anbringen, so erhielte man, statt des Winkels BAC, den W. BDC, welcher dem erstern nur in dem Falle gleich ist, wenn die vier Punkte B, C, A, D in der Peripherie eines Kreises liegen; in jedem andern Falle wird W. BDC $\gtrless$ BAC sein. Hat man also BDC statt BAC gemessen, so kommt es darauf an, durch eine Formel den W. BAC aus jenem und noch andern direct meßbaren Größen abzuleiten. Die Lösung dieser Aufgabe heißt das **Centriren der Winkel**.

Fig. 316.

§. 274. **Aufgabe.** Man kann von einem Standpunkte A aus (Fig. 316) den Winkel BAC zweier entfernten Objecte B und C nicht messen; von einem benachbarten Punkte D aus jedoch kann der Winkel BDC gemessen werden. Man soll aus dem gemessenen Winkel BDC den Winkel BAC berechnen.

Auflösung. Man messe in D die Winkel BDC = δ und CDA = ε, sowie die Weiten AD = d, AB = b und AC = c. Sollte BDC in einer schiefen Ebene liegen, so suche man seine Horizontalprojection nach §. 272 und setze ihren Werth überall da, wo im Folgenden δ auftritt. Nun ist:

$$1)\quad b : d = \sin(\delta + \varepsilon) : \sin\beta.$$
$$2)\quad c : d = \sin\varepsilon : \sin\gamma.$$

Hieraus folgt:
$$3)\quad \sin\beta = \frac{d\cdot\sin(\delta+\varepsilon)}{b},$$
$$4)\quad \sin\gamma = \frac{d\cdot\sin\varepsilon}{c},$$

woraus β und γ in bekannten Größen ausgedrückt gefunden werden. Dann ist ferner:
$$\text{W. } DAB = \alpha = \pi - (\beta + \delta + \varepsilon),$$
$$\text{W. } DAC = \pi - (\gamma + \varepsilon),$$
also:
$$5)\quad x = DAC - DAB = \beta - \gamma + \delta.$$

§. 275. Wegen der besondern Beschaffenheit des Terrains können folgende verschiedene Fälle eintreten:

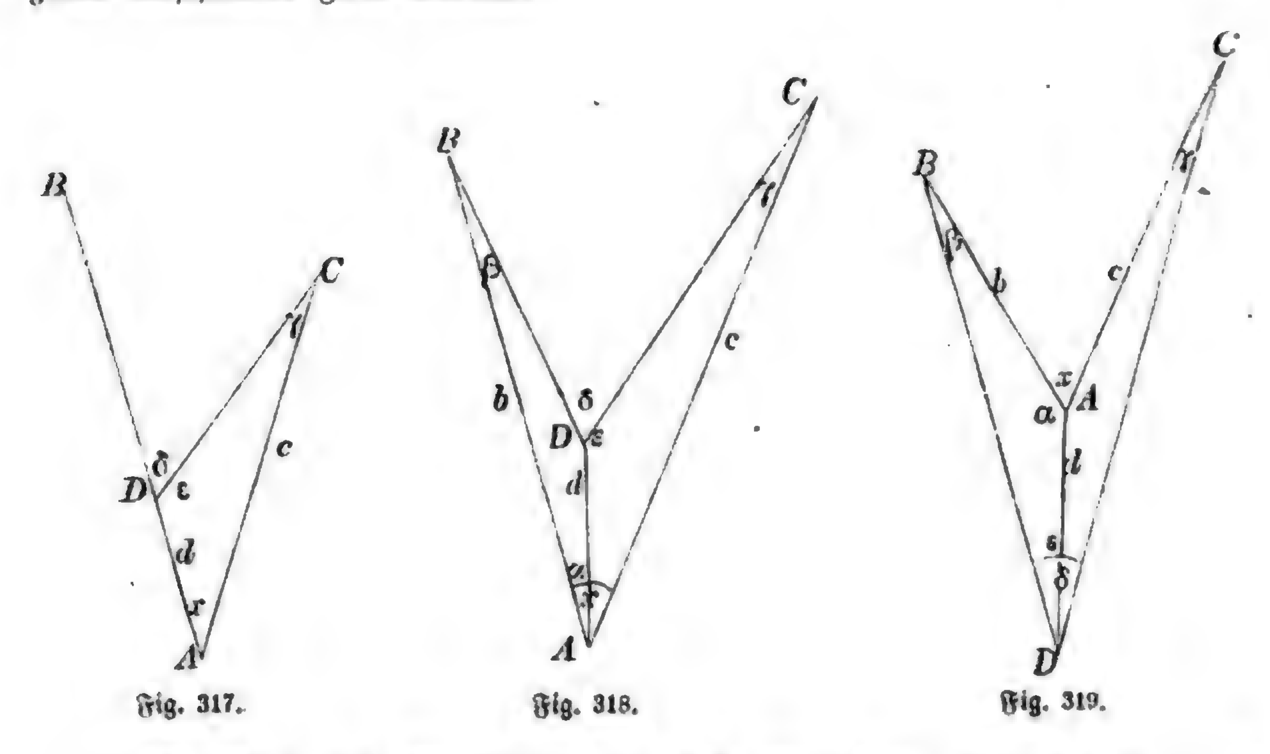


Fig. 317. Fig. 318. Fig. 319.

1) D fällt in das Alignement von AB (Fig. 317); dann ist $\alpha = \beta = 0$, also $DAB = 0$ und

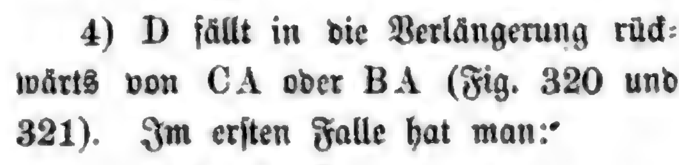
$$x = DAC = \pi - (\gamma + \varepsilon).$$

2) D fällt innerhalb der Schenkel des Winkels BAC (Fig. 318); in diesem Falle ist:

$$\sin\beta = \frac{d \cdot \sin\alpha}{b} \text{ und } x = \delta - \beta - \gamma.$$

3) A fällt innerhalb der Schenkel des Winkels BDC (Fig. 319); dann ist:

$$\sin\beta = \frac{d \cdot \sin(\delta - \varepsilon)}{b} \text{ und } x = \beta + \gamma + \delta.$$



4) D fällt in die Verlängerung rückwärts von CA oder BA (Fig. 320 und 321). Im ersten Falle hat man:

$$\sin\beta = \frac{d \cdot \sin\delta}{b} \text{ und } x = \beta + \delta;$$

im andern Falle:

$$\sin\gamma = \frac{d \cdot \sin\delta}{c} \text{ und } x = \gamma + \delta.$$

5) Es ist d gegen b und c sehr klein, dann werden auch die Winkel β und γ sehr klein, also $\beta - \gamma$ nahezu $= 0$ und $x = \delta$, d. h. die Entfernung des Standortes vom wahren Scheitel des Winkels x hat

Fig. 320.

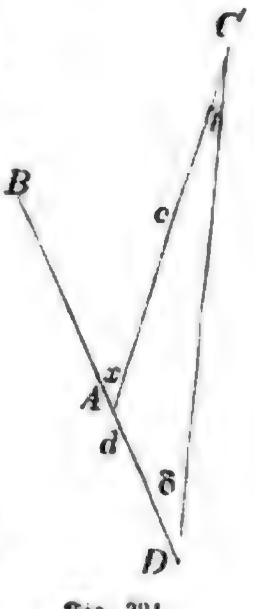


Fig. 321.

keinen Einfluß auf die Größe dieses Winkels. Da jedoch hierdurch noch keine Grenze für die Richtigkeit dieses Satzes festgestellt ist, so wird der Gegenstand noch einer genauern Untersuchung bedürfen.

§. 276. Ist, wie in §. 274, 4 gegeben:

$$\sin \gamma = \frac{d \cdot \sin \varepsilon}{c},$$

und ist ε in Secunden ausgedrückt, so hat man auch:

$$\sin \gamma = \frac{d \cdot \sin \varepsilon}{c} \cdot \omega \ (\S.\ 24)$$

in Theilen des Radius. Und ist γ selbst sehr klein, so kann man γ statt sin γ setzen.

Wenn also (§. 274, 5) die Gleichung

$$x = \delta + \beta - \gamma$$

gefunden war, und (§. 274, 3):

$$\sin \beta = \frac{d \cdot \sin (\delta + \varepsilon)}{b},$$

sowie (4):

$$\sin \gamma = \frac{d \cdot \sin \varepsilon}{c},$$

und nun β und γ sich als sehr kleine Winkel erweisen, weil d gegen b und c sehr klein angenommen worden, so kann man dann stets β statt sin β und γ statt sin γ setzen, hat also dann auch vermöge §. 274, 5:

$$x = \delta + \frac{\omega \cdot d \cdot \sin (\delta + \varepsilon)}{b} - \frac{\omega \cdot d \cdot \sin \varepsilon}{c},$$

und diese Formel kann ohne erheblichen Fehler bis zu dem Werthe von 29′ für die Winkel β und γ gebraucht werden (§. 24).

§. 277. Es kann bei der Lösung der Aufgabe des §. 274 auch noch der Fall eintreten, daß die Linien b und c eines Hindernisses wegen nicht zu messen sind. In diesem Falle nehme man zwei in der Horizontalebene von A liegende zugängliche Punkte D und E (Fig. 322), von welchen man nach A, B, C visiren kann, und messe die Winkel α, β, γ, δ, ε, ζ, um daraus die Winkel x, y, z zu berechnen. Hierzu hat man folgende Gleichungen:

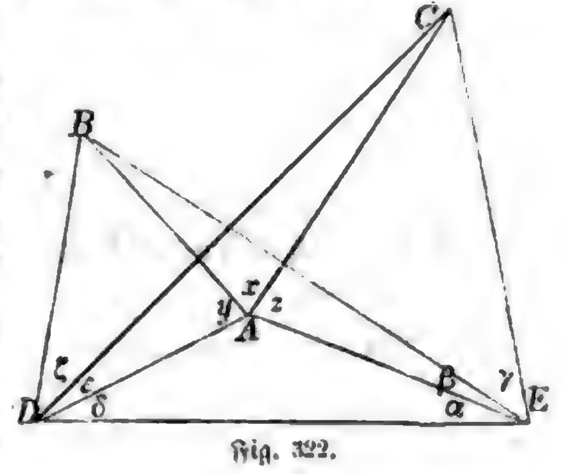


Fig. 322.

1) AB : BD = sin (ε + ζ) : sin y.
2) BD : BE = sin (α + β) : sin (δ + ε + ζ).
3) BE : BA = sin (x + z) : sin β.

$$4)\quad \frac{\sin(x+z)}{\sin y} = \frac{\sin(\delta+\varepsilon+\zeta)\cdot\sin\beta}{\sin(\varepsilon+\zeta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}.$$

Nun ist:

$$DAE + x + y + z = 360^\circ,$$

weil alle vier Winkel in einer Ebene liegen; weil überdies:

$$DAE = 180^\circ - \alpha - \delta,$$

so ist:

$$5)\quad x + z = 180^\circ + \alpha + \delta - y.$$

Setzt man $180^\circ + \alpha + \delta = \varphi$, so ist:

$$6)\quad x + z = \varphi - y.$$

Dies in (4) gesetzt, gibt:

$$7)\quad \frac{\sin(\varphi - y)}{\sin y} = \frac{\sin(\delta+\varepsilon+\zeta)\cdot\sin\beta}{\sin(\varepsilon+\zeta)\cdot\sin(\alpha+\beta)},$$

oder:

$$8)\quad \cot y = \cot\varphi + \frac{\sin(\delta+\varepsilon+\zeta)\sin\beta}{\sin(\varepsilon+\zeta)\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\varphi}.$$

Um z zu finden hat man wieder:

$$AC : CE = \sin(\beta+\gamma) : \sin z.$$
$$CE : CD = \sin(\delta+\varepsilon) : \sin(\alpha+\beta+\gamma).$$
$$CD : CA = \sin(x+y) : \sin\varepsilon.$$

$$9)\quad \frac{\sin(x+y)}{\sin z} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\delta+\varepsilon)}.$$

$$10)\quad x + y = \varphi - z \ (6),$$

also:

$$11)\quad \frac{\sin(\varphi - z)}{\sin z} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\delta+\varepsilon)},$$

$$12)\quad \cot z = \cot\varphi + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\delta+\varepsilon)\cdot\sin\varphi},$$

während $x = \varphi - (y + z)$.

Zweites Kapitel.

Von den Beobachtungsfehlern geodätischer Messungen.

A. Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate der Rechnung.

§. 278. Alle in der Geodäsie gesuchten Größen werden entweder durch directe Beobachtung gewonnen oder aus den durch Beobachtung gewonnenen berechnet. Jede durch Beobachtung gewonnene Größe muß aber als mit einem Fehler behaftet angesehen werden; dies hat seinen Grund theils in der Un-

vollkommenheit unserer Instrumente, theils aber in der Mangelhaftigkeit unserer Sinne, oder endlich in zufälligen Ursachen. Die erste Art der Fehler kann durch ein sorgfältiges Berichtigen der Instrumente, oder dadurch, daß man die durch genaue Prüfung der Instrumente erkannten Fehler derselben nachgehends gehörig in Rechnung bringt, fast ganz aus den gemessenen Größen herausgebracht, also unschädlich gemacht werden. Nicht so die zweite und dritte Art; unsere Sinne können zwar durch Uebung geschärft werden; aber stets werden sie diese oder jene Unvollkommenheit an sich behalten, z. B. das genaue Einstellen des Instruments nicht ermöglichen; ebenso werden mancherlei störende Einflüsse zufälliger Art, z. B. ungleiche Beleuchtung, unruhige Luft u. s. w. Fehlerquellen werden. Die aus diesen beiden Ursachen hervorgehenden Fehler heißen daher unvermeidliche oder zufällige Fehler. Wir werden uns im Folgenden nur mit dieser Art der Fehler beschäftigen.

Es versteht sich von selbst, daß Beobachtungsresultate, denen merklich große Fehler anhaften, die also unter sehr ungünstigen Umständen oder ohne die erforderliche Genauigkeit und Sorgfalt gewonnen worden sind, von vornherein von jedem fernern Gebrauche ausgeschlossen werden müssen, und daß demnach die Fehler, welche den als brauchbar erkannten Beobachtungen noch anhaften, äußerst klein sein werden. Die Richtigkeit unserer folgenden Erörterungen beruht wesentlich auf dieser Voraussetzung.

§. 279. Da die einer Beobachtung anhaftenden Fehler immer nur kleine Bruchtheile der gemessenen Größen sein werden, so wird man die Producte und Potenzen der Fehler außer Acht lassen können. Handelt es sich also um den Fehler eines Winkels, so wird, weil:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

der Sinus des Fehlers dieses Winkels dem zum Radius 1 gehörigen, dem Fehler entsprechenden Bogen gleich gesetzt werden können. Und weil:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

so kann man den Cosinus des Fehlers $= 1$ setzen.

Die meisten geodätischen Rechnungen beruhen auf den trigonometrischen Dreiecksformeln. Es wird daher für unsern Zweck am ersprießlichsten sein, wenn wir an einigen der gewöhnlichsten Fälle das Verfahren zeigen, durch welches man zur Kenntniß der Fehlergrenzen in den Resultaten gelangt, wenn die Fehlergrenze der Daten bekannt ist.

§. 280. Bezeichnen wir die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, die ihnen beziehlich gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, die den Seiten und Winkeln anhaftenden Fehler mit δa, δb, δc, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$: so werden von

diesen letztern sechs Größen drei bestimmt werden können, wenn die andern drei gegeben sind und unter diesen sich wenigstens eine Seite befindet. Die einfachsten bei den Dreiecksberechnungen vorkommenden Formeln sind:

$$(A)\begin{cases}1)\ a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha.\\ 2)\ c = a\cos\beta + b\cdot\cos\alpha.\\ 3)\ \alpha+\beta+\gamma=\pi.\end{cases}$$

Da $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die gemessenen oder durch Rechnung gefundenen Größen, $\delta a, \delta b, \delta c, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ ihre Fehler bezeichnen, welche sowol positiv als negativ sein können, so sind:

$$a+\delta a,\ b+\delta b,\ c+\delta c,\ \alpha+\delta\alpha,\ \beta+\delta\beta,\ \gamma+\delta\gamma$$

die wahren Größen, und es wird sein:

$$(a+\delta a)\cdot\sin(\beta+\delta\beta) = (b+\delta b)\cdot\sin(\alpha+\delta\alpha),$$
$$c+\delta c = (a+\delta a)\cdot\cos(\beta+\delta\beta) + (b+\delta b)\cdot\cos(\alpha+\delta\alpha),$$
$$(\alpha+\delta\alpha)+(\beta+\delta\beta)+(\gamma+\delta\gamma)=\pi.$$

Es ist aber, wenn wir die den Fehlern $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ der Winkelmessung entsprechenden, zum Radius 1 gehörigen Bogen gleichfalls mit $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ bezeichnen, nach §. 279:

$$\sin(\beta+\delta\beta) = \sin\beta + \delta\beta\cdot\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\delta\alpha) = \sin\alpha + \delta\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos(\beta+\delta\beta) = \cos\beta - \delta\beta\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\delta\alpha) = \cos\alpha - \delta\alpha\cdot\sin\alpha.$$

Also ist dann, wenn man noch Producte wie $\delta a\cdot\delta\beta$, $\delta b\cdot\delta\alpha$ u. s. w. vernachlässigt:

$$a\cdot\sin\beta + \delta a\cdot\sin\beta + a\cdot\delta\beta\cdot\cos\beta = b\cdot\sin\alpha + \delta b\cdot\sin\alpha + b\cdot\delta\alpha\cdot\cos\alpha.$$
$$c+\delta c = a\cdot\cos\beta + \delta a\cdot\cos\beta - a\cdot\delta\beta\cdot\sin\beta + b\cdot\cos\alpha + \delta b\cdot\cos\alpha - b\cdot\delta\alpha\cdot\sin\alpha.$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\alpha+\delta\beta+\delta\gamma=\pi.$$

Subtrahirt man die ursprünglichen Gleichungen (A) von diesen, so folgt:

$$(B)\begin{cases}\delta a\cdot\sin\beta + a\cdot\delta\beta\cdot\cos\beta = \delta b\cdot\sin\alpha + b\delta\alpha\cdot\cos\alpha.\\ \delta c = \delta a\cdot\cos\beta - a\cdot\delta\beta\cdot\sin\beta + \delta b\cos\alpha - b\cdot\delta\alpha\cdot\sin\alpha.\\ \delta\alpha+\delta\beta+\delta\gamma=0.\end{cases}$$

Natürlich könnte man durch Zugrundelegung anderer von den Gleichungen I und II des §. 51 diese andern Gleichungen erhalten:

$$\delta c\cdot\sin\alpha + c\cdot\delta\alpha\cdot\cos\alpha = \delta a\cdot\sin\gamma + a\delta\gamma\cdot\cos\gamma,$$
$$\delta b\cdot\sin\gamma + b\cdot\delta\gamma\cdot\cos\gamma = \delta c\cdot\sin\beta + c\cdot\delta\beta\cdot\cos\beta,$$
$$\delta a = \delta c\cdot\cos\beta - c\cdot\delta\beta\cdot\sin\beta + \delta b\cdot\cos\gamma - b\cdot\delta\gamma\cdot\sin\gamma,$$
$$\delta b = \delta a\cdot\cos\gamma - a\cdot\delta\gamma\cdot\sin\gamma + \delta c\cdot\cos\alpha - c\cdot\delta\alpha\cdot\sin\alpha.$$

Aber diese vier Gleichungen lassen sich auch aus den Gleichungen (B) ab-

leiten; denn multiplicirt man die erste der Gleichungen (B) mit sin α, die zweite mit cos α und addirt, wo dann die Glieder:

$$\delta b \cdot \sin \alpha^2 + \delta b \cdot \cos \alpha^2 = \delta b \, (\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2)$$

δb geben, so kommt:

$$\delta b = \delta c \cdot \cos \alpha - \delta a \cdot \cos (\alpha + \beta) + a \cdot \delta\beta \cdot \sin (\alpha + \beta),$$

oder:

$$\delta b = \delta c \cdot \cos \alpha + \delta a \cdot \cos \gamma - a \cdot \delta\alpha \cdot \sin \gamma - a \cdot \delta\gamma \cdot \sin \gamma,$$

weil $\delta\beta = -\delta\alpha - \delta\gamma$, $\cos (\alpha + \beta) = -\cos \gamma$ und $\sin (\alpha + \beta) = \sin \gamma$ ist; und da $a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$, so folgt hieraus der obenstehende Werth von δb ganz genau. In ähnlicher Weise lassen sich die andern oben aufgeführten Gleichungen aus denen in (B) ableiten.

Zu denselben Resultaten der Gleichungen (B) gelangt man, wenn man unter den Gleichungen des §. 51 die Gruppe I oder II mit der Gruppe IV verbindet.

§. 281. Wenden wir die durch die Gleichungen (B) gewonnenen Resultate auf einige specielle Dreiecksaufgaben an:

1) Es sei ein Dreieck gegeben durch c, α, β, und a, b, γ daraus zu berechnen, so fragt sich, wenn c, α, β zwar nicht genau richtig gegeben sind, man aber die Grenzen der Fehler dieser drei Größen kennt, innerhalb welcher Grenzen die Abweichungen der daraus berechneten Größen a, b, γ von der vollkommenen Richtigkeit sich bewegen werden.

Es sind also hier die Größen δa, δb, $\delta\gamma$ zu berechnen. Die Gleichungen (B) liefern:

1) $\delta\gamma = -\delta\alpha - \delta\beta.$

2) $\delta a \cdot \sin \beta - \delta b \cdot \sin \alpha = -a\delta\beta \cdot \cos \beta + b \cdot \delta\alpha \cdot \cos \alpha.$

3) $\delta a \cdot \cos \beta + \delta b \cdot \cos \alpha = \delta c + a\delta\beta \cdot \sin \beta + b \cdot \delta\alpha \cdot \sin \alpha.$

Multiplicirt man (2) mit cos α, (3) mit sin α und addirt, multiplicirt dann (2) mit cos β, (3) mit sin β und subtrahirt, so bekommt man:

$$\delta a = \delta c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} + \frac{b \cdot \delta\alpha}{\sin (\alpha + \beta)} - a \cdot \delta\beta \cdot \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)},$$

$$\delta b = \delta c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} + \frac{a \cdot \delta\beta}{\sin (\alpha + \beta)} - b \cdot \delta\alpha \cdot \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Oder, weil $\sin (\alpha + \beta) = \sin \gamma$, $\cos (\alpha + \beta) = -\cos \gamma$:

$$\delta a = \delta c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{b\delta\alpha}{\sin \gamma} + a\delta\beta \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma},$$

$$\delta b = \delta c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{a\delta\beta}{\sin \gamma} + b \cdot \delta\alpha \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

Und wieder, weil $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$, $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$:

$$\delta a = \delta c \cdot \frac{a}{c} + \frac{b \cdot \delta\alpha}{\sin \gamma} + a \cdot \delta\beta \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma},$$

$$\delta b = \delta c \cdot \frac{b}{c} + \frac{a\,\delta\beta}{\sin\gamma} + b \cdot \delta\alpha \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma},$$

welche sich in folgender Form darstellen lassen:

$$(C)\begin{cases} 1)\ \dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{\delta c}{c} + \dfrac{b\,\delta\alpha}{a \cdot \sin\gamma} + \delta\beta \cdot \operatorname{cotg}\gamma, \\ 2)\ \dfrac{\delta b}{b} = \dfrac{\delta c}{c} + \dfrac{a\,\delta\beta}{b \cdot \sin\gamma} + \delta\alpha \cdot \operatorname{cotg}\gamma, \\ 3)\ \delta\gamma = -\delta\alpha - \delta\beta. \end{cases}$$

Um dies sogleich auf ein numerisches Beispiel anzuwenden, sei:

$$c = 564{,}8,\ \alpha = 61^\circ\ 12'\ 12'',\ \beta = 74^\circ\ 16'\ 30'',$$

so wird sein:

$$\gamma = 44^\circ\ 31'\ 18'',\ a = 705{,}888,\ b = 775{,}35,$$

und es sei $\frac{\delta c}{c} \gtreqless 0{,}0001$, $\delta\alpha \gtreqless 1''$ und auch $\delta\beta \gtreqless 1''$, d. h. die gemessene Seite habe einen Fehler an sich, der 0,0001 der ganzen Länge nicht übersteige, und die gemessenen Winkel fehlen höchstens um 1''; so geben die Formeln (C), wenn man $\frac{\delta c}{c} = 0{,}0001$, $\delta\alpha = \delta\beta = 1''$ setzt:

log b	= 2,8894978		log a	= 2,8487359
log δα	= 4,6855749		log sin γ	= 9,8458288
	7,5750727			2,6945647.
	2,6945647			
	4,8805080			
$\frac{b\,\delta\alpha}{a \cdot \sin\gamma}$	= 0,0000076			
log δβ	= 4,6855749			
log cotg γ	= 10,0072518			
	4,6928267			
δβ · cotg γ	= 0,0000049			
$\frac{\delta c}{c}$	= 0,0001000			
$\frac{b\,\delta\alpha}{a \cdot \sin\gamma}$	= 0,0000076			
$\frac{\delta a}{a}$	= 0,0001125		log b	= 2,8894978
log a	= 2,8487359		log sin γ	= 9,8458288
log δβ	= 4,6855749			2,7353266
	7,5343108			
	2,7353266			
	4,7989842			

$$\frac{a\delta\beta}{b \cdot \sin\gamma} = 0{,}00000629$$

$$\begin{aligned} \log \delta\alpha &= 4{,}6855749 \\ \log \operatorname{cotg} \gamma &= \underline{10{,}0072518} \\ & \quad \underline{4{,}6928267} \\ \delta\alpha \operatorname{cotg}\gamma &= 0{,}00000493. \\ \frac{\delta c}{c} &= 0{,}00010000 \\ \frac{a\delta\beta}{b \sin\gamma} &= \underline{0{,}00000629} \\ \frac{\delta b}{b} &= 0{,}00011122 \\ \delta\gamma &= -(1'' + 1'') = -2''. \end{aligned}$$

Ehe wir zu einem zweiten Falle übergehen, wollen wir die Formeln (C) noch einmal betrachten. Sind die Winkel α, β sehr groß, so daß $\alpha + \beta$ nahe an 180° beträgt, so ist γ sehr klein, also auch $\sin\gamma$ sehr klein; dasselbe ist der Fall, wenn α und β sehr klein sind, also $\alpha + \beta$ nahe an 0° ist. Da $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$, so haben zwei Glieder der Ausdrücke rechts in (C, 1 und 2) $\sin\gamma$ im Nenner; diese zwei Glieder werden dann also sehr groß, folglich $\frac{\delta a}{a}$ und $\frac{\delta b}{b}$ sehr groß, wenngleich $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ die oben in dem Beispiele angenommene Größe von 1″ nicht überschreiten. Solche Formen der Dreiecke sind daher unvortheilhaft und müssen möglichst vermieden werden. Die genannten Glieder der Ausdrücke (C, 1 und 2) nehmen ihre kleinsten Werthe an, wenn $\sin\gamma$ den größten Werth hat; dieser größte Werth von $\sin\gamma$ ist 1, für $\gamma = 90°$; also bleibt dann für $\alpha + \beta$ noch 90°. Das rechtwinkelige Dreieck, oder dasjenige, in welchem der der gemessenen Seite gegenüberliegende Winkel nahezu = 90° ist, hat also die vortheilhafteste Form. Die Gleichungen (C) wandeln sich aber für $\gamma = 90°$ um in:

$$1)\ \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta c}{c} + \frac{b}{a} \cdot \delta\alpha.$$

$$2)\ \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c} + \frac{a}{b} \cdot \delta\beta.$$

Kann man nun annehmen, daß $\delta\alpha$ und $\delta\beta$, abgesehen vom Vorzeichen, ungefähr gleiche Größe haben, und ist dann $b > a$, also $\frac{b}{a} > 1$, dagegen $\frac{a}{b} < 1$, so wird $\frac{\delta a}{a} > \frac{\delta b}{b}$; ist dagegen $b < a$, so wird $\frac{\delta a}{a} < \frac{\delta b}{b}$. Es wird also am vortheilhaftesten sein, wenn $a = b$, wo dann $\alpha = \beta$ und

$\frac{\delta a}{a}$ nahezu $= \frac{\delta b}{b}$. Das gleichschenkelig rechtwinkelige Dreieck hat demnach für diesen Fall den Vorzug vor allen andern.

2) Es sei ein Dreieck gegeben durch c, α, γ, und a, b, β daraus zu berechnen.

Die Gleichungen (B) geben:

$$\delta\beta = -\delta\alpha - \delta\gamma.$$

$$\delta a \cdot \sin(\alpha + \beta) = \delta c \cdot \sin\alpha + b \cdot \delta\alpha - a \cdot \delta\beta \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

$$\delta b \cdot \sin(\alpha + \beta) = \delta c \cdot \sin\beta + a \cdot \delta\beta - b \cdot \delta\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma;\ \cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma.$$

$$\delta a \cdot \sin\gamma = \delta c \cdot \sin\alpha + b \cdot \delta\alpha + a \cdot \delta\beta \cdot \cos\gamma.$$

$$\delta b \cdot \sin\gamma = \delta c \cdot \sin\beta + a \cdot \delta\beta + b \cdot \delta\alpha \cdot \cos\gamma.$$

$$\delta a = \delta c \cdot \frac{a}{c} + \frac{b \cdot \delta\alpha}{\sin\gamma} + \frac{a\delta\beta \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta c}{c} + \frac{b \cdot \delta\alpha}{a \cdot \sin\gamma} - \frac{\delta\alpha}{\sin\gamma} - \frac{\delta\gamma \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta c}{c} + \frac{b - a \cdot \cos\gamma}{a \cdot \sin\gamma} \cdot \delta\alpha - \delta\gamma \cdot \operatorname{cotg}\gamma.$$

$$\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c} + \frac{b\cos\gamma - a}{b \cdot \sin\gamma} \cdot \delta\alpha - \frac{a\delta\gamma}{b \cdot \sin\gamma}.$$

$$b - a \cdot \cos\gamma = c \cdot \cos\alpha.$$

$$b \cdot \cos\gamma - a = -c \cdot \cos\beta.$$

$$a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha.$$

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta.$$

Also ist denn:

$$(D)\ \begin{cases} 1)\ \dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{\delta c}{c} + \delta\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha - \delta\gamma \cdot \operatorname{cotg}\gamma. \\ 2)\ \dfrac{\delta b}{b} = \dfrac{\delta c}{c} - \delta\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta - \dfrac{a \cdot \delta\gamma}{b \cdot \sin\gamma}. \\ 3)\ \delta\beta = -\delta\alpha - \delta\gamma. \end{cases}$$

Es sei gegeben:

$$c = 450,\ \alpha = 53^\circ\ 19'\ 16'',\ \gamma = 61^\circ\ 42'\ 32'';$$

so ist $\beta = 64^\circ\ 58'\ 12''$, $a = 409{,}855$, $b = 463{,}05$.

Es sei ferner diesmal c nur bis zu 0,001 zuverlässig, sodaß $\frac{\delta c}{c} = 0{,}001$, $\delta\alpha = \delta\gamma = 5''$, so geben die Formeln (D):

$\log \delta\alpha =$	5,3845449	$\log \delta\gamma =$	5,3845449
$\log \operatorname{cotg}\alpha =$	9,8720420	$\log \operatorname{cotg}\gamma =$	9,7309796
	5,2565869		5,1155245

Digitized by Google

$$\delta\alpha \cdot \text{cotg}\ \alpha = 0{,}00001805. \qquad \delta\gamma\ \text{cotg}\ \gamma = 0{,}000013047.$$

$$\frac{\delta c}{c} = 0{,}001 \qquad \log a = 2{,}6126301$$

$$\delta\gamma \cdot \text{cotg}\ \gamma = 0{,}000013047 \qquad \log \delta\gamma = 5{,}3845449$$

$$\frac{\delta a}{a} = 0{,}001031097 \qquad \log a \cdot \delta\gamma = 7{,}9971750$$

$$\log \delta\alpha = 5{,}3845449 \qquad \log b = 2{,}6656276$$

$$\log \text{cotg}\ \beta = 9{,}6692660 \qquad \log \sin\gamma = 9{,}9447545$$

$$5{,}0538109 \qquad 2{,}6103821$$

$$\delta\alpha \cdot \text{cotg}\ \beta = 0{,}000011319 \qquad \log \frac{a \cdot \delta\gamma}{b \cdot \sin\gamma} = 5{,}3867929$$

$$\frac{\delta c}{c} = 0{,}001$$

$$\delta\alpha \cdot \text{cotg}\ \beta = 0{,}000011319 \qquad \frac{a\delta\gamma}{b \cdot \sin\gamma} = 0{,}000024366$$

$$\frac{a\delta\gamma}{b \cdot \sin\gamma} = \frac{0{,}000024366}{0{,}000035685} \qquad \delta\beta = -(5'' + 5'') = -10''.$$

$$\frac{\delta b}{b} = 0{,}000964315.$$

Gesetzt, die Fehler in α und γ werden ziemlich gleich und von gleichem Vorzeichen, so heben sie sich, wenn α und γ selbst ungefähr gleiche Größe haben; hat aber δc auch dasselbe Vorzeichen mit $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$, so ist es für δa vortheilhafter, wenn $\delta\gamma \cdot \text{cotg}\ \gamma > \delta\alpha \cdot \text{cotg}\ \alpha$, da der Betrag der Fehler in den Winkeln doch immer kleiner ist als der in der gemessenen Seite. $\frac{\delta a}{a}$ wird also am kleinsten, wenn $\gamma < \alpha$ und spitz ist; ist aber α stumpf, also cotg α negativ (wir nehmen $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ immer als positiv an), so wird $\frac{\delta a}{a}$ am kleinsten, wenn γ spitz ist, weil dann die zwei letzten Glieder von $\frac{\delta c}{c}$ zu subtrahiren sind. Für $\alpha = 90°$ fällt das zweite Glied ganz weg, was unter der gemachten Voraussetzung, daß nämlich alle Fehler positiv seien, für $\frac{\delta a}{a}$ vortheilhaft ist. Es muß sonach, wegen der Seite a, α recht oder stumpf, γ möglichst klein sein. Rücksichtlich der Seite b gelten dieselben Bestimmungen, nebst der, daß β am besten auch klein werde. Daher denn hier ein großes α und kleine Werthe für β und γ die geringsten Fehler geben.

3) In einem Dreieck sind a, b, γ gegeben, und c, α, β zu berechnen. Die Gleichungen (B) liefern:

1) $\delta\alpha + \delta\beta = -\delta\gamma$.

2) $a \cdot \delta\beta \cdot \cos\beta - b \cdot \delta\alpha \cdot \cos\alpha = \delta b \cdot \sin\alpha - \delta a \cdot \sin\beta$.
3) $\delta c + a \cdot \delta\beta \cdot \sin\beta + b \cdot \delta\alpha \cdot \sin\alpha = \delta b \cdot \cos\alpha + \delta a \cdot \cos\beta$.

Mittels der Gleichung (1) liefert die (2):

$a\delta\beta \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha\,(\delta\beta + \delta\gamma) = -\delta a \cdot \sin\beta + \delta b \cdot \sin\alpha$.
$(a\cos\beta + b\cos\alpha) \cdot \delta\beta = -\delta a \cdot \sin\beta + \delta b \cdot \sin\alpha - b \cdot \delta\gamma \cdot \cos\alpha$.

Ebenso, $\delta\beta = -\delta\alpha - \delta\gamma$ setzend:

$(a\cos\beta + b \cdot \cos\alpha)\,\delta\alpha = \delta a \cdot \sin\beta - \delta b \cdot \sin\alpha - a \cdot \delta\gamma \cdot \cos\beta$.

Nach §. 51 ist aber:

$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c,$$

daher:

$$(a)\ \begin{cases} c \cdot \delta\beta = -\delta a \cdot \sin\beta + \delta b \cdot \sin\alpha - b \cdot \delta\gamma \cdot \cos\alpha. \\ c \cdot \delta\alpha = \delta a \cdot \sin\beta - \delta b \cdot \sin\alpha - a \cdot \delta\gamma \cdot \cos\beta. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (3) folgt:

$\delta c = \delta a \cdot \cos\beta + \delta b \cdot \cos\alpha - a \cdot \delta\beta \cdot \sin\beta - b \cdot \delta\alpha \cdot \sin\alpha$.

Daher, wenn man die Ausdrücke (a) benutzt:

$c \cdot \delta c = c \cdot \delta a \cdot \cos\beta + c \cdot \delta b \cdot \cos\alpha - a \cdot \sin\beta\,(-\delta a \sin\beta + \delta b \cdot \sin\alpha - b \cdot \delta\gamma \cdot \cos\alpha) - b \cdot \sin\alpha\,(\delta a \cdot \sin\beta - \delta b \cdot \sin\alpha - a \cdot \delta\gamma \cdot \cos\beta)$.

$c \cdot \delta c = c \cdot \delta a \cdot \cos\beta + c \cdot \delta b \cdot \cos\alpha + a \cdot \delta a \cdot \sin\beta^2 - a\delta b \cdot \sin\alpha \sin\beta + ab \cdot \delta\gamma \cdot \sin\beta\cos\alpha - b \cdot \delta a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + b \cdot \delta b \cdot \sin\alpha^2 + ab \cdot \delta\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

$c \cdot \delta c = (c \cdot \cos\beta + a \cdot \sin\beta^2 - b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta) \cdot \delta a + (c \cdot \cos\alpha + b \cdot \sin\alpha^2 - a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta) \cdot \delta b + (ab \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha + ab \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta) \cdot \delta\gamma$.

Setzt man hier einmal $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$, dann umgekehrt: $a \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, und $\sin\gamma$ statt $\sin(\alpha + \beta)$, so erhält man:

(b) $c \cdot \delta c = c \cdot \cos\beta \cdot \delta a + c \cdot \cos\alpha \cdot \delta b + ab \cdot \delta\gamma \cdot \sin\gamma$.

In Verbindung mit den Gleichungen (a) erhält man also:

$$1)\ \delta\beta = \frac{\delta b \cdot \sin\alpha}{c} - \frac{\delta a \cdot \sin\beta}{c} - \frac{b}{c} \cdot \delta\gamma \cdot \cos\alpha.$$

$$2)\ \delta\alpha = -\frac{\delta b \cdot \sin\alpha}{c} + \frac{\delta a \cdot \sin\beta}{c} - \frac{a}{c} \cdot \delta\gamma \cdot \cos\beta.$$

$$3)\ \delta c = \delta a \cdot \cos\beta + \delta b \cdot \cos\alpha + \frac{ab}{c} \cdot \delta\gamma \cdot \sin\gamma.$$

Setzt man hier im letzten Gliede der Gleichung (3) noch $c \cdot \sin\alpha$ statt $a \cdot \sin\gamma$, so kann man noch folgende Formen erhalten:

$$1)\ \delta\beta = \frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} - \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a \cdot \sin\beta}{c} - \frac{\delta\gamma}{c} \cdot b \cdot \cos\alpha.$$

$$2)\ \delta\alpha = -\frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} + \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a \cdot \sin\beta}{c} - \frac{\delta\gamma}{c} \cdot a \cdot \cos\beta.$$

$$3)\ \frac{\delta c}{c} = \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a \cdot \cos\beta}{c} + \frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b \cdot \cos\alpha}{c} + \frac{\delta\gamma}{c} \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Setzt man endlich noch $a \sin\beta$ für $b \sin\alpha$, so kommt:

$$(c)\ \begin{cases} 1)\ \delta\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{c}\left(\frac{\delta b}{b} - \frac{\delta a}{a}\right) - \frac{b \cdot \cos\alpha}{c} \cdot \delta\gamma. \\ 2)\ \delta\alpha = \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} \cdot \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right) - \frac{a \cdot \cos\beta}{c} \cdot \delta\gamma. \\ 3)\ \frac{\delta c}{c} = \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a \cdot \cos\beta}{c} + \frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b \cdot \cos\alpha}{c} + \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} \cdot \delta\gamma. \end{cases}$$

Da c überall im Nenner erscheint, so werden $\delta\alpha$, $\delta\beta$ und $\frac{\delta c}{c}$ um so kleiner werden, je größer c; man wird also c, somit auch γ so groß als möglich zu nehmen haben, und zwar beschränkt sich dies nicht blos auf spitze Winkel, sondern die Fehler sind, unter übrigens gleichen Umständen, um so kleiner, je näher γ an 180° ist. Die Formeln würden sich sehr vereinfachen, wenn $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b}$ wäre, d. h. wenn $\delta a : \delta b = a : b$ wäre; denn da auch:

$$a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = c,$$

so hätte man dann:

$$\delta\beta = -\frac{b \cdot \cos\alpha}{c} \cdot \delta\gamma.$$

$$\delta\alpha = -\frac{a \cdot \cos\beta}{c} \cdot \delta\gamma.$$

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta a}{a} + \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} \cdot \delta\gamma.$$

Für den Fall, daß $a = b$, ist auch $\alpha = \beta$ und $a \cos\beta = b \cos\alpha = \frac{1}{2} c$; $b \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$, und man wird auch setzen können:

$$\frac{\delta b}{b} = \pm \frac{\delta a}{a},$$

wo dann: $\frac{\delta b}{b} - \frac{\delta a}{a}$ entweder $= 0$, oder $= -\frac{2\delta a}{a}$, folglich:

$$(c')\ \begin{cases} \delta\beta = \begin{cases} -\frac{1}{2}\delta\gamma, \text{ oder} \\ -\frac{2a}{c} \cdot \frac{\delta a}{a} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}\delta\gamma, \end{cases} \\ \delta\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2}\delta\gamma, \text{ oder} \\ +\frac{2a}{c} \cdot \frac{\delta a}{a} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}\delta\gamma, \end{cases} \\ \frac{\delta c}{c} = \begin{cases} \frac{\delta a}{a} + \delta\gamma \cdot \frac{a}{c} \sin\alpha, \text{ oder} \\ \delta\gamma \cdot \frac{a}{c} \cdot \sin\alpha. \end{cases} \end{cases}$$

Für die zu berechnende Seite c findet also hier dieselbe Vorschrift statt, wie im allgemeinen Falle, für die Winkel aber nur dann, wenn δa und δb entgegengesetzte Zeichen haben; bei gleichem Zeichen der Fehler δa und δb werden $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ um so kleiner, je kleiner $\delta\gamma$ wird; von der Größe von γ selbst bleiben δa und δb also in diesem Falle ganz unabhängig.

Es sei $a = 4738$, $b = 9340$, $\gamma = 83^\circ\ 27'\ 24''$; hieraus berechnet sich $c = 9979{,}9$, $\alpha = 28^\circ\ 8'\ 32''$, $\beta = 68^\circ\ 24'\ 4''$. Setzt man nun $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = 0{,}001$, $\delta\gamma = 5''$ und rechnet nach den Formeln (c), so erhält man:

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}9703469 \\ \log \sin\alpha &= 9{,}6736307 \\ E\cdot\log c &= 6{,}1118738 \\ \log\frac{\delta b}{b} &= \underline{0{,}0000000-3} \\ & \ 0{,}7558514-4 \end{aligned}$$

$$\frac{b\cdot\sin\alpha}{c}\cdot\frac{\delta b}{b} = 0{,}00056997.$$ Ebenso findet man:

$$\frac{b\cdot\sin\alpha}{c}\cdot\frac{\delta a}{a} = 0{,}00056997.$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}9703469 & \log a &= 3{,}6755951 \\ \log\cos\alpha &= 9{,}9453600 & \log\cos\beta &= 9{,}5659735 \\ E\cdot\log c &= 6{,}1118738 & E\cdot\log c &= 6{,}1118738 \\ \log\delta\gamma &= \underline{5{,}3845449} & \log\delta\gamma &= \underline{5{,}3845449.} \\ & \ 0{,}4121256-5 & & \ 0{,}7379873-6 \end{aligned}$$

$$\frac{b\cos\alpha}{c}\cdot\delta\gamma = 0{,}00002583. \qquad \frac{a\cos\beta}{c}\cdot\delta\gamma = 0{,}00000547.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}6755951 & \log b &= 3{,}9703469 \\ \log\cos\beta &= 9{,}5659735 & \log\cos\alpha &= 9{,}9453600 \\ E\cdot\log c &= 6{,}1118738 & E\cdot\log c &= 6{,}1118738 \\ \log\frac{\delta a}{a} &= \underline{0{,}0000000-3} & \log\frac{\delta b}{b} &= \underline{0{,}0000000-3} \\ & \ 0{,}3534424-4 & & \ 0{,}0275807-3 \end{aligned}$$

$$\frac{a\cos\beta}{c}\cdot\frac{\delta a}{a} = 0{,}00022565. \qquad \frac{b\cdot\cos\alpha}{c}\cdot\frac{\delta b}{b} = 0{,}0010655.$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}9703469 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}6736307 \\ E\cdot\log c &= 6{,}1118738 \\ \log\delta\gamma &= \underline{5{,}3845449} \\ & \ 0{,}1403963-5 \end{aligned}$$

$$\frac{b \cdot \sin \alpha}{c} \cdot \delta\gamma = 0{,}000013816.$$

Es sind also die größten Werthe von:

$$\begin{aligned} \delta\beta &= 0{,}00056997 \\ &+ 0{,}00056997 \\ &+ 0{,}00002583 \\ \delta\beta &= 0{,}00116577 \\ &= 4'\ 0'',3. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta\alpha &= 0{,}00056997 \\ &+ 0{,}00056997 \\ &+ 0{,}00000547 \\ \delta\alpha &= 0{,}00114541 \\ &= 3'\ 56'',1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta c}{c} &= 0{,}00022565 \\ &+ 0{,}00106550 \\ &+ 0{,}00001381 \\ \frac{\delta c}{c} &= 0{,}00130496. \end{aligned}$$

Wir haben bei $\delta\beta$ und $\delta\alpha$ alle Glieder addirt, weil dies den größten Werth der Fehler gibt; die subtractiven Glieder der Formel (c) sind an sich als negativ angesehen, die, subtrahirt, den Betrag von $\delta\beta$ oder $\delta\alpha$ vergrößern. Hätte man nach der Formel (c′) gerechnet, so hätte man nach den zuerst dort aufgeführten Ausdrücken

$$\delta\beta = -\ 2'',5,\ \delta\alpha = -\ 2'',5,\ \frac{\delta c}{c} = 0{,}001007,$$

nach den letzten dortigen Ausdrücken dagegen:

$$\delta\beta = 2'\ 1'',\ \delta\alpha = 2'\ 1'',\ \frac{\delta c}{c} = 0{,}000007008$$

erhalten.

4) In einem Dreieck sind gegeben die drei Seiten a, b, c, und die Winkel α, β, γ daraus berechnet. Die Formeln (B) liefern zunächst:

$$b \cdot \sin \alpha \cdot \delta\alpha + a \sin \beta \cdot \delta\beta = \delta a \cdot \cos \beta + \delta b \cos \alpha - \delta c.$$
$$b \cdot \cos \alpha \cdot \delta\alpha - a \cdot \cos \beta \cdot \delta\beta = \delta a \cdot \sin \beta - \delta b \cdot \sin \alpha.$$
$$\delta\alpha + \delta\beta + \delta\gamma = 0.$$

Löst man die ersten beiden Gleichungen nach $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ auf, indem man die erste mit $\cos \beta$, die zweite mit $\sin \beta$ multiplicirt und addirt, dann die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$ multiplicirt und subtrahirt, endlich in die dritte die Werthe von $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ substituirt, $\sin \gamma$ statt $\sin (\alpha + \beta)$, $-\cos \gamma$ statt $\cos (\alpha + \beta)$ setzt, so erhält man:

$$\delta\alpha = \frac{\delta a}{b \cdot \sin \gamma} - \frac{\delta b \cdot \cos \gamma}{b \cdot \sin \gamma} - \frac{\delta c \cdot \cos \beta}{b \cdot \sin \gamma}.$$

$$\delta\beta = -\frac{\delta a \cdot \cos \gamma}{a \cdot \sin \gamma} + \frac{\delta b}{a \cdot \sin \gamma} - \frac{\delta c \cdot \cos \alpha}{a \cdot \sin \gamma}.$$

$$\delta\gamma = \delta a \cdot \frac{b\cos\gamma - a}{ab\sin\gamma} + \delta b \cdot \frac{a\cos\gamma - b}{ab\cdot\sin\gamma} + \delta c \cdot \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{ab\cdot\sin\gamma}.$$

Oder in etwas veränderter Form, mittels §. 51, I und II:

$$(d)\begin{cases}\delta\alpha = \dfrac{1}{\sin\gamma}\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\delta a}{a} - \cos\gamma\cdot\dfrac{\delta b}{b}\right) - \operatorname{cotg}\beta\cdot\dfrac{\delta c}{c}.\\ \delta\beta = \dfrac{1}{\sin\gamma}\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\delta b}{b} - \cos\gamma\cdot\dfrac{\delta a}{a}\right) - \operatorname{cotg}\alpha\cdot\dfrac{\delta c}{c}.\\ \delta\gamma = \dfrac{1}{\sin\alpha}\left(\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{\delta c}{c} - \cos\alpha\cdot\dfrac{\delta b}{b}\right) - \operatorname{cotg}\beta\cdot\dfrac{\delta a}{a}.\end{cases}$$

Wäre $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c}$, so wären die Fehler der Seiten den Seiten selbst proportional, das fehlerhafte Dreieck also dem richtigen ähnlich, folglich wären die Winkel in beiden Dreiecken beziehlich einander gleich und $\delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = 0$. Im übrigen zeigt sich, wenn man auch von dieser Voraussetzung Abstand nimmt, daß, wenn nur die absoluten Werthe von $\frac{\delta a}{a}$, $\frac{\delta b}{b}$, $\frac{\delta c}{c}$ einander nahe gleich sind, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ einander ebenfalls nahe gleich werden, wenn $\alpha = \beta = \gamma$. Da nun $\delta\alpha + \delta\beta + \delta\gamma = 0$, so würden die Fehler, wenn sie alle dasselbe Vorzeichen hätten, alle gleich Null sein; wenn sie nun aber auch nicht gleiche Vorzeichen haben, so werden sie doch, in dem hier vorausgesetzten Falle, bei Gleichheit ihrer absoluten Werthe, am kleinsten werden, weil sie gleich vertheilt sind. Das gleichseitige Dreieck ist also für diesen Fall das vortheilhafteste.

Es sei $a = 10479$, $b = 9894{,}5$, $c = 11476$ gemessen, also $\alpha = 58^\circ\ 9'\ 52'',4$; $\beta = 53^\circ\ 20'\ 19'',4$; $\gamma = 68^\circ\ 29'\ 48'',2$. Man nehme an, a sei höchstens um 6, b um 5,6, c um 7 Längeneinheiten gefehlt; dann ist $\delta a = 6$, $\delta b = 5{,}6$, $\delta c = 7$. Nach den Formeln (α) findet man:

$$\delta\alpha = 4'\ 30''; \ \delta\beta = 4'\ 3''; \ \delta\gamma = 4'\ 59''.$$

Hierbei sind aber alle Fehler mit denjenigen Zeichen genommen worden, welche den Gesammtbetrag der Fehler vergrößern, daher die berechneten Größen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ die größtmöglichen Werthe bekommen haben.

5) Sind in einem Dreieck a, b, α gegeben und c, β, γ daraus berechnet, so liefern die Gleichungen (B):

$$\delta\beta = -\frac{\delta a}{a}\cdot\operatorname{tg}\beta + \delta b\cdot\frac{\sin\alpha}{a\cdot\cos\beta} + \delta\alpha\cdot\frac{b\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\beta}.$$

$$\delta c = \frac{\delta a}{\cos\beta} + \delta b\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} - \delta\alpha\cdot\frac{b\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

$$\delta\gamma = \frac{\delta a}{a}\cdot\operatorname{tg}\beta - \delta b\cdot\frac{\sin\alpha}{a\cdot\cos\beta} - \delta\alpha\cdot\frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{a\cdot\cos\beta}.$$

Man gelangt leicht dahin, ihnen folgende Formen zu geben:

$$(e)\begin{cases}\delta\beta = -\frac{\delta a}{a}\cdot \operatorname{tg}\beta + \frac{\delta b}{b}\cdot \operatorname{tg}\beta + \delta\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{cotg}\alpha.\\ \frac{\delta c}{c} = \frac{\delta a}{a}\cdot\frac{a}{c\cdot\cos\beta} - \frac{\delta b}{b}\cdot\frac{b\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\beta} - \delta\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.\\ \delta\gamma = \frac{\delta a}{a}\cdot\operatorname{tg}\beta - \frac{\delta b}{b}\cdot\operatorname{tg}\beta - \delta\alpha\cdot\frac{c}{a\cdot\cos\beta}.\end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt noch, daß, weil der Nenner $\cos\beta$ überall vorkommt, die Fehler $\delta\beta$, $\delta\gamma$ und $\frac{\delta c}{c}$ um so kleiner werden, je größer $\cos\beta$, also je kleiner β ist; oder vielmehr, sie werden am kleinsten, wenn β nahe an 0° oder an 180° ist. Ist dann aber zugleich α sehr klein, so muß dies, weil auch $\cos\alpha$ in den Zählern vorkommt, die Fehler wieder vergrößern. In $\frac{\delta c}{c}$ kommen die Factoren $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ vor und machen also den Fehler kleiner, wenn sie selber klein sind, also a und b klein gegen c sind; in $\delta\gamma$ dagegen kommt $\frac{c}{a}$ als Factor vor, das also hier wieder klein ausfallen müßte, wenn die Vorzeichen auch im ungünstigsten Verhältniß ständen; da sich aber darüber nichts bestimmen läßt, so bleibt jene Bestimmung für die einzelnen Ausdrücke hier ziemlich unsicher.

Es sei $a = 47659$, $b = 38542$, $\alpha = 62° 5' 10''$, und daraus berechnet $\beta = 45° 36' 41'',3$, $\gamma = 72° 18' 8'',7$, $c = 51380,3$. Dann sei $\frac{\delta a}{a} = 0,001$, $\frac{\delta b}{b} = 0,002$, $\delta\alpha = 5''$. Rechnet man nach den Formeln (e), so erhält man:

$$\delta\beta = 10' 34''; \ \delta\gamma = 10' 39''; \ \frac{\delta c}{c} = 0,00200273.$$

In ähnlicher Weise wird man die Fehlergrenze in allen zusammengesetztern Fällen finden; bei mehrseitigen Figuren ist es gewöhnlich am vortheilhaftesten, sie in Dreiecke zu zerlegen und dann nach den für diese gebrauchten Methoden zu verfahren. Sonst kann man auch für jede vorliegende Figur eigene Formeln entwickeln und auf dieselben die numerischen Zahlen des besondern Falles anwenden.

B. Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

§. 282. Wenn eine Linie nach irgend einer der im Frühern aufgeführten Methoden gemessen wird, so können Fehler vorkommen, welche das Maß der Linie zu groß machen, aber auch solche, welche es zu klein machen; er-

steres ist der Fall, wenn man die Kette nicht gehörig spannt, Meßstab oder Kette seitwärts von der Linie ausbiegt, oder nicht genau horizontal legt; dieses, wenn der Kettenstab wiederholt weiter vorwärts gesetzt wird, als wo der frühere gesteckt hatte, oder die Meßstäbe nicht genau an einander gepaßt werden, oder wenn die Kette durch Strecken verlängert worden, die Meßstäbe an sich zu lang sind u. s. w. Auch bei der Winkelmessung können natürlich beide Arten der Fehler vorkommen. Fehler, welche die gemessene Größe verkleinern, heißen **positive**, die, welche die gemessene Größe vergrößern, **negative**. Ist der wahre Werth einer Linie = 1150 Ruthen, gibt aber die Messung sie zu 1149,9 R., so beträgt der Fehler + 0,1 R., und gäbe die Messung sie zu 1150,1 R., so betrüge der Fehler — 0,1 R. Es muß im allgemeinen angenommen werden, daß die Wahrscheinlichkeit, einen positiven Fehler zu begehen, gerade so groß ist als die, einen negativen zu machen; bei Winkelmessungen ist dies entschieden der Fall; bei Linienmessungen mögen, nach der Natur der dabei stattfindenden Fehlerquellen, negative häufiger sein als positive.

Große Fehler werden leichter bemerkt als kleine; dieser Umstand ist also dem Eintreten großer Fehler ungünstig; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, einen kleinen Fehler zu begehen, größer als die, einen großen zu begehen; kleine Fehler werden also häufiger sein als große; oder, die Wahrscheinlichkeit, einen gewissen Fehler zu begehen, ist um so größer, je kleiner dieser Fehler ist.

§. 283. Denken wir uns, man habe dieselbe Größe x, z. B. einen Winkel, mehrere (n) Male nach einander gemessen, es seien alle n Messungen gleich gut, d. h. alle mit einem kleinen, keine derselben mit einem abnormen Fehler behaftet, und die Werthe, welche man dafür bekommen, seien der Reihe nach: w_1, w_2, w_3 ..... w_n; so sind, da x den **wahren** Werth der Größe vorstellt, $x - w_1$, $x - w_2$, $x - w_3$ ..... $x - w_n$ beziehlich die **Fehler** dieser Messungen oder Beobachtungen, die wir kurz mit $\delta_1 x$, $\delta_2 x$ ..... $\delta_n x$ bezeichnen wollen. Die Werthe w_1, w_2, w_3 ..... w_n werden natürlich theils kleiner, theils größer als x sein, daher denn $\delta_1 x$, $\delta_2 x$ ..... $\delta_n x$ theils positiv, theils negativ sind. Da die positiven und negativen Fehler gleiche Wahrscheinlichkeit für sich haben, und die einzelnen Fehler unter sich fast gleich sind, so wird ihre Summe nahezu gleich Null werden, d. h.

$$\delta_1 x + \delta_2 x + \delta_3 x + \ldots\ldots + \delta_n x = 0,$$

oder:

$$(x - w_1) + (x - w_2) + (x - w_3) + \ldots\ldots + (x - w_n) = 0$$

$$nx = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n.$$

$$x = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n}{n}.$$

Eine Summe, wie die hier im Zähler, mit fortschreitendem Zeiger, soll künftig durch

$$S\,[w_{\mathfrak{n}}]$$

bezeichnet werden, indem der deutsche Buchstabe, als Zeiger gesetzt, andeuten soll, daß derselbe nach einander die Werthe 1, 2, 3 ..... n anzunehmen hat, und daß die durch denselben lateinischen Buchstaben n bezeichnete Größe der höchste Werth ist, den n bekommen soll, während durch das vor die einschließende (eckige) Klammer gesetzte S angezeigt wird, daß die in $x_{\mathfrak{n}}$ enthaltenen Ausdrücke w_1, w_2, w_3 ..... w_n alle addirt werden sollen. Dasselbe Zeichen, ohne das vorgesetzte Summenzeichen S, also der Ausdruck $[w_{\mathfrak{n}}]$, soll die Ausdrücke w_1, w_2 ..... w_n blos aufführen, ohne ihre Addition zu verlangen. Es ist hiernach:

$$[w_{\mathfrak{n}}] = w_1,\ w_2,\ w_3\ \ldots\ldots\ w_n.$$
$$S\,[w_{\mathfrak{n}}] = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n.$$
$$[x - w_{\mathfrak{n}}] = x - w_1,\ x - w_2\ \ldots\ldots\ x - w_n.$$
$$S\,[x - w_{\mathfrak{n}}] = (x - w_1) + (x - w_2) + (x - w_3) + \ldots\ldots + (x - w_n).$$

Die oben gefundene Gleichung kann also jetzt so ausgedrückt werden:

$$x = \frac{S\,[w_{\mathfrak{n}}]}{n}.$$

Dieser Ausdruck bezeichnet aber nichts anderes, als das arithmetische Mittel aus den n Ausdrücken $[w_{\mathfrak{n}}]$, dessen wir uns im Frühern schon öfter bedient haben.

§. 284. Um jedoch über den Werth der Fehler Aufschluß zu erhalten, kann dieser Weg eben deshalb nicht dienen, weil sich die Fehler gegenseitig aufheben. Mache ich bei einer Beobachtung einen noch so großen positiven Fehler, und bei der Wiederholung der Beobachtung einen gleich großen negativen, so erhalte ich durch das arithmetische Mittel wohl den richtigen Werth der beobachteten Größe; aber ich lerne daraus nicht die Grenze kennen, bis zu welcher die Fehler sich erstrecken, und bekomme daher auch kein Urtheil über den Grad der Genauigkeit meiner Beobachtung oder Messung, was doch schon deshalb wünschenswerth ist, weil bei größern Fehlern nicht immer auf die absolute Gleichheit der positiven und negativen Fehler zu rechnen ist, sie sich also nicht durchaus aufheben werden, dies auch, nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, nur bei sehr oft wiederholter Beobachtung der Fall ist. Um dies zu erreichen, muß man dieses gegenseitige Aufheben der positiven und negativen Fehler verhindern, was Gauß dadurch erreicht, daß er nicht die Fehler selbst, sondern ihre Quadrate in Rechnung bringt, welche natürlich alle positiv werden, also sich nicht aufheben können.

Man erhält dadurch den Ausdruck $S\,[(\delta_{\mathfrak{n}} x)^2]$ oder $S\,[(x - w_{\mathfrak{n}})^2]$ als Summe der Quadrate der Fehler aller n Beobachtungen. Es wird dann derjenige Werth von x dem wahren Werthe am nächsten kommen, der

$$S\ [(\delta_n x)^2]$$

zu einem Minimum macht. Nach §. 32 ist dies derjenige Werth von x, welcher das nach x genommene Differential von $S\ [(\delta_n x)^2]$ zu Null macht. Setzt man nun:

$$y = S\ [(\delta_n x)^2],$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot S\ [\delta_n x];$$

und setzt man

$$S\ [\delta_n x] = 0,$$

oder:

$$S\ [x - w_n] = 0,$$

und löst die Gleichung nach x auf, so bekommt man den Werth von x, welcher, nach den aus der Beobachtung gewonnenen Größen zu urtheilen, als der dem wahren Werthe am nächsten liegende anzusehen ist. Er heißt der wahrscheinlichste Werth von x. Nach gewöhnlicher Weise geschrieben gibt die Differentiation:

$$x - w_1 + x - w_2 + x - w_3 + \ldots\ldots + x - w_n = 0$$

$$x = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n}{n} = \frac{S\ [w_n]}{n},$$

d. h. man gelangt auch auf diesem Wege wieder zu dem arithmetischen Mittel der durch Beobachtung gewonnenen Werthe der gesuchten Größe x als wahrscheinlichsten Werth dieser Größe. Diese Methode, den wahrscheinlichst richtigen Werth einer Größe aus einer beliebigen Anzahl nur annähernd richtiger Beobachtungsresultate zu finden, heißt die Methode der kleinsten Quadratsummen. In dem einfachen Falle, daß jedes Beobachtungsresultat so viel Wahrscheinlichkeit für sich hat als das andere und daß der gesuchte Werth keine weitern Bedingungen zu erfüllen hat, führt, wie gezeigt worden, die Gauß'sche Methode auf das arithmetische Mittel.

§. 285. Ist jedes Beobachtungsresultat einer einzigen Beobachtung entnommen, so haben alle diese Resultate eine gleiche Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit, d. h. es ist wahrscheinlich, daß das eine dem wahren Werthe so nahe liege als das andere, vorausgesetzt, daß alle Beobachtungen gleich gut seien. Die durch die Beobachtungen gewonnenen Zahlen haben dann also einen gleichen relativen Werth. Dasselbe ist noch der Fall, wenn man eine Reihe von m Beobachtungen anstellt, aus allen das arithmetische Mittel nimmt, dann eine zweite Reihe von wieder m Beobachtungen, ebenso eine dritte, vierte ..... nte von je n Beobachtungen, wenn alle diese Beobachtungen einzeln gleich gut sind, und wenn man dann aus jeder Reihe das arithmetische Mittel berechnet; jedes dieser n arithmetischen Mittel hat dann zwar den mfachen Werth einer einzigen Beobachtung; da aber die n Resultate sämmtlich den mfachen Werth haben, so ist ihr relativer Werth wieder derselbe, und man wird sie, wie im einfachsten Falle zu einem arithmetischen Mittel vereinigen können.

Anders würde es sich verhalten, wenn die n arithmetischen Mittel aus ebenso vielen Beobachtungsreihen von einer ungleichen Anzahl Beobachtungen entnommen wären, z. B. das erste aus einer Reihe von b Beobachtungen, das zweite aus c; dann würden die Werthe dieser zwei Resultate sich wie die Anzahl der Beobachtungen, wie b : c verhalten, weil das arithmetische Mittel aus einer Anzahl Beobachtungen um so genauer den wahren Werth der beobachteten Größe darstellen wird, je größer die Zahl der Beobachtungen ist, vorausgesetzt, daß alle einzelnen Beobachtungen gleich gut seien. Ist also die erste Zahl durch eine Reihe von a_1, die zweite durch a_2, die dritte durch a_3 ..... die nte durch a_n Beobachtungen gewonnen, so ist der wahrscheinlichste Werth von x:

$$x = \frac{S\,[(a\,w)_n]}{S\,[a_n]} = S\left[\frac{(a\,w)_n}{a_n}\right]$$

d. h.
$$x = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + \ldots + a_n w_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}.$$

Die Zahlen a_1, a_2, a_3 .... a_n drücken die relativen Werthe der einzelnen Beobachtungen aus; um aber diese besondere Bedeutung des Wortes „Werth" zu vermeiden (indem es hier wohl zu unterscheiden ist von dem Werthe eines Ausdrucks — seiner gewöhnlichen Bedeutung), hat man die Zahlen a_1, a_2, a_3 ..... a_n die Gewichte der Beobachtungen genannt. Man sieht wol ein, daß ein durch das Repetitionsverfahren gemessener Winkel die Zahl der Repetitionen zum Gewichte hat.

Es sei z. B. ein Winkel gemessen:

10	Mal	mit	dem	Resultate	18°	18′	12″
8	"	"	"	"	18	18	2
5	"	"	"	"	18	18	21
4	"	"	"	"	18	18	30

so ist

$$a_1 = 10,\; w_1 = 18°\;18'\;12''$$
$$a_2 = 8,\; w_2 = 18\;\;18\;\;2$$
$$a_3 = 5,\; w_3 = 18\;\;18\;\;21$$
$$a_4 = 4,\; w_4 = 18\;\;18\;\;30$$

Daher
$$x = S\left[\frac{(a\,w)_n}{a_n}\right] = [10\cdot(18°\;18'\;12'') + 8\cdot(18°\;18'\;2'') + 5\cdot(18°\;18'\;21'') + 4\,(18°\;18'\;30'')] : 27.$$

$$= \frac{183°\;2'\;0'' + 146°\;24'\;16'' + 91°\;31'\;15'' + 73°\;14'\;0''}{27}$$

$$= \frac{494°\;11'\;31''}{27} = 18°\;18'\;12'',26.$$

§. 286. Zahlen, welche aus verschiedenen Beobachtungsmethoden gewonnen sind, können doch, auch bei gleicher Wiederholungszahl, nicht als von

gleichem Werthe angesehen werden, weil die eine Methode genauer sein kann als die andere. Der Werth der Beobachtungszahlen hängt daher vom Maße der Genauigkeit der gemachten Beobachtung ab. Die durch verschiedene Beobachtungsmethoden gewonnenen Resultate haben daher verschiedene Gewichte. Bei gleichen Methoden verhalten sich die Gewichte wie die Wiederholungszahlen; bei verschiedenen Methoden setzt man das Gewicht dem Quadrate des Maßes der Genauigkeit direct, oder dem Quadrate des wahrscheinlichen Fehlers umgekehrt proportional, so nämlich, daß, wenn h das Maß der Genauigkeit einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist, h_1 das einer Beobachtung vom Gewichte g_1 ist:

$$1 : g_1 = h^2 : h_1^2$$

$$g_1 = \frac{h_1^2}{h^2}.$$

Und sind r, r_1 die wahrscheinlichen Fehler dieser Beobachtungen, so ist:

$$h : h_1 = r_1 : r$$

$$r_1 = \frac{r\,h}{h_1}.$$

$$1 : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$$

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{g_1}}.$$

Beobachtet man also Winkel mit einem Theodoliten, dessen Angaben bis auf m Secunden genau sind, und mit einem andern, der sie bis zu n Secunden genau angibt, so ist bei einmaliger Messung:

$$r : r_1 = m : n.$$

Wiederholt man mit dem ersten Instrumente die Messung g, mit dem andern g_1 Male, so ist:

$$r : r_1 = \frac{m}{\sqrt{g}} : \frac{n}{\sqrt{g_1}}$$

und

$$h : h_1 = \frac{n}{\sqrt{g_1}} : \frac{m}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}}{m} : \frac{\sqrt{g_1}}{n}.$$

$$g : g_1 = r_1^2 m^2 : r^2 n^2 = \frac{r^2}{m^2} : \frac{r_1^2}{n^2}$$

$$g : g_1 = m^2 h^2 : n^2 h_1^2.$$

Folgendes mag ein Beispiel der Anwendung dieser Sätze auf einen einfachen Fall liefern. Es liegen drei Winkel A, B, C um einen Punkt herum, sodaß sie zusammen 4 R. oder 360° betragen. A, B, C seien ihre gemessenen Größen, a_1, b_1, c_1 ihre wahren Werthe, a, b, c die Fehler der erstern, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} A + a = a_1 \\ B + b = b_1 \\ C + c = c_1 \end{array}\right\} \text{und } a_1 + b_1 + c_1 = 360^\circ.$$

Lieferte nun die Beobachtung:

$A = 120^\circ\ 15'\ 20''$ bei 10maliger Wiederholung,
$B = 132\ \ 16\ \ 30$ „ 12 „ „
$C = 107\ \ 28\ \ 19$ „ 15 „ „

so gibt dies: $A + B + C = 360^\circ\ 0'\ 9''$; es ist aber:
$a_1 + b_1 + c_1 = 360\ \ 0\ \ 0$; also ist denn:
1) $a + b + c = - 0\ \ 0\ \ 9$

weil $a + b + c = - \big((A - a_1) + (B - b_1) + (C - c_1)\big)$ ist. Es muß nun

$$2)\ 10 \cdot a^2 + 12 \cdot b^2 + 15\ c^2$$

ein Minimum werden. Man löse also die Gleichung (1) nach einer der Unbekannten a, b, c, etwa nach c, auf, so erhält man;

$$c = - a - b - 9,$$

berechne dann $15\ c^2 =$

$$1215 + 270\ a + 15\ a^2 + 270\ b + 30\ ab + 15\ b^2.$$

Setzt man dies in (2), so erhält man:

$$3)\ 25\ a^2 + 27\ b^2 + 1215 + 270\ a + 270\ b + 30\ ab.$$

Also soll nun der Ausdruck (3), aus dem bereits c eliminirt ist, ein Minimum werden. Man differentiire also erst nach a, dann nach b und setze beide Differentiale gleich Null, so erhält man nach dem Wegheben:

$$5\ a + 3\ b + 27 = 0,$$
$$5\ a + 9\ b + 45 = 0.$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach a und nach b auf, so erhält man:

$$a = - 3'',6,\ b = - 3'',$$

und setzt man diese Werthe in den Ausdruck für c, so ergibt sich $c = - 2'',4$.

Leichter noch gelangt man zu demselben Ziele, wenn man die Gleichung

$$a + b + c + 9'' = 0$$

mit einem unbestimmten Coëfficienten 2φ multiplicirt, zu der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der Fehler addirt und den so gewonnenen Ausdruck:

$$10\ a^2 + 12\ b^2 + 15\ c^2 + 2\ \varphi\ (a + b + c)$$

nach a, b und c differentiirt; man erhält so:

$$10\ a + \varphi = 0$$
$$12\ b + \varphi = 0$$
$$15\ c + \varphi = 0.$$

Nimmt man hierzu die Gleichung:

$$a + b + c + 9'' = 0,$$

so kann man erst φ eliminiren und dann die übrig bleibenden drei Gleichungen nach a, b und c auflösen, wo sie die oben gefundenen Werthe geben.

Die wahrscheinlichsten Werthe der gemessenen Winkel sind demnach:

$$\begin{aligned} A &= 120^\circ\ 15'\ 20'' - 3'',6 = 120^\circ\ 15'\ 16'',4 \\ B &= 132\ \ 16\ \ 30\ \ - 3,0 = 132\ \ 16\ \ 27,0 \\ C &= 107\ \ 28\ \ 19\ \ - 2,4 = 107\ \ 28\ \ 16,6 \\ & \qquad \text{Summa } 360^\circ\ 0'\ 0''. \end{aligned}$$

Wir lassen jetzt noch ein Beispiel folgen, wo mehrere Winkel um einen Punkt herum liegen. Es sei gemessen worden (Fig. 323):

1)	MON =	68°	37′	1″	mit dem Gewichte	5.
2)	MOP =	140	2	19	" " "	10.
3)	NOQ =	134	15	41	" " "	20.
4)	NOR =	211	56	10	" " "	15.
5)	POR =	140	30	40	" " "	12.
6)	MOQ =	202	52	46	" " "	18.
7)	NOP =	71	25	38	" " "	16.
8)	QOR =	77	40	6	" " "	20.

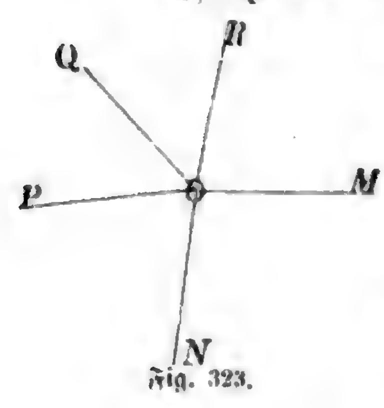


Fig. 323.

Es sollen die wahrscheinlichst richtigen Werthe dieser Winkel ermittelt werden.

Bezeichnet man die acht gemessenen Winkel der Reihe nach mit (1), (2), (3) ..... (8), so bestehen zwischen ihnen folgende vier Bedingungsgleichungen, denen die corrigirten Winkel genügen müssen:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ (2) - (1) &= (7) \\ 2)\ (4) - (3) &= (8) \\ 3)\ (5) + (7) &= (4) \\ 4)\ (6) - (3) &= (1) \end{aligned}\right\} (A).$$

Heißen dann die Correctionen der acht gemessenen Winkel der Reihe nach a, b, c ...... h, so ist eigentlich, weil die gemessenen Winkel den Bedingungen (A) nicht genügen werden,

$$\left.\begin{aligned} 1)\ [(2) + b] - [(1) + a] &= [(7) + g] \\ 2)\ [(4) + d] - [(3) + c] &= [(8) + h] \\ 3)\ [(5) + e] + [(7) + g] &= [(4) + d] \\ 4)\ [(6) + f] - [(3) + c] &= [(1) + a] \end{aligned}\right\} (B).$$

Setzt man statt (1), (2), (3) .... (8) die gemessenen Winkel in (B) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & b - a - g = -20'' \\ 2) & d - c - h = 23'' \\ 3) & e + g - d = 8'' \\ 4) & f - c - a = 4'', \end{array}\right\} (C)$$

und dies sind die Bedingungen, welche zwischen den Correctionen der gemessenen Winkel bestehen müssen.

Man nehme nun die Quadrate dieser Correctionen, multiplicire jedes mit dem Gewichte der betreffenden Beobachtung, addire dazu die auf Null gebrachten Ausdrücke (C), nachdem man jeden mit einem unbestimmten Coëfficienten $2\varphi_1$, $2\varphi_2$, $2\varphi_3$, $2\varphi_4$ multiplicirt hat, wo, wie oben, der Factor 2 hinzugenommen wird, weil sich die Ausdrücke nachher heben lassen, differentiire den so gewonnenen Ausdruck nach a, b, c ..... h und setze jedes Differentiale gleich Null, so bekommt man ebenso viele Gleichungen als man Unbekannte hat, nämlich erst den Ausdruck:

$$5a^2 + 10b^2 + 20c^2 + 15d^2 + 12e^2 + 18f^2 + 16g^2 + 20h^2 + 2\varphi_1 (b - a - g + 20) + 2\varphi_2 (d - c - h - 23) + 2\varphi_3 (e + g - d - 8) + 2\varphi_4 (f - c - a - 4),$$

wovon die Differentialien, nach den einzelnen Unbekannten genommen und gleich Null gesetzt, folgende Gleichungen geben:

$$\begin{array}{l} 5a - \varphi_1 - \varphi_4 = 0 \\ 10b + \varphi_1 = 0 \\ 20c - \varphi_2 - \varphi_4 = 0 \\ 15d + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0 \\ 12e + \varphi_3 = 0 \\ 18f + \varphi_4 = 0 \\ 16g - \varphi_1 + \varphi_3 = 0 \\ 20h - \varphi_2 = 0. \end{array}$$

Eliminirt man hier φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} 5) & 5a + 10b + 18f = 0 \\ 6) & 10c - 10h + 9f = 0 \\ 7) & 15d + 20h + 12e + 18f = 0 \\ 8) & 8g + 5b - 6e = 0, \end{array}\right\} (D)$$

und diese Gleichungen (5—8) sind, in Verbindung mit (C, 1—4) ausreichend, um die 8 Unbekannten a, b ..... h zu bestimmen. Sie geben:

$a = 1'\ 1'',7$; $b = 19'',1$; $c = -55'',9$; $d = 44'',7$;
$e = 1'\ 15'',3$; $f = 9'',8$; $g = -22'',6$; $h = 1'\ 17'',6$.

Die wahrscheinlichsten Werthe der gemessenen Winkel sind daher:

MON =	68°	37′	2″,7;	POR =	140°	31′	55″,3;
MOP =	140	2	38,1;	MOQ =	202	52	36,2;

NOQ = 134 14 45,1; NOP = 71 25 15,4;
NOR = 211 56 54,7; QOR = 77 41 23,6.

Berechnen wir nun noch die Correction der Winkel in einem zusammenhängenden Dreiecksnetze. Es sei Fig. 324 das gegebene Netz; die Winkel mögen bezeichnet werden nach den Punkten, an denen sie liegen, und mit einem Zeiger versehen sein, der die Nummer des Dreiecks, wie die Figur solche nachweist, ausdrückt; z. B. ACB = C_1, ACD = C_2 u. s. w. Dabei heißen A_1, B_1, C_1 .... die gemessenen, a'_1, b'_1, c'_1 .... die wahren, a_1, b_1, c_1 .... die Correctionen der gemessenen Winkelwerthe, so nämlich, daß:

$A_1 - a'_1 = a_1$; $B_1 - b'_1 = b_1$; $C_1 - c'_1 = c_1$ u. s. w., also auch
$A_1 - a_1 = a'_1$; $B_1 - b_1 = b'_1$; $C_1 - c_1 = c'_1$ u. s. w.

Nun habe die Messung ergeben:

Dreieck.	Winkel.	Gemessene Werthe.			Gewichte.
		Gr.	Min.	Sec.	
I.	A_1	49	48	12	6
	B_1	81	15	15	8
	C_1	48	56	30	10
II.	A_2	77	21	10	4
	C_2	53	24	12	15
	D_2	49	14	34	12
III.	A_3	71	3	25	8
	D_3	71	55	45	4
	F_3	37	0	54	3
IV.	A_4	84	58	8	9
	E_4	57	36	15	10
	F_4	37	25	30	16
V.	A_5	76	48	57	20
	B_5	67	24	38	10
	E_5	35	46	36	5
VI.	E_6	60	45	15	4
	F_6	45	31	20	12
	G_6	73	43	31	10
VII.	F_7	46	28	33	6
	G_7	81	34	12	15
	H_7	51	57	18	20

Berücksichtigt man nun, daß die Winkel in jedem Dreieck 180°, die um den Punkt A herum 360° betragen müssen, und vergleicht damit die gemessenen Winkelwerthe, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen, alles in Secunden gerechnet:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ a_1 + b_1 + c_1 + 3 = 0 \\
2)\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 8 = 0 \\
3)\ a_2 + c_2 + d_2 + 4 = 0 \\
4)\ a_3 + d_3 + f_3 - 4 = 0 \\
5)\ a_4 + e_4 + f_4 + 7 = 0 \\
6)\ a_5 + b_5 + e_5 - 11 = 0 \\
7)\ e_6 + g_6 + f_6 - 6 = 0 \\
8)\ f_7 + g_7 + h_7 - 3 = 0.
\end{array}\right\} (E)$$

Hieraus bildet man folgenden Ausdruck:

$$6a_1^2 + 8b_1^2 + 10c_1^2 + 4a_2^2 + 15c_2^2 + 12d_2^2 + 8a_3^2 + 4d_3^2 + 3f_3^2 + 9a_4^2 + 10e_4^2 + 16f_4^2 + 20a_5^2 + 10b_5^2 + 5e_5^2 + 4e_6^2 + 12f_6^2 + 10g_6^2 + 6f_7^2 + 15g_7^2 + 20h_7^2 + 2\varphi_1 (a_1 + b_1 + c_1 + 3) + 2\varphi_2 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 8) + 2\varphi_3 (a_2 + c_2 + d_2 + 4) + 2\varphi_4 (a_3 + d_3 + f_3 - 4) + 2\varphi_5 (a_4 + e_4 + f_4 + 7) + 2\varphi_6 (a_5 + b_5 + e_5 - 11) + 2\varphi_7 (e_6 + f_6 + g_6 - 6) + 2\varphi_8 (f_7 + g_7 + h_7 - 3),$$

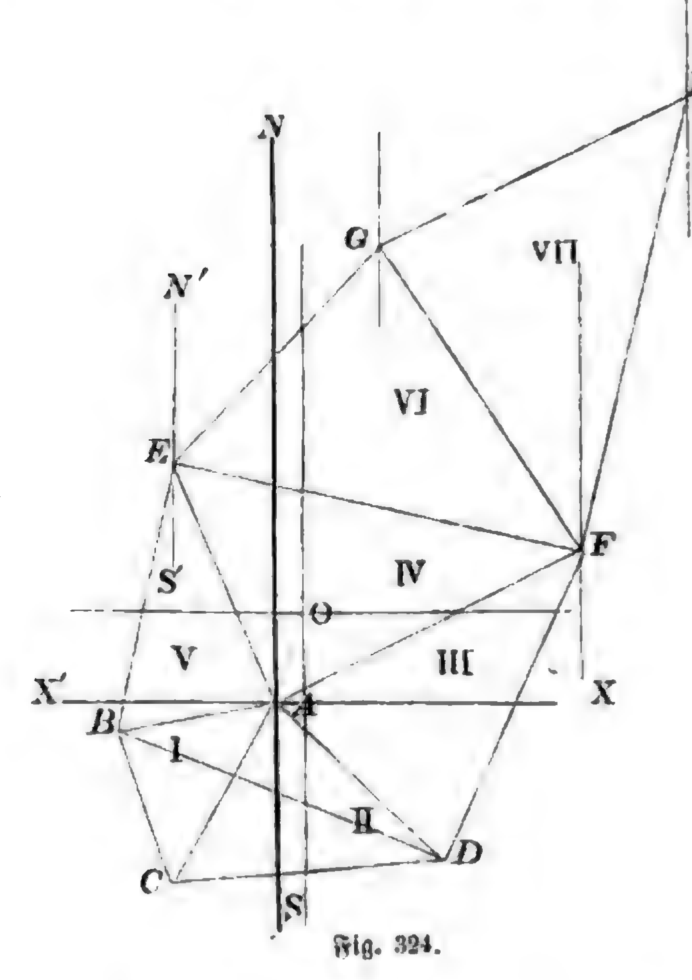


Fig. 324.

welcher zu einem Minimum gemacht werden muß. Differentiirt man den Ausdruck nach sämmtlichen Unbekannten und setzt das Differential nach jedem derselben gleich Null, so bekommt man folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten:

1) $6a_1 + \varphi_1 + \varphi_2 = 0.$	8) $4d_3 + \varphi_4 = 0.$
2) $8b_1 + \varphi_1 = 0.$	9) $3f_3 + \varphi_4 = 0.$
3) $10c_1 + \varphi_1 = 0.$	10) $9a_4 + \varphi_2 + \varphi_5 = 0.$
4) $4a_2 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$	11) $10e_4 + \varphi_5 = 0.$
5) $15c_2 + \varphi_3 = 0.$	12) $16f_4 + \varphi_5 = 0.$
6) $12d_2 + \varphi_3 = 0.$	13) $20a_5 + \varphi_2 + \varphi_6 = 0.$
7) $8a_3 + \varphi_2 + \varphi_4 = 0.$	14) $10b_5 + \varphi_6 = 0.$

15) $5e_5 + \varphi_6 = 0.$ 19) $6f_7 + \varphi_8 = 0.$
16) $4e_6 + \varphi_7 = 0.$ 20) $15g_7 + \varphi_8 = 0.$
17) $12f_6 + \varphi_7 = 0.$ 21) $20h_7 + \varphi_8 = 0.$
18) $10g_6 + \varphi_7 = 0.$

Aus diesen 21 Gleichungen eliminire man zunächst die 8 Unbekannten φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_8$ dadurch, daß man den Werth von φ_1 aus (2) in (1) einsetzt, dann auch die Ausdrücke links in (2) und (3) einander gleich setzt; ebenso verfährt man mit (4), (5) und (6) in Bezug auf φ_3, mit (7), (8) und (9) in Bezug auf φ_4, mit (10), (11) und (12) in Bezug auf φ_5, und mit (13), (14), (15) in Bezug auf φ_6; in (16), (17) und (18) setzt man die Ausdrücke links alle drei einander gleich, ebenso die in (19), (20) und (21); auf diesem Wege erhält man folgende Gleichungen:

$$6a_1 - 8b_1 + \varphi_2 = 0,$$
$$8b_1 = 10c_1.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert

$$\varphi_2 = 8b_1 - 6a_1,$$

welches, in die übrigen gesetzt, wo noch φ_2 vorkommt, folgende Gruppe von Gleichungen liefert:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & 4b_1 = 5c_1 \\
2) & 4a_2 + 8b_1 - 6a_1 - 15c_2 = 0 \\
3) & 5c_2 = 4d_2 \\
4) & 4a_3 + 4b_1 - 3a_1 - 2d_3 = 0 \\
5) & 4d_3 = 3f_3 \\
6) & 9a_4 + 8b_1 - 6a_1 - 10e_4 = 0 \\
7) & 5e_4 = 8f_4 \\
8) & 10a_5 + 4b_1 - 3a_1 - 5b_5 = 0 \\
9) & 2b_5 = e_5 \\
10) & 2e_6 = 6f_6 = 5g_6 \\
11) & 6f_7 = 15g_7 = 20h_7.
\end{array}\right\} (F)$$

Da (10) und (11) Doppelgleichungen sind, so stellen (F) im ganzen 13 Gleichungen vor, die mit (E) zusammen 21 Gleichungen ausmachen und zur Bestimmung sämmtlicher Unbekannten ausreichen. Von diesen Unbekannten bestimmen sich die letzten 6 in den Gleichungen (E, 7 und 8 und F, 10 und 11) enthaltenen sofort, nämlich:

$$e_6 = 3{,}4615. \qquad f_7 = 1{,}7647.$$
$$f_6 = 1{,}1538. \qquad g_7 = 0{,}7058.$$
$$g_6 = 1{,}3846. \qquad h_7 = 0{,}5294.$$

Rechnet man nun die Gleichungen (E, 7 und 8), sowie (F, 10 und 11) ab, da sie zur Bestimmung weiterer Unbekannten nicht dienen können, so bleiben 15 Gleichungen mit 15 Unbekannten, welche letztere nun auf folgende

Weise gefunden werden. Die erste der Gleichungen (F) löst man nach c_1 auf und setzt den Werth in alle übrigen sowol in E als auch in F, wo c_1 vorkommt. Mittels (F, 3) eliminirt man dann d_2, mittels (F, 5) d_3, mittels (F, 7) e_4, mittels (F, 9) e_5. Man erhält dann aus sämmtlichen Gleichungen (E) und (F):

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 48a_2 - 47a_1 + 60 = 0 \\ 2) & 306a_3 - 329a_1 - 636 = 0 \\ 3) & 1773a_4 - 1222a_1 + 3480 = 0 \\ 4) & 105a_5 - 47a_1 - 225 = 0 \\ 5) & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 8 = 0. \end{array}\right\} (G)$$

Mittels dieser Gleichungen (G) drückt man die Unbekannten a_2, a_3, a_4, a_5, alle in a_1 aus:

$$\begin{array}{lllll} a_1 = & a_1 & & = 1{,}000 \cdot a_1 & \\ a_2 = & \frac{47}{48}a_1 & - \frac{5}{4} & = 0{,}979 \cdot a_1 & - 1{,}250 \\ a_3 = & \frac{329}{306}a_1 & + \frac{106}{51} & = 1{,}075 \cdot a_1 & + 2{,}078 \\ a_4 = & \frac{1222}{1773}a_1 & - \frac{1160}{591} & = 0{,}689 \cdot a_1 & - 1{,}963 \\ a_5 = & \frac{47}{105}a_1 & + \frac{15}{7} & = 0{,}447 \cdot a_1 & + 2{,}143 \\ 8 & & & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 8 = 4{,}190 \cdot a_1 + 9{,}008 = 0$$

$a_1 = -2{,}149.$	$f_4 = -1{,}304.$	$d_3 = 1{,}81.$
$a_2 = -3{,}354.$	$f_3 = 2{,}417.$	$b_1 = -0{,}473.$
$a_3 = -0{,}232.$	$d_2 = -0{,}359.$	$c_1 = -0{,}378.$
$a_4 = -3{,}443.$	$b_5 = 3{,}259.$	$c_2 = -0{,}287.$
$a_5 = 1{,}174.$	$e_4 = -2{,}087.$	$e_5 = 6{,}518.$

Die verbesserten Werthe der gemessenen Winkel sind hiernach:

A_1 =	49°	48′	14″,149	A_5 =	76°	48′	55″,826
B_1 =	81	15	15,473	B_5 =	67	24	34,741
C_1 =	48	56	30,378	E_5 =	35	46	29,482
A_2 =	77	21	13,354	E_6 =	60	45	11,539
C_2 =	53	24	12,287	F_6 =	45	31	18,846
D_2 =	49	14	34,359	G_6 =	73	43	29,616
A_3 =	71	3	25,232	F_7 =	46	28	31,236
D_3 =	71	55	43,187	G_7 =	81	34	11,294
F_3 =	37	0	51,583	H_7 =	51	57	17,471.
A_4 =	84	58	11,443				
E_4 =	57	36	17,087				
F_4 =	37	25	31,304				

Wäre ein Polygon zu berechnen, so würde man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen und mit diesen dann ebenso verfahren. Da bei der Aufnahme einer solchen Figur immer schon Diagonalwinkel gemessen werden müssen, so führen die zu verbessernden Winkel selbst auf dieses Verfahren hin.

§. 287. Die bisherigen Untersuchungen betrafen stets nur die Winkel der zu vermessenden Figuren; man kann daher die dabei als Bedingungen hingestellten Gleichungen, denen genügt werden muß, Winkelgleichungen nennen. Es gibt aber auch Fälle, wo die Seiten mit in Betracht kommen; auch sie unterliegen gewissen Bedingungsgleichungen, welche durch die gesuchten Verbesserungen erfüllt werden müssen; man nennt sie Seitengleichungen.

In dem Dreieck ABC habe man gemessen:

$$a = 100,\ b = 110;\ \alpha = 40^\circ\ 12'\ 50'',\ \beta = 45^\circ\ 15'\ 0''.$$

Sind a_1, b_1, α_1, β_1 die Fehler der gemessenen Größen, so muß streng richtig:

$$(a + a_1) \cdot \sin(\beta + \beta_1) = (b + b_1) \cdot \sin(\alpha + \alpha_1)$$

sein, oder:

$$(a + a_1)\,[\sin\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\beta \cdot \sin\beta_1] =$$
$$(b + b_1)\,[\sin\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\alpha \cdot \sin\alpha_1]. \quad \text{(A)}$$

Setzt man nun, wie früher geschehen, weil die Correctionen der Winkel nur kleine Winkel sein werden:

$$\sin\alpha_1 = \alpha_1, \qquad \sin\beta_1 = \beta_1,$$
$$\cos\alpha_1 = 1, \qquad \cos\beta_1 = 1;$$

so wandelt sich die letzte Gleichung um in:

$$(a + a_1) \cdot \sin\beta + (a + a_1)\,\beta_1 \cdot \cos\beta =$$
$$(b + b_1) \cdot \sin\alpha + (b + b_1)\,\alpha_1 \cdot \cos\alpha,$$

oder:

$$(a \cdot \sin\beta - b \cdot \sin\alpha) + a_1 \cdot \sin\beta - b_1 \cdot \sin\alpha + a\beta_1 \cdot \cos\beta -$$
$$b\,\alpha_1 \cdot \cos\alpha = 0,$$

wo α_1, β_1 noch als Bogen für den Radius 1 auszudrücken sind, nämlich:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{\omega}, \qquad \beta_1 = \frac{\beta_1}{\omega},$$

wenn α_1 und β_1 die Zahl der Secunden, ω die Zahl 206264,8 bedeutet.

Kann man nun annehmen, daß die Linearmessung bis auf 0,1 der Längeneinheit, worin a und b ausgedrückt sind, die Winkelmessung bis auf 30 Secunden genau sei, und nimmt man das Gewicht einer einfachen Linienmessung zur Gewichtseinheit an; so ist 1 das Gewicht einer Beobachtung, deren wahrscheinlicher Fehler = 1, also $\frac{1}{(0,1)^2} = \frac{1}{0,01}$ das Gewicht einer Beobachtung, deren wahrscheinlicher Fehler 0,1 ist. Das Gewicht der Winkelmessung ist dann:

$$= \frac{(0,1)^2}{30^2} \cdot \omega^2.$$

Rechnet man nun nach den gemessenen Größen, so ist:

$$\begin{array}{rlrl} \log \sin \beta = & 9,8513717 & \log \sin \alpha = & 9,8099923 \\ \log a = & 2 & \log b = & 2,0413927 \\ \hline \log (a \cdot \sin \beta) = & 1,8513717 & \log (b \cdot \sin \alpha) = & 1,8513850 \\ a \cdot \sin \beta = & 71,0185. & b \cdot \sin \alpha = & 71,0207. \end{array}$$

$$a \cdot \sin \beta - b \sin \alpha = -0,0022.$$

Die Gleichung (A) reducirt sich hiernach auf:

$$a_1 \cdot \sin \beta - b_1 \cdot \sin \alpha + a \beta_1 \cdot \cos \beta - b \alpha_1 \cdot \cos \alpha - 0,0022 = 0 \,.\,. \text{ (B)}$$

wo $\frac{30}{\omega}$ statt α_1 und β_1 zu setzen ist. Für diesen Werth von α_1 und β_1, und die gemessenen Werthe von a, b, α, β berechne man den Ausdruck (B). Es war oben gefunden:

$$\begin{array}{rlrl} \log (a \cdot \sin \beta) = & 1,8513717 & \log (b \cdot \sin \alpha) = & 1,8513851 \\ \log a = & 2 & \log b = & 2,0413927 \\ \hline \log \sin \beta = & 0,8513717 - 1 & \log \sin \alpha = & 0,8099924 - 1 \\ \sin \beta = & 0,710185 & \sin \alpha = & 0,645643. \\ \log a = & 2 & \log b = & 2,0413927 \\ \log \cos \beta = & 9,8475817 & \log \cos \alpha = & 9,8828884 \\ \hline \log (a \cdot \cos \beta) = & 1,8475817 & \log (b \cdot \cos \alpha) = & 1,9242811 \\ a \cdot \cos \beta = & 70,4015. & b \cdot \cos \alpha = & 84,0003. \end{array}$$

Diese Werthe in (B) gesetzt, liefern:

$$0 = -0,0022 + 0,710185 \cdot a_1 - 0,645643 \cdot b_1 + 70,4015 \cdot \beta_1 - 84,0003 \cdot \alpha_1,$$

wo α_1 und β_1 noch durch ω dividirt werden müssen, um die Secunden in Bogen für den Radius 1 zu verwandeln. Man erhält dann:

$$0 = -0,0022 + 0,710185 \cdot a_1 - 0,645643 \cdot b_1 + 0,00341316 \cdot \beta_1 - 0,0040725 \cdot \alpha_1 \;\ldots\ldots \text{ (C)}$$

Da α_1, β_1 jetzt in Bogen ausgedrückt sind, so ist ihr Gewicht nun = 0,01. Es muß also nun der Ausdruck:

$$a_1^2 + b_1^2 + 0,01 \cdot (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2\varphi \cdot (-0,0022 + 0,710185 \cdot a_1 - 0,645643 \cdot b_1 + 0,0000341316 \cdot \beta_1 - 0,000040725 \cdot \alpha_1)$$

ein Minimum werden. Die Differentiale nach a_1, b_1, α_1, β_1 liefern folgende Gleichungen:

$$a_1 + 0,710185 \cdot \varphi = 0$$
$$b_1 - 0,645643 \cdot \varphi = 0$$
$$0,01 \cdot \alpha_1 - 0,000040725 \cdot \varphi = 0$$
$$0,01 \cdot \beta_1 + 0,0000341316 \cdot \varphi = 0$$

Diese vier Gleichungen reichen in Verbindung mit (C) hin, die Unbekannten a_1, b_1, α_1, β_1 und φ zu bestimmen. Man erhält zunächst:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\,0{,}710185 \cdot \varphi, \\ b_1 &= \,0{,}645643 \cdot \varphi, \\ \alpha_1 &= \,0{,}0040725 \cdot \varphi, \\ \beta_1 &= -\,0{,}00341316 \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Diese Werthe in (C) gesetzt, liefern:

$$0 = -\,0{,}0022 - (0{,}710185)^2 \cdot \varphi - (0{,}645643)^2 \cdot \varphi + (0{,}00341316)^2 \cdot \varphi - (0{,}0040725)^2 \cdot \varphi.$$

$$0 = -\,0{,}0022 + \left\{ \begin{array}{l} -\,0{,}5043627 \cdot \varphi \\ -\,0{,}4168549 \cdot \varphi \\ +\,0{,}000011649 \cdot \varphi \\ -\,0{,}000016585 \cdot \varphi \end{array} \right\}$$

$$0 = -\,0{,}0022 - 0{,}9212225 \cdot \varphi$$

$$\varphi = -\frac{0{,}0022}{0{,}9212225} = -\,0{,}00238813.$$

$$a_1 = 0{,}001696. \qquad \alpha_1 = -\,0{,}000009725.$$

$$b_1 = -\,0{,}001542. \qquad \beta_1 = 0{,}000008151.$$

Multiplicirt man α_1 und β_1 noch mit ω, so erhält man ihren Werth in Secunden, nämlich:

$$\alpha_1 = -\,2''; \qquad \beta_1 = 1'',68.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der gemessenen Größen sind sonach:

$$a = 100{,}001696; \qquad \alpha = 40^\circ\ 12'\ 48'';$$

$$b = 109{,}99846; \qquad \beta = 45^\circ\ 15'\ 1'',68.$$

§. 288. In combinirten Dreiecken erhalten die Seitengleichungen in der Regel noch eine etwas andere Form. Z. B. in dem Polygon BCDFE (Fig. 324), wo die Dreiecke I, II ..... V um den Punkt A herum liegen, ist:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C_1}{\sin B_1}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin D_2}{\sin C_2}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin F_3}{\sin D_3}$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{\sin E_4}{\sin F_4}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\sin B_5}{\sin E_5}$$

$$1 = \frac{\sin C_1 \cdot \sin D_2 \cdot \sin F_3 \cdot \sin E_4 \cdot \sin B_5}{\sin B_1 \cdot \sin C_2 \cdot \sin D_3 \cdot \sin F_4 \cdot \sin E_5}.$$

Sind nun die hier bezeichneten Winkel die beobachteten Werthe, c_1, b_1, d_2, c_2 ..... beziehlich ihre Correctionen, sodaß z. B. $C_1 + c_1$, $B_1 + b_1$ ..... die wahren Werthe dieser Winkel bezeichnen, so ist in Wirklichkeit:

$$1 = \frac{\sin(C_1 + c_1) \cdot \sin(D_2 + d_2) \cdot \sin(F_3 + f_3) \cdot \sin(E_4 + e_4) \cdot}{\sin(B_1 + b_1) \cdot \sin(C_2 + c_2) \cdot \sin(D_3 + d_3) \cdot \sin(F_4 + f_4) \cdot} \cdot \frac{\sin(B_5 + b_5)}{\sin(E_5 + e_5)}.$$

Bezeichnet man dann, mit Bessel, die logarithmische Differenz für 1 Secunde bei sin x mit D log sin x, und drückt sämmtliche Correctionen in Secunden aus, so kann man:

$$\log \sin(C_1 + c_1) = \log \sin C_1 + D \log C_1 \cdot c_1$$

setzen; und da log 1 = 0, so geht obige Gleichung beim Logarithmiren in folgende über:

$$\begin{aligned} 0 = & \log \sin C_1 + \log \sin D_2 + \log \sin F_3 + \ldots\ldots \\ & - \log \sin B_1 - \log \sin C_2 - \log \sin D_3 - \ldots\ldots \\ & + D \log \sin C_1 \cdot c_1 + D \log \sin D_2 \cdot d_2 + D \log \sin F_3 \cdot f_3 + \ldots\ldots \\ & - D \log \sin B_1 \cdot b_1 - D \log \sin C_2 \cdot c_2 - D \log \sin D_3 \cdot d_3 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir fügen hier ein Beispiel aus Bessel's Gradmessung über diesen Fall hinzu und beziehen uns dabei auf Fig. 324, wo wenigstens die Lage der Dreiecke in dem Polygon ABCDFE dieselbe ist, wenn auch die Dreiecke in der Form nicht ganz mit den unten folgenden Angaben übereinstimmen. Es sei:

$$\begin{array}{rrrrl} B_1 = & 49^\circ & 43' & 40'',382 & + (21) - (28).^{*)} \\ C_2 = & 67 & 18 & 30,506 & + (32) - (31). \\ D_3 = & 67 & 37 & 2,521 & + (70). \\ (F_3 + F_4) = & 46 & 21 & 3,787 & + (67) - (66). \\ E_5 = & 6 & 28 & 34,609 & + (44) - (43). \\ C_1 = & 90 & 53 & 40,054 & + (31) - (30). \\ D_2 = & 75 & 36 & 39,074 & - (69). \\ F_3 = & 71 & 22 & 57,648 & + (66). \end{array}$$

---

*) Die eingeklammerten Zahlen (21), (28) u. s. w. sind die Bezeichnungen der Winkelcorrectionen; Bessel nimmt dazu fortlaufende Zahlen, die also hier nicht ihrem Zahlenwerthe nach, sondern lediglich als willkürliche Zeichen zu nehmen sind, wie man sonst Buchstaben gebraucht, die hier, ihrer großen Anzahl wegen, weniger zweckmäßig wären. Daß einem Winkel zwei solche Correctionen angehängt sind, kommt daher, daß der betreffende Winkel aus zwei Messungen berechnet ist, der jeder eine Correction zukommt; z. B. es sei:

$$\begin{aligned} \angle EBC &= b + (21), \\ \angle EBA &= b' + (28), \end{aligned}$$

so ist $\angle ABC = (b - b') + (21) - (28).$

$E_4 = 60\ 50\ 1{,}026 + (43) - (42).$
$B_5 = 3\ 48\ 2{,}901 + (28) - (27).$

Für log sin x + D log sin x · △ x hat man dann:

9,88251328 + 17,839 · [(21) — (28)].
9,96501063 + 8,804 · [(32) — (31)].
9,96598224 + 8,671 · (70).
9,85948656 + 20,085 · [(67) — (66)].
9,05227427 + 185,483 · [(44) — (43)].
8,72526698;

9,99994711 — 0,329 · [(31) — (30)].
9,98615770 — 5,402 · (69).
9,97665758 + 7,093 · (66).
9,94111694 + 11,751 · [(43) — (42)].
8,82142840 + 316,938 · [(28) — (27)].
8,72530773
8,72526698
— 4075. Also ist:

$$0 = -407{,}5 + 17{,}839 \cdot (21) + 316{,}938 \cdot (27) - 334{,}777 \cdot (28) - 0{,}329 \cdot (30) - 8{,}475 \cdot (31) + 8{,}804 \cdot (32) + 11{,}751 \cdot (42) - 197{,}234 \cdot (43) + 185{,}483 \cdot (44) - 27{,}178 \cdot (66) + 20{,}085 \cdot (67) + 5{,}402 \cdot (69) + 8{,}671 \cdot (70),$$

die gesuchte Seitengleichung, welche in Verbindung mit den Winkelgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten dient.

Wir müssen diesen Gegenstand hier abbrechen, versäumen aber nicht, da derselbe noch so viele für die praktische Ausführung wichtige Seiten darbietet, die Schriften anzuführen, wo man denselben speciell behandelt findet. Es sind, außer den verschiedenen Arbeiten von Gauß, die zwar als Originalarbeiten immer noch ein historisches Interesse haben, aber doch für den besondern Zweck heutzutage hinter andern Schriften zurückstehen: 1) Gerling, „Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie“ (Hamburg 1843): 2) Dienger, „Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen“ (Braunschweig 1857); 3) Vorlaender, „Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen“ (Leipzig 1858).

Drittes Kapitel.

Horizontalaufnahmen.

A. Aufnahme einzelner Punkte.

§. 289. Wenn die Lage eines Punktes zu andern, die schon bekannt oder auf dem Plane des Meßtisches eingetragen sind, bestimmt, oder dieser Punkt ebenfalls in die Zeichnung oder Karte eingetragen werden soll, so geschieht dies hauptsächlich dadurch, daß man bekannte und unbekannte (noch nicht bestimmte, oder noch nicht in die Karte eingetragene) Punkte in verschiedenen, sich durchschneidenden Richtungen in ein und dieselbe Visirlinie bringt, wo dann die unbekannten sich durch die Durchschnitte der Visirlinien bestimmen. Dieses Verfahren heißt allgemein das Einschneiden auf dem Meßtische.

Man hat aber diese Benennung auch auf die Aufnahmen übertragen, welche nicht mit dem Meßtische, sondern durch Seiten- und Winkelmessung und darauf gestützte Construction oder Rechnung ausgeführt werden.

Man mag aber mit dem Meßtische durch Construction oder Rechnung operiren, allemal beabsichtigt man, aus zwei schon bekannten und einem dritten noch zu bestimmenden Punkte ein Dreieck auf dem Papier zu erzeugen, das der Horizontalprojection des Originaldreiecks dieser drei Punkte im Felde ähnlich sei. Daß dies durch die schon oft angewendete Operation mit dem Meßtische erreicht werde, ist unter anderm §. 259, 2, gezeigt worden. Daß aber durch Messung der drei Seiten eines Dreiecks, oder zweier Seiten und eines Winkels, oder einer Seite und zweier Winkel, und darauf gestützte Construction des Dreiecks nach verjüngtem Maßstabe ein dem Urdreieck oder vielmehr seiner Horizontalprojection, weil man allemal Horizontalweiten und Horizontalwinkel mißt, ähnliches Dreieck entsteht, ist selbstverständlich; nicht minder ist dies der Fall, wenn man die Bestimmungsstücke eines Dreiecks durch Berechnung aus andern, damit in Verbindung stehenden Größen (z. B. aus anliegenden Dreiecken, oder Coordinaten u. s. w.) berechnet und daraus ein Dreieck construirt oder sich construirt denkt.

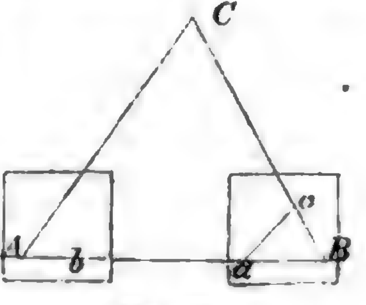


Fig. 325.

Fällt bei diesem Einschneiden der gesuchte Punkt c (Fig. 325) zwischen einen schon bestimmten Punkt b und den dem Punkte c entsprechenden Punkt C im Felde, so heißt das Verfahren das Vorwärtseinschneiden.

Hat der aufzunehmende Punkt C (Fig. 326) im Felde eine solche Lage, daß man ihn nicht von den bekannten Punkten A und B aus, wohl aber von einem in der Verlängerung von AB liegenden Punkte D aus anvisiren kann, so kommt der entsprechende Punkt c für die Stellung des Feldmessers in D seitwärts zu liegen, und das Verfahren, welches bei der Aufnahme des Punktes C befolgt werden muß, heißt das Seitwärtseinschneiden.

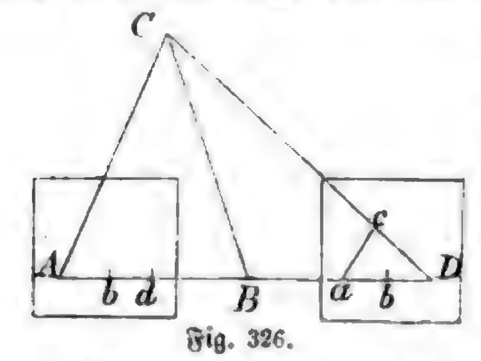


Fig. 326.

Fällt endlich der gesuchte Punkt c auf dem Papier in die Verlängerung der Verbindungslinie Aa eines schon bestimmten Punktes A und seines Bildes a hinter a auf dem Meßtische (Fig. 327), so heißt das dabei zu befolgende Verfahren das Rückwärtseinschneiden. Sind die Punkte a, b, als Bilder von A, B, bereits auf dem Papier verzeichnet, und man begibt sich mit dem Meßtische, weil derselbe sich in A und B nicht aufstellen läßt, nach einem dritten noch aufzunehmenden Punkte C, und construirt von C aus den ihm entsprechenden Punkt c mit Hülfe von a, A und b, B, so hat man rückwärts eingeschnitten.

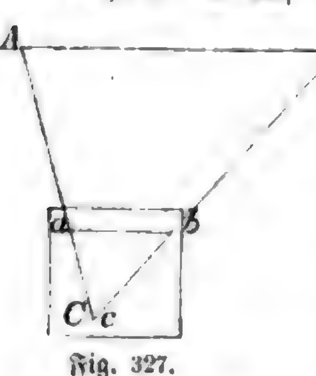


Fig. 327.

§. 290. **Aufgabe.** Die Lage zweier Punkte A, B ist bekannt und die Punkte sind bereits in die Karte eingetragen; man soll von einem dritten Punkte C durch Vorwärtseinschneiden die Lage gegen jene finden und den Punkt ebenfalls in die Karte eintragen.

Auflösung 1. Mit der Meßkette. Man messe AC, BC (Fig. 328) und construire aus den drei Seiten (AB ist schon bekannt) das Dreieck ABC nach demselben Maßstabe, nach welchem AB eingetragen ist, so hat man auch die Lage von C gefunden. Wäre AB zwar durch die Zeichnung, aber nicht in Zahlen gegeben, so müßte man AB ebenfalls messen und daraus den verjüngten Maßstab suchen, nach welchem AB eingetragen ist, worüber Abschn. 2, Kap. 1 nachzulesen ist.

Fig. 328.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Es wird angenommen, die Gerade AB (Fig. 329) sei schon auf dem Plane des Meßtisches als ab aufgetragen. Man bringe also den Meßtisch nach A, stelle ihn dort so auf, daß a vertical über A zu liegen kommt, richte das Blatt horizontal, lege gegen ab die Kante des Lineals und drehe nun den Tisch so, daß ab in das Alignement von AB fällt, was der Fall sein wird, wenn das Haar des Diopters oder der Faden des Fadenkreuzes das Object in B deckt. Ist diese Lage annähernd genau

erreicht, so stelle man das Tischblatt fest und corrigire die Lage des Lineals mittels der Mikrometerbewegung bis zur völlig genauen Coincidenz. Dann richte man das Lineal von A nach C, ziehe auf dem Tische längs des Lineals die Gerade ac, welche, verlängert, durch C geht. Nun bringe man den Tisch nach B, orientire ihn hier ebenso wie vorhin in A, nach der Linie AB, so daß b über B und ab in das Alignement von AB kommt, stelle den Tisch fest, visire von B nach C und ziehe die Richtungslinie bc; bc wird ac in c schneiden, und da Dreieck abc $\sim$ ABC, so ist c das Bild des Punktes C.

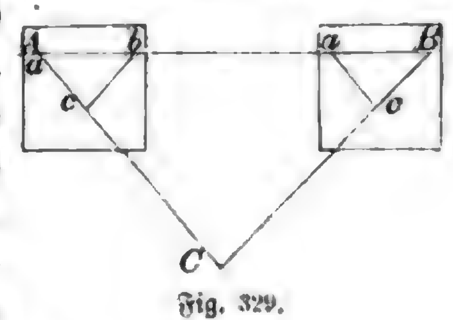


Fig. 329.

Auflösung 3. Geometrisch. Man messe die Winkel BAC und ABC in den Standorten A und B, und construire aus ihnen und der Seite AB das Dreieck ABC.

Auflösung 4. Trigonometrisch. Man messe wie in Auflösung 3 und berechne daraus AC, BC. Setzt man AB = c, W. BAC = α, ABC = β, so ist:

$$AC = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},\ BC = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

§. 291. **Aufgabe.** Die Lage zweier Punkte A, B ist bekannt und die Punkte sind bereits in die Karte eingetragen; A und B selbst sind unzugänglich, dagegen ist ein Punkt D in der Verlängerung von AB zugänglich. Man soll einen zugänglichen Punkt C durch Seitwärtseinschneiden bestimmen und in die Karte eintragen.

Auflösung 1. Mit der Kette läßt sich die Aufgabe nur lösen, wenn man in dem Alignement von AB außer D noch einen zweiten Punkt E annehmen und von ihm aus nach C und D hin messen kann. Man messe dann (Fig. 330) DE, CD, CE, so bestimmt sich daraus Dreieck CDE. Von E fälle man ein Loth EH auf CA; es schneidet CD in F; man messe dann EF, CF, so kann man auf dem Papier auch EF in das Dreieck CDE eintragen, EF verlängern und von C ein Loth CH auf die Verlängerung fällen. Verlängert man dann CH, ED, so bestimmt sich der Punkt A, und weil AB bekannt ist, auch B. Ist nun AB schon in der Karte verzeichnet, so muß man die eben beschriebene Construction an nderer Stelle ausführen und sie in umgekehrter Ordnung auf der Karte an AB antragen.

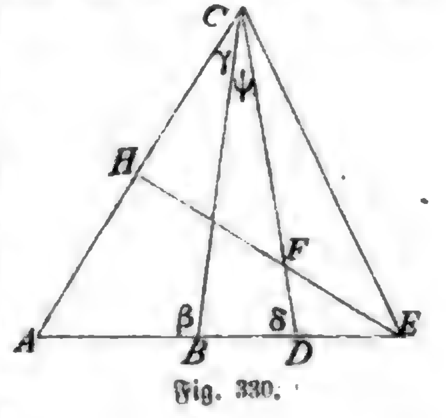


Fig. 330.

Auflösung 2. Mit dem Meßtische. Man stellt den Meßtisch über

D (Fig. 331) auf, visirt in der Richtung der Linie AB und zieht db; dann visirt man von d nach c und zieht dc. Nun stellt man den Meßtisch

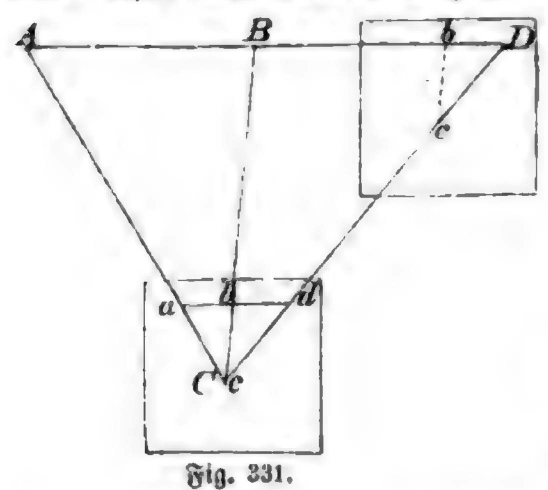


Fig. 331.

über C auf, indem man die Lage des Punktes c in der Linie dc der Zeichnung ungefähr abschätzt, die Linie cd in das Alignement von CD bringt und das vermuthliche c senkrecht über C; dann ist db der Zeichnung parallel der DB im Felde. Man visirt dann von C nach A und B und zieht die entsprechenden Richtungslinien ca, cb, so bestimmt sich durch ihren Schnitt der Punkt c auf dem Papier als Bild von C, weil Dreieck cab $\sim$ CAB ist.

Sollte nun die Gerade ab auf dem Meßtische nicht genau zwischen die Schenkel des Winkels ACB fallen, so daß a in CA, b in CB liegt, so wäre dies ein Beweis, daß der bei dieser Aufstellung des Tisches senkrecht über C liegende Punkt (c) nicht der richtige, dem C im Felde entsprechende Punkt c sei, und man hätte den Meßtisch so lange zu verschieben und die Construction in C zu wiederholen, bis a in CA, b in CB fiele; bei diesem Verschieben des Meßtisches jedoch hätte man allemal darauf zu sehen, daß cd in das Alignement von CD käme.

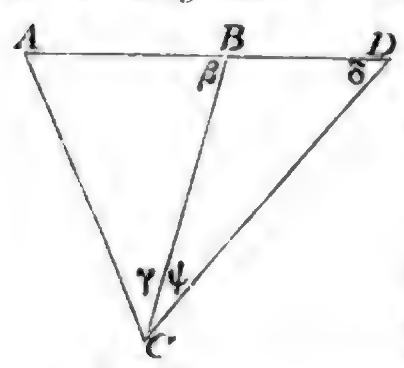


Fig. 332.

Auflösung 3. Trigonometrisch. Man messe die Winkel δ, γ, ψ (Fig. 332), so hat man $\beta = \delta + \psi$ und kann im Dreieck ABC die Seiten AC, BC aus AB und den Winkeln β und γ finden.

Anmerkung. Es leuchtet ein, daß dieselben Auflösungen noch anwendbar bleiben, wenn D nicht in der Verlängerung von AB, sondern in AB selbst läge und A und B unzugänglich wären.

§. 292. **Aufgabe.** Die Lage zweier Punkte A, B ist bekannt; man soll die Lage eines dritten Punktes C unter der Voraussetzung finden, daß man nur nach B, nicht nach A oder C hinkommen, aber von B aus nach A und C visiren könne.

Auflösung 1. Mit dem Meßtische. Der Meßtisch werde in B (Fig. 333) aufgestellt; von B aus visire man nach A und C, ziehe die entsprechenden Richtungslinien ba, bc und mache ba nach dem verjüngten Maßstabe = BA. Nun wähle man eine beliebige durch B gehende Richtungslinie MN und trage auf dem Meßtische die ihr entsprechende Gerade mn ein; auf MN stecke man eine beliebige Länge BD ab, stelle den Meßtisch über D auf und richte mn genau nach MN ein, so wird ab $\nparallel$ AB wer-

den. Durch a visire man nach A, ziehe die entsprechende Richtungslinie, so wird diese die mn in dem Punkte d schneiden, welcher dem Punkte D im Felde entspricht. Visirt man nun noch von D nach C, so wird die Richtungslinie dC die der Richtung nach schon eingetragene bC in dem Punkte c, welcher dem C im Felde entspricht, schneiden.

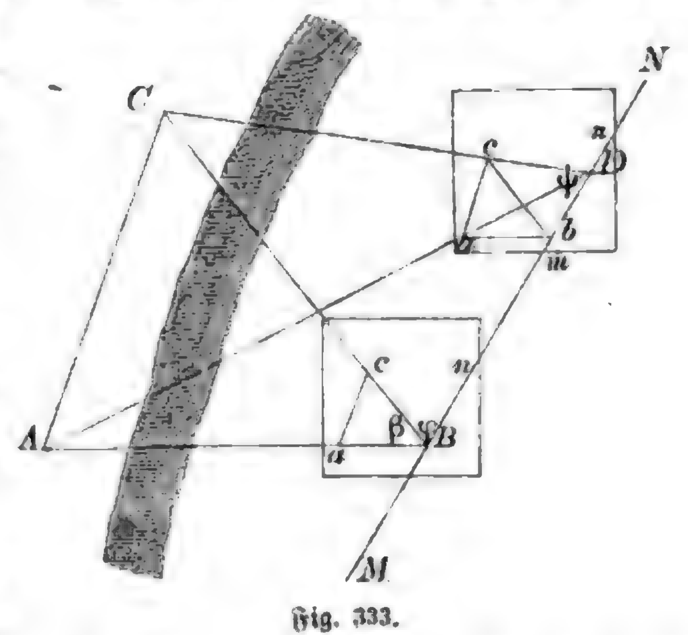


Fig. 333.

Hier ist c durch Vorwärtseinschneiden, d durch Rückwärtseinschneiden gefunden.

Auflösung 2. Trigonometrisch. Man messe in B (Fig. 333) den Winkel ABC = β, nehme außerhalb ABC noch irgend einen von B aus zugänglichen Standpunkt D an und setze in D ein Signal, messe BD = d, W. CBD = φ, so ist im Dreieck BCD:

$$BC = \frac{d \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)},$$

und im Dreieck ABC, da AB = a schon bekannt war:

$$AC = (AB + BC) \cdot \cos x,$$

wo x ein Hülfswinkel ist, bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{AB + BC} \cdot \sqrt{AB \cdot BC},$$

oder:

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin(\varphi + \psi)}{a \cdot \sin(\varphi + \psi) + d \cdot \sin\psi} \cdot \sqrt{\frac{ad \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{\sin(\varphi + \psi) + d\sin\psi} \cdot \sqrt{\frac{d \cdot \sin\psi \cdot \sin(\varphi + \psi)}{a}}.$$

§. 293. **Aufgabe.** Zwei Punkte A, B sind der Lage nach bekannt und in die Karte eingetragen; man soll die Lage eines dritten Punktes C unter der Voraussetzung bestimmen, daß man den Meßtisch oder Winkelmesser weder in AB selbst, noch in dessen Verlängerung, sondern nur seitwärts von AB aufstellen könne.

Auflösung 1. Mit dem Meßtische. Man nehme einen Hülfspunkt D (Fig. 334) an, sehe aber bei der Wahl dieses Punktes darauf, daß die andern, A, B und C aus ihm sichtbar seien, und daß die aus ihm nach A,

B, C gezogenen Visirlinien mit den Seiten des Dreiecks ABC weder sehr große, noch auch sehr kleine Winkel geben, weil die genauen Durchschnitte so schräger Linien schwer zu bestimmen sind. In D stelle man den Meßtisch auf und orientire ihn nach dem Augenmaße so, daß ab ⫲ AB werde, wobei man sich, wenn die Gegend es zuläßt, weit entfernter Richtobjecte bedienen kann (§. 249, 4). Man ziehe aA, bB, so bestimmt sich durch Rückwärtseinschneiden der Punkt d als Bild von D. Sollte es aber, wie gewöhnlich der Fall, nicht gelungen sein, ab genau parallel mit AB zu legen, so wäre auch d nicht das richtige Bild von D, weil dann das Dreieck abd nicht ähnlich dem Dreieck ABD ist. In diesem Falle visire man von D nach C, ziehe die entsprechende Visirlinie dc auf dem Meßtische, bringe dann den Meßtisch nach C und orientire ihn nach cd, so wird db ⫲ DB; zieht man dann Aa, so schneidet diese rückwärts dc in c′, und visirt man von c′ nach B, so schneidet die Visirlinie die db in einem Punkte b′ so, daß nun ab′ ⫲ AB, daß also das fehlerhafte ab dadurch corrigirt ist, und daß man durch Rückwärtseinschneiden mittels der Linien Aa, Bb′ den Punkt c als Projection von C genau bestimmen kann.

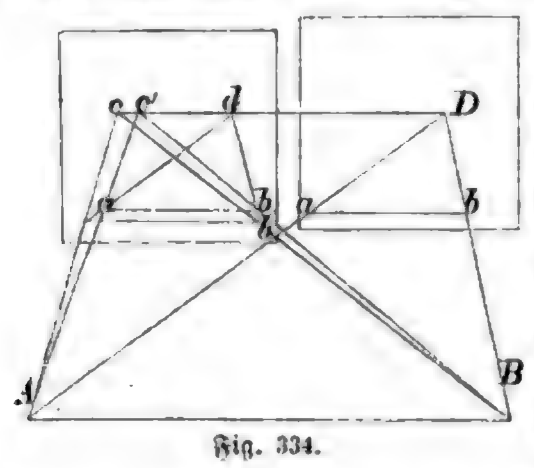


Fig. 334.

Auflösung 2. Trigonometrisch. Man nehme ebenfalls den Hülfspunkt D (Fig. 335) so an, daß man von D aus nach A und B visiren, nach C hin messen und visiren kann, messe CD = d, W. ACB = γ, BCD = φ, ADB = δ, ADC = ψ, berechne im Dreieck ACD die Seite AC aus d, $\gamma + \varphi$ und ψ, im Dreieck BCD die Seite BC aus d, φ und $\delta + \psi$, so ist die Lage von C gegen A und B gefunden, und C kann nach dem für AB angenommenen Maßstabe in die Karte eingetragen werden.

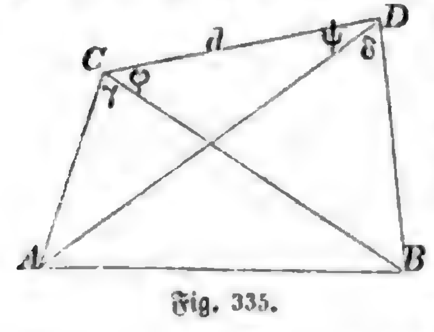


Fig. 335.

§. 294. **Aufgabe.** Von den drei Punkten A, B, C im Felde sind die Horizontalprojectionen bekannt und in die Karte eingetragen; man soll einen vierten Punkt D in die Karte eintragen, unter der Voraussetzung, daß man nach D hinkommen und nach A, B, C visiren könne, A, B, C selbst aber unzugänglich seien.

Auflösung 1. Mit dem Meßtische. Man stelle den Meßtisch so über D (Fig. 336) auf, daß die muthmaßliche Stelle von d vertical über D zu liegen komme, und daß die ab auf dem Meßtische mit der AB im Felde so nahe parallel werde, als es nach dem Augenmaße erreicht werden kann. Dann

ist auch ac mit AC und bc mit BC parallel. Ist nun diese Stellung des Meßtisches in aller Strenge gefunden, und man visirt das a auf dem Meßtische mit dem A im Felde ein, dann ebenso b mit B und c mit C, und verlängert die drei Richtungslinien Aa, Bb, Cc rückwärts über a, b, c hinaus, so müssen sich diese drei Linien in einem Punkte durchschneiden, und umgekehrt: schneiden sich die drei geraden Linien Aa, Bb, Cc in einem Punkte, so hat der Meßtisch seine richtige Stellung, d liegt gerade über D, AB ist mit ab, BC mit bc, AC mit ac parallel, und der Durchschnitt der drei Richtungslinien Aa, Bb, Cc ist der gesuchte Punkt d, wenn nur die homologen Seiten der Dreiecke ABC und abc in gleichem Sinne auf einander folgen.

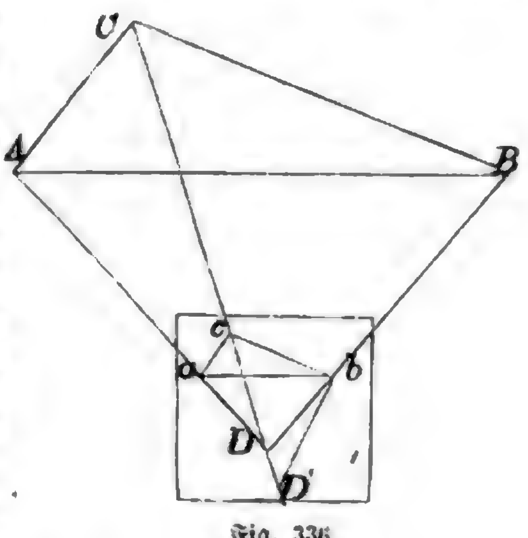


Fig. 336.

Diese beiden Sätze lassen sich an der Fig. 336 einfach so beweisen: Dreieck abc ist das getreue Bild von ABC, also abc $\sim$ ABC, und:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}.$$

Dieses Seitenverhältniß sei $= m : n$ und es schneiden sich Aa und Cc in D, dagegen Cc und Bb in D', so wäre:

$$Dc : DC = ac : AC = m : n,$$
$$D'c : D'C = bc : BC = m : n,$$

also:

$$Dc : DC = D'c : D'C$$
$$D'c - Dc : Dc = D'C - DC : DC$$
$$D'D : Dc = D'D : DC.$$

Folglich wäre $Dc = DC$,

was nicht möglich ist; also muß D' mit D zusammenfallen, d. h. Aa, Bb und Cc schneiden sich in einem Punkte.

Liegen die Dreiecke abc und ABC so, daß die Geraden Aa, Bb, Cc sich in einem Punkte D schneiden, so ist auch ab $\ddagger$ AB, ac $\ddagger$ AC und bc $\ddagger$ BC. Denn: wäre z. B. ac nicht $\ddagger$ AC, so könnte doch ac, wenn es seine Länge beibehalten soll, nur noch auf eine einzige Art von c aus in den Winkel ADC gelegt werden; diese Lage wird gefunden, wenn man von c ein Loth auf AD fällt, und einen Punkt jenseit des Lothes und in gleichem Abstande davon statt a nimmt. Dasselbe gilt für cb; dann wird aber, wie leicht erhellet, W. a'cb' nicht mehr gleich ACB, also Dreieck a'cb' auch nicht ähnlich ACB sein. Sollen also die Dreiecke ähnlich sein und die Li-

nien Aa, Bb, Cc sich in einem Punkte D treffen, so kann dies nur bei der parallelen Lage aller drei Seitenpaare der Fall sein.

Treffen sich aber die rückwärts verlängerten Richtungslinien nicht in einem Punkte, sondern durchschneiden sie sich in drei Punkten x, y, z (Fig. 337); so ist dies ein Zeichen, daß man die rechte Stellung des Meßtisches nicht gefunden hat, d nicht über D, ab nicht parallel AB, also auch ac nicht mit AC, bc nicht mit BC parallel sei. Das Dreieck xyz heißt daher das fehlerzeigende Dreieck und muß durch eine nachfolgende Operation mit dem Meßtische weggeschafft werden. Es gibt jedoch einen Fall, in welchem, ungeachtet einer unrichtigen Orientirung des Meßtisches, kein fehlerzeigendes Dreieck entsteht, wenn nämlich D in der Peripherie des durch A, B, C gehenden Kreises liegt, wie Fig. 338 dies deutlich zeigt, weil dort

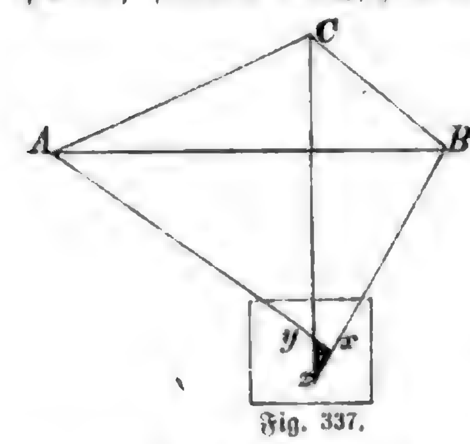


Fig. 337.

$$\text{W. } a = BDC = a' = BAC,$$
$$\text{W. } b = ADC = b' = ABC,$$
$$\text{W. } c = ADB = c' = ACB,$$

wie auch das Dreieck abc zwischen die Convergenten AD, BD, CD gepaßt sein mag.

Bis so weit besteht also das ganze Verfahren in Folgendem: Man legt das Lineal oder die Kippregel an das vorläufig angenommene d und eine Ecke c des Dreiecks abc auf dem Tischblatte*), dreht den Tisch so lange, bis das Lineal auf C im Felde einsteht, stellt dann den Tisch fest und zieht die Visirlinie cd, wenigstens in der Gegend von d und noch etwas rückwärts verlängert. Nun stellt man, bei unverändertem Tischblatte, das Lineal auf a (im Plane) und A (im Felde) ein, zieht diese Visirlinie da, wo sie cd in dem Punkt y (Fig. 337) schneidet und allenfalls noch etwas darüber hinaus; endlich stellt man das Lineal, bei gleicher Lage des Tischblattes, auf b und B ein, zieht auch diese Visirlinie da, wo sie cd in z und aA in x schneidet; xyz ist das fehlerzeigende Dreieck.

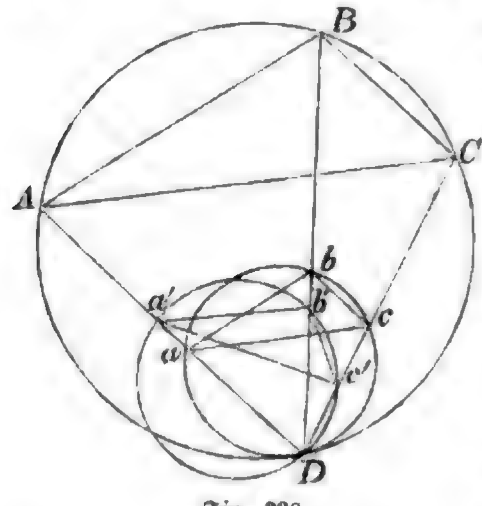


Fig. 338.

*) Hierzu ist durchaus kein strenges Einvisiren nöthig; ein gewöhnliches etwas breites Lineal, auf die hohe Kante gestellt, kann sehr wohl dazu dienen und gestattet ein schnelleres Arbeiten als die Kippregel oder das Diopterlineal.

Wenn nun auch, wie nachher gezeigt werden soll, aus dem fehlerzeigenden Dreiecke die wirkliche Lage des vierten Punktes d im Plane durch eine besondere Construction gefunden werden kann, so ist es doch wünschenswerth, daß das fehlerzeigende Dreieck so klein wie möglich werde, da hierdurch die nachträgliche Construction des Punktes d wesentlich erleichtert und zuverlässiger gemacht wird. Durch gewisse Rücksichten, welche die Erfahrung an die Hand gibt, wird man dahin gelangen, das fehlerzeigende Dreieck schon bei der ersten Zeichnung ganz klein zu erhalten; gelingt dies aber wirklich in einem Falle nicht, so gibt es wieder andere Mittel, es nachgehends zu verkleinern oder auch ganz zu entfernen.

Vor allem verschaffe man sich womöglich eine klare Anschauung von der Lage des Punktes D zu den drei schon festgelegten Punkten A, B, C. Zunächst wird D entweder innerhalb oder außerhalb des von A, B, C gebildeten Dreiecks liegen. Im ersten Falle entsteht das fehlerzeigende Dreieck innerhalb des Dreiecks abc (des Bildes abc auf dem Plane vom Dreieck ABC im Felde), und der Punkt d liegt innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks xyz.*) Beobachtet man hier, wo die durch D und einen Eckpunkt des Dreiecks, etwa C, gedachte Gerade (CD) die Gegenseite AB trifft, so kann man schon ziemlich genau einen Ort des Punktes d, nämlich die Gerade cd, auf dem Plane bestimmen; schneidet z. B. CD die Seite AB in $\frac{m}{n}$ von A aus (natürlich nach dem Augenmaße bestimmt), so schneidet auch cd auf dem Plane die Seite ab in $\frac{m}{n}$ von a aus gerechnet. Dies kann da, wo eine Beurtheilung dieses Verhältnisses möglich ist, bei der vorläufigen Wahl des Punktes d als eine sehr förderliche Richtschnur dienen.

Im andern Falle, wenn nämlich der Punkt D außerhalb des Dreiecks ABC liegt, was nöthigenfalls, wenn sich die Figur nicht wohl übersehen läßt, auch daran zu erkennen ist, daß dann das fehlerzeigende Dreieck allemal außerhalb abc fällt, liegt auch der Punkt d stets außerhalb abc. Hierbei ist nun zu beachten, ob der Punkt D einer Seite oder einer Ecke des Dreiecks ABC gegenüberliege. Er liegt z. B. der Seite AB gegenüber, wenn er innerhalb der über A und B hinausgeführten Verlängerungen der Seiten CA und CB fällt; er liegt dagegen einer Ecke gegenüber, wenn er in den Scheitelwinkel eines Dreieckwinkels fällt. In jedem einzelnen Falle hat der Punkt d dieselbe Lage zum Dreieck abc, und ebenso das fehlerzeigende Dreieck.

---

*) Dies ist übrigens der einzige Fall, wo der Punkt d innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks fällt, wie wir gleich nachher sehen werden.

Fällt der Punkt d einer Seite des Dreiecks abc gegenüber, so kann er noch innerhalb oder außerhalb des durch a, b, c gelegten Kreises liegen; liegt er einer Ecke von abc gegenüber, so kann er nur außerhalb des genannten Kreises fallen.

Kommt d einer Seite des Dreiecks abc gegenüber zu liegen, und fällt das Fehlerdreieck innerhalb des durch a, b, c gelegten Kreises, so liegt der Punkt d auf derjenigen Seite der mittlern Visirlinie, auf welcher das Fehlerdreieck nicht liegt (liegt vom Dreieck abc z. B. die Ecke a links, b rechts, so ist die durch c gehende Visirlinie die mittlere). Fällt dagegen das Fehlerdreieck außerhalb des durch a, b, c gelegten Kreises, so liegt der Punkt d mit dem Fehlerdreieck auf derselben Seite der mittlern Visirlinie.

Liegt D einer Ecke des Dreiecks ABC gegenüber, so erhält auch das Fehlerdreieck dieselbe Lage zum Dreieck abc, und es liegen d und das Fehlerdreieck wieder auf verschiedenen Seiten der mittlern Visirlinie.

Durch diese Bemerkungen ist man in Stand gesetzt, nachdem man durch eine vorläufige Annahme des Punktes d und die oben beschriebene Construction ein Fehlerdreieck erhalten hat, den Punkt d zu berichtigen, auf eine zweite Annahme des Punktes d eine zweite Construction zu gründen und ein jedenfalls kleineres Fehlerdreieck, möglicherweise auch schon den Punkt d selbst ganz richtig zu erhalten.

Da die Aufgabe, wie schon oben erwähnt, unlösbar bleibt, sobald der Punkt D mit A, B, C in derselben Kreisperipherie liegt, so muß man eine solche Lage des Punktes D vermeiden; aber auch der Fall, wo D der durch A, B, C bestimmten Kreisperipherie nahe liegt, ist fast so gut wie unbestimmt, weil dann eine Gerade durch zwei einander nahe liegende Punkte gezogen werden soll, was in der Ausführung immer unsicher bleibt.

Es kann der Fall eintreten, daß die drei Punkte A, B, C in gerader Linie liegen; das Verfahren, um das Bild d eines vierten Punktes D zu finden, bleibt dasselbe wie bisher; das Fehlerdreieck und der wahre Ort des Punktes d liegen auf verschiedenen Seiten der mittlern Visirlinie.

Von den verschiedenen Methoden, welche die Geodäten zur Fortschaffung des fehlerzeigenden Dreiecks erfunden haben, führen wir hier folgende als die zuverlässigsten an.

1) Stellen M, N (Fig. 339) die Mittelpunkte zweier sich in b und d schneidenden Kreise vor, bd ihre gemeinsame Sehne, be und bf zwei durch denselben Schnittpunkt b der Peripherien gehende Durchmesser, und man zieht noch die Sehnen ae, de, cf, df: so sind bde und bdf rechte Winkel und W. aeb = adb, und bfc = bdc.

Hierauf gründet sich nun folgendes Verfahren: stellen a, b, c die bereits verzeichneten Horizontalprojectionen der Punkte A, B, C vor, so errichte man

auf ab in a das Loth ae, auf bc in c das Loth cf; dann richte man das Lineal nach ae, visire nach A und orientire den Meßtisch danach. Nachdem letzterer festgestellt, visire man von b nach B und ziehe bb′. Ebenso lege man das Lineal an cf und orientire den Meßtisch nach dem Objecte C, lege das Lineal an b, visire nach B und ziehe die Visirlinie bb″. Endlich verbinde man die Schnittpunkte e und f der genannten Linienpaare durch die Gerade ef und fälle von b aus ein Loth bd auf ef; der Fußpunkt d dieses Lothes ist die gesuchte Projection des Punktes D im Felde.

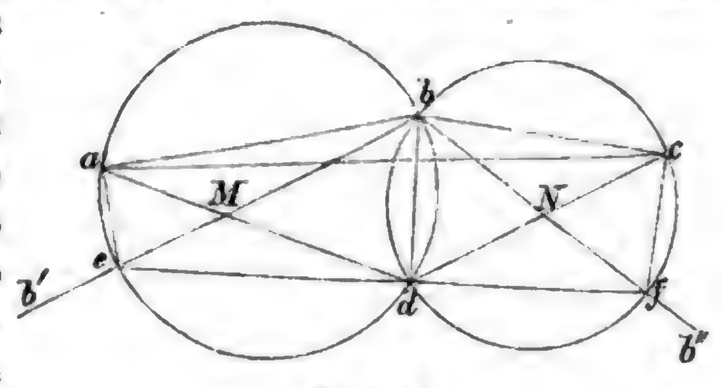


Fig. 339.

2) Das Schickhardt'sche Verfahren gründet sich auf den Umstand, daß die Winkel, unter welchen die Entfernung zweier entfernten Objecte von verschiedenen Punkten des Meßtisches aus gesehen wird, nahe genau einander gleich sind.

Entsteht daher, wegen mangelhafter Orientirung des Meßtisches, durch die drei rückwärts über a, b, c hinaus verlängerten Visirlinien das fehlerzeigende Dreieck xyz (Fig. 340), und es ist d die wahre Horizontalprojection des vierten Punktes D, wie dieselbe bei richtiger Stellung des Meßtisches gefunden würde, so ist, dem Vorausgeschickten gemäß, annähernd W. adb = axb, bdc = bzc und adc = ayc. Der gesuchte Punkt d muß daher mit a, b und x, desgleichen mit b, c und z, endlich mit a, c und y in derselben Kreisperipherie liegen. Der Punkt d muß also im Durchschnitt der drei Kreise liegen, welche durch je zwei der drei Punkte a, b, c und den Durchschnittspunkt der von ihnen aus rückwärts gezogenen Visirlinien bestimmt werden. Construirt man zwei dieser drei Kreise, so hat man den Punkt d gefunden, und danach läßt sich der Meßtisch richtig orientiren.

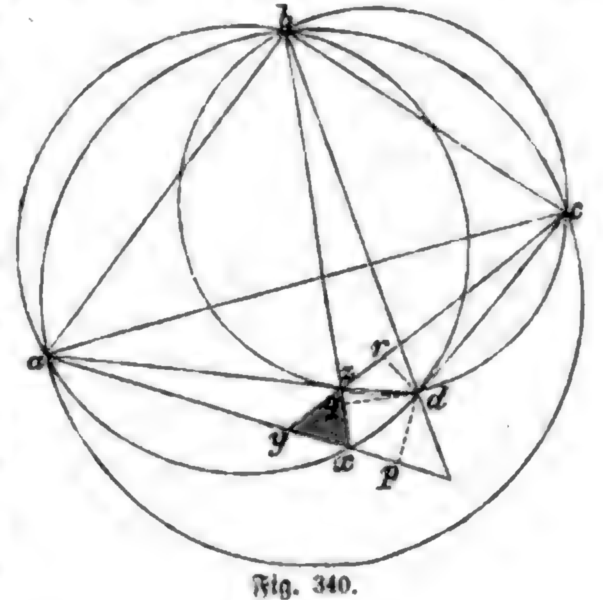


Fig. 340.

3) Durch Annäherung lehrt Lehmann das fehlerzeigende Dreieck fortschaffen. Fällt man nämlich vom Punkte d (Fig. 340) die Lothe dp, dq, dr auf die Visirlinien ax, bz und cy, so stehen W. dax und dbx auf

demselben Bogen dx, und da sie Peripheriewinkel in demselben Kreise sind, so sind sie einander gleich; ebenso ist W. dbz = dcz, weil beide auf dem Bogen dz stehen. Deshalb sind die rechtwinkeligen Dreiecke adp, bdq und cdr einander ähnlich, also ist:

$$dp : dq : dr = da : db : dc,$$

d. h. die senkrechten Abstände des gesuchten Projectionspunktes d von den drei Visirlinien sind seinen Entfernungen von den entsprechenden Netzpunkten proportional; und durch diesen Satz läßt sich die Lage von d, zwar nicht geometrisch, aber doch versuchsweise, ziemlich bequem auffinden.

In dem Falle, wo die Aufgabe unbestimmt wird, wenn nämlich die vier Punkte A, B, C, D in einem Kreise liegen, muß man, wenn außer A, B, C schon mehr Punkte bestimmt sind, zwei derselben mit einem andern Punkte E (Fig. 341) verbinden, oder wenn sonst noch keiner bestimmt ist, mittels A, B, C, statt D, einen andern E, als vierten Punkt finden, der mit A, B, C nicht in einem Kreise liegt, und nachgehends D durch eine andere Combination bestimmen, z. B. durch A, C, E, oder A, B, E u. s. w.

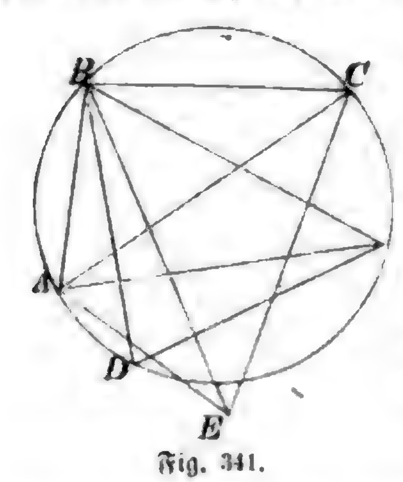


Fig. 341.

4) Bohnenberger schlägt vor, nachdem ein fehlerzeigendes Dreieck entstanden, den Tisch lieber etwas zu viel, als zu wenig zu drehen, natürlich nach der leicht zu entdeckenden Seite, so daß die anfangende Bewegung das fehlerzeigende Dreieck verkleinert, dann aufgehoben wird (welchen Punkt man jedoch nicht leicht finden dürfte), dann eins nach der entgegengesetzten Seite hin erzeugt wird. Ist nun ein zweites fehlerzeigendes Dreieck x′, y′, z′ entstanden, so ziehe man zwischen den gleichnamigen Punkten der beiden Dreiecke xyz und x′y′z′ kleine gerade Linien; diese schneiden sich in dem gesuchten Punkte d.

Das Verfahren beruht auf dem Umstande, daß x, d, x′, b, c und auch z, d, z′, a, b in denselben Kreisen liegen, und daß sehr kleine Kreisbogen xx′, zz′ mit ihren Sehnen vertauscht werden können.

5) Gerling entnimmt aus allen diesen Vorschriften ein combinirtes Verfahren. Wenn der Meßtisch nach dem Augenmaße vorläufig orientirt und das erste fehlerzeigende Dreieck xyz entstanden ist, so ziehe man nach dem Augenmaße mit leichten Bleistrichen die beiden Schickhard'schen Kreise (Fig. 340), soweit man sie braucht, und bezeichne den Durchschnittspunkt d vorläufig mit Blei. Dann schätze man die Entfernungen ad, bd, cd nach dem Augenmaße, und untersuche, ebenfalls nach dem Augenmaße, ob die Lehmann'schen Perpendikel bei diesem vorläufigen Punkte d dasselbe Verhältniß bekommen. Ist dies nicht der Fall, so wird man leicht sehen, wo man etwa nachzubel-

sen hat, und ein verbessertes d erhalten, was man ebenso prüft. Ist nun d so berichtigt, daß das Augenmaß nach Schickhard und Lehmann nichts mehr zu verbessern findet, so stecke man die Nadel in das berichtigte d, orientire auf den entferntesten Punkt, und zwar so, daß der Tisch gewiß nicht zu wenig gedreht werde, damit das vielleicht noch erscheinende neue fehlerzeigende Dreieck nach Bohnenberger muthmaßlich auf die andere Seite von d falle. Kommt nun wirklich noch ein fehlerzeigendes Dreieck x'y'z' zum Vorschein, so ziehe man aufs neue die Schickhard'schen Kreise nach dem Augenmaße, was, da x, x' und y, y' nun schon sehr nahe bei einander liegen, den Punkt d auch in der Regel schon ganz richtig gibt. Sollte aber noch ein drittes fehlerzeigendes Dreieck entstehen, so wäre es mit dem nächstvorhergehenden ebenso zu verbinden.

Auflösung 2. Trigonometrisch. 1) Da das Dreieck ABC (Fig. 342) bekannt ist, so kann man irgend drei Stücke, welche dasselbe bestimmen würden, als gegeben ansehen; es sei daher AB = c, BC = a und W. ABC = β gegeben, so sind daraus die Linien AD, BD, CD zu finden. Um diese zu bestimmen, messe man in D die Winkel ADB = δ, BDC = ε. Wäre in dem Dreieck ABD noch der Winkel BAD bekannt, so ließen sich AD und BD, und dann in dem Dreieck BCD wieder CD finden. Man setze daher W. BAD = x, so ist im Viereck ABCD:

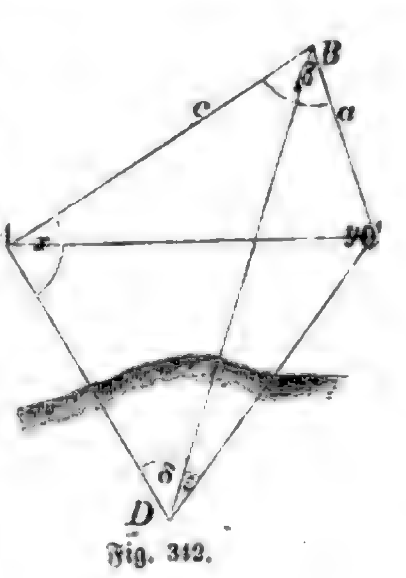


Fig. 342.

$$\text{W. } BCD = 360^\circ - \beta - \delta - \varepsilon - x,$$

oder, wenn man den bekannten Winkel

$$360^\circ - \beta - \delta - \varepsilon = \varphi$$

setzt,

$$BCD = \varphi - x.$$

Nun ist im Dreieck BAD:

$$c : BD = \sin \delta : \sin x,$$

und im Dreieck BCD:

$$BD : a = \sin (\varphi - x) : \sin \varepsilon.$$

$$c : a = \sin \delta \cdot \sin (\varphi - x) : \sin x \cdot \sin \varepsilon.$$

$$\frac{\sin (\varphi - x)}{\sin x} = \frac{c \cdot \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \delta}.$$

Da aber:

$$\frac{\sin (\varphi - x)}{\sin x} = \sin \varphi \cdot \operatorname{cotg} x - \cos \varphi,$$

so ist:

$$1) \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \varphi + \frac{c \cdot \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \delta \cdot \sin \varphi}.$$

Dann ist aber wieder:

$$2)\ AD = \frac{c \cdot \sin(\delta + x)}{\sin \delta}.$$

$$3)\ BD = \frac{c \cdot \sin x}{\sin \delta}.$$

$$4)\ CD = \frac{a \cdot \sin(\varepsilon + \varphi - x)}{\sin \varepsilon}.$$

2) Man setze (Fig. 342) W. BCD = y, so ist:

$$x + y = 360^\circ - (\beta + \delta + \varepsilon),$$

und man hat:

$$1)\ \sin x = \frac{BD \cdot \sin \delta}{c},$$

$$2)\ \sin y = \frac{BD \cdot \sin \varepsilon}{a}.$$

$$\sin x : \sin y = \frac{\sin \delta}{c} : \frac{\sin \varepsilon}{a}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x + y}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{x - y}{2}\right) = a \cdot \sin \delta + c \cdot \sin \varepsilon : a \sin \delta - c \sin \varepsilon.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x - y}{2}\right) = \frac{a \cdot \sin \delta - c \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \delta + c \cdot \sin \varepsilon} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c \cdot \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \delta},$$

so kommt:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x - y}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

$$3)\ \operatorname{tg}\left(\frac{x - y}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi),$$

wodurch x und y selbst gefunden sind. Aus (1) oder (2) findet sich dann:

$$BD = \frac{c \cdot \sin x}{\sin \delta} = \frac{a \cdot \sin y}{\sin \varepsilon},$$

und im Dreieck ABD hat man dann:

$$AD = \frac{c \cdot \sin(x + \delta)}{\sin \delta};$$

im Dreieck BDC:

$$CD = \frac{a \cdot \sin(y + \varepsilon)}{\sin \varepsilon},$$

und im einen oder andern:

$$BD = \frac{c \cdot \sin x}{\sin \delta} = \frac{a \cdot \sin y}{\sin \varepsilon}.$$

Ist hier $\frac{x + y}{2} < 90^\circ$ und $\varphi > 45^\circ$, so wird das zweite Glied

der Gleichung (3) negativ, also auch $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ negativ; da nun $x - y$, als Differenz zweier Viereckswinkel, $< 180°$, so ist $\frac{x-y}{2} < 90°$; $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ kann also nur dadurch negativ werden, daß $x - y$ negativ, d. h. $x < y$ ist.

Ist ferner $\frac{x+y}{2} > 90°$ und $\varphi < 45°$, so wird wieder das zweite Glied der Gleichung (3) negativ, weil $\frac{x+y}{2}$ jetzt stumpf ist; also auch $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ negativ, also wieder $x < y$.

Ist aber $\frac{x+y}{2} = 90°$, so wird $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \infty$, also $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ unbestimmbar. Da dann $x + y = 180°$, so ist ABCD ein Kreisviereck, und

$$\text{W. } \varepsilon = BAC,\ \delta = ACB,$$

also ist dann:

$$a : c = \sin \varepsilon : \sin \delta,$$

d. h.:

$$a \cdot \sin \delta = c \cdot \sin \varepsilon,$$

also:

$$\operatorname{tg} \varphi = 1,$$

folglich ist dann $\varphi = 45°$ und $45° - \varphi = 0$, also auch $\operatorname{tg}(45° - \varphi) = 0$, und (3) gibt für $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ den Werth $0 \cdot \infty$.

Auflösung 3. **Durch rechtwinkelige Coordinaten.** Es seien A, B, C (Fig. 343) die drei bekannten Punkte, D der vierte, zu bestimmende. Die rechtwinkeligen Coordinaten von A, B, C mögen der Reihe nach x', y'; x'', y''; x''', y''', die des unbekannten Punktes D x, y heißen. Durch D ziehe man $DX' \mathrel{\#} OX$ (der Abscissenachse), durch A aber $AX'' \mathrel{\#} OX$, nenne ω', ω'', ω''' die Winkel, welche die Gesichtslinien nach A, B, C in D mit DX' machen, setze:

Fig. 343.

$$\text{W. } BAX'' = N'',\ CAX'' = N''',$$
$$AB = n'',\ AC = n''';$$

so ist:

$$1)\ \begin{cases} y'' - y' = n'' \cdot \sin N''. \\ x'' - x' = n'' \cdot \cos N''. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y''' - y' = n''' \cdot \sin N'''. \\ x''' - x' = n''' \cdot \cos N'''. \end{cases}$$

Nun ist: $ABD = BAA' - BDA,$

und $ACD = CAA' - CDA.$

Setzt man $\omega'' - \omega' = o''$ und $\omega''' - \omega' = o'''$, so ist:

$$ABD = (N'' - \omega') - o'' = (N'' - o'') - \omega',$$
$$ACD = (N''' - \omega') - o''' = (N''' - o''') - \omega'.$$

Auch hat man:

$$AB \cdot \sin ABD = AD \cdot \sin ADB,$$

und $AC \cdot \sin ACD = AD \cdot \sin ADC.$

Setzt man hierin noch $AC = r'$, so ist:

$$3)\ \begin{cases} n'' \cdot \sin (N'' - o'' - \omega') = r' \cdot \sin o'', \\ n''' \cdot \sin (N''' - o''' - \omega') = r' \cdot \sin o''', \end{cases}$$

also: $$\frac{\sin (N''' - o''' - \omega')}{\sin (N'' - o'' - \omega')} = \frac{n''}{\sin o''} \cdot \frac{\sin o'''}{n'''},$$

oder, wenn $N'' - o'' = Q''$, $N''' - o''' = Q'''$ gesetzt wird:

$$4)\ \operatorname{tg} \frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} : \operatorname{tg} \frac{Q''' - Q''}{2}$$
$$= n'' \cdot \sin o''' + n''' \cdot \sin o'' : n'' \cdot \sin o''' - n''' \cdot \sin o''.$$

Die zwei letzten Glieder dieser Proportion lassen sich auch so schreiben:

$$\frac{1 + \dfrac{n''' \cdot \sin o'''}{n'' \cdot \sin o''}}{1 - \dfrac{n''' \cdot \sin o'''}{n'' \cdot \sin o''}}.$$

Führt man nun einen Hülfswinkel φ so ein, daß

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n''' \sin o'''}{n'' \sin o''},$$

so geben diese beiden Glieder:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi).$$

Die Proportion (4) nimmt somit folgende Gestalt an:

$$5)\ \operatorname{tg} \frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} : \operatorname{tg} \frac{Q''' - Q''}{2} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi) : 1,$$

woraus dann folgt:

$$6)\ \operatorname{tg} \frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} = \operatorname{tg} \frac{Q''' - Q''}{2} \cdot \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi).$$

Dann findet sich r' aus (3), welches jetzt die Gestalt:

$$n'' \cdot \sin (Q'' - \omega') = r' \cdot \sin o'',$$

und $n''' \cdot \sin (Q''' - \omega') = r' \cdot \sin o'''$

annimmt. Endlich findet man x und y aus:

$$7) \begin{cases} x' - x = r' \cdot \cos \omega', \\ y' - y = r' \cdot \sin \omega'. \end{cases}$$

Wir stellen nun noch die bei der Zahlenrechnung zu beachtenden Formeln übersichtlich zusammen:

$$\operatorname{tg} N'' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}; \quad \operatorname{tg} N''' = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}.$$

$$n'' = \frac{y'' - y'}{\sin N''} = \frac{x'' - x'}{\cos N''}; \quad n''' = \frac{y''' - y'}{\sin N'''} = \frac{x''' - x'}{\cos N'''}.$$

$$Q'' = N'' - o''; \quad Q''' = N''' - o'''.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n'''}{\sin o'''} \cdot \frac{\sin o''}{n''}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} = \operatorname{tg} \frac{Q''' - Q''}{2} \cdot \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi).$$

$$r' = \frac{n'' \cdot \sin (Q'' - \omega')}{\sin o''} = \frac{n''' \cdot \sin (Q''' - \omega')}{\sin o'''}.$$

$$x = x' - r' \cdot \cos \omega'; \quad y = y' - r' \cdot \sin \omega'.$$

Die Berechnung eines der Wirklichkeit entnommenen Zahlenbeispiels wird zur weitern Aufklärung dieses wichtigen Gegenstandes dienen. Die drei gegebenen Punkte sind:

A) St.-Petri zu Rostock,

B) Schorrentin,

C) Demmin.

Die Station der Messungen, D, ist Hartberg. Alle Entfernungen sind in Toisen ausgedrückt. Das Winkelverzeichniß liefert:

$$o'' = 82^\circ\ 24'\ 40''; \quad o''' = 107^\circ\ 47'\ 16'',$$

und das Coordinatenverzeichniß:

$y' = +\ 20450{,}243.$ $y'' = -\ 443{,}071.$ $y''' = -\ 9357{,}493.$

$x' = +\ 179{,}108.$ $x'' = +\ 13470{,}381.$ $x''' = +\ 10723{,}543.$

Daraus erhält man folgende Rechnung:

y''	$= -\ 443{,}071$	y'''	$= -\ 9357{,}493$
y'	$= +\ 20450{,}243$	y'	$= +\ 20450{,}243$
$y'' - y'$	$= -\ 20893{,}314$	$y''' - y'$	$= -\ 29807{,}736$
x''	$= +\ 13470{,}381$	x'''	$= +\ 10723{,}543$
x'	$= +\ 179{,}108$	x'	$= +\ 179{,}108$
$x'' - x'$	$= +\ 13291{,}273.$	$x''' - x'$	$= +\ 10544{,}435$

$\log (y'' - y') = 4{,}3200073\ (-)$	$\log (y''' - y') = 4{,}4743290\ (-)$
$\log (x'' - x') = 4{,}1235666$	$\log (x''' - x') = 4{,}0230233$
$\log \operatorname{tg} N'' = 0{,}1964407$	$\log \operatorname{tg} N''' = 0{,}4513057\ (-)$
$N'' = 360^\circ - 57^\circ\ 32'\ 15'',1$	$N''' = 360^\circ - 70^\circ\ 31''\ 7'',9$
$= 302^\circ\ 27'\ 44'',9.$	$= 289^\circ\ 28'\ 52'',1.$

$$\log \sin N'' = 9{,}9262102\ (-)$$
$$\log \cos N'' = 9{,}7297697$$
$$\log n'' = \left.\begin{array}{l}4{,}3937971\\4{,}3937969\end{array}\right\}$$
$$\log \sin o'' = 9{,}9961793$$
$$\log \frac{\sin o''}{n''} = \left.\begin{array}{l}5{,}6023823\\4{,}5212063\end{array}\right\}$$
$$\log tg\, \varphi = 0{,}1235886$$
$$\varphi = 53^\circ\ 2'\ 40'',4$$
$$45^\circ + \varphi = 98\ \ 2\ \ 40{,}4$$
$$N'' = 302\ \ 27\ \ 44{,}9$$
$$o'' = 82\ \ 24\ \ 40$$
$$Q'' = 220\ \ 3\ \ 4{,}9$$
$$Q''' = 181\ \ 41\ \ 36{,}1$$
$$Q''' + Q'' = 401\ \ 44\ \ 41{,}0$$
$$\frac{Q''' + Q''}{2} = 200\ \ 52\ \ 20{,}5$$
$$\log tg \frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} = 0{,}3911156$$

$$\log \sin N''' = 9{,}9743971\ (-)$$
$$\log \cos N''' = 9{,}5230912.$$
$$\log n''' = \left.\begin{array}{l}4{,}4999319\\4{,}4999321\end{array}\right\}$$
$$\log \sin o''' = 9{,}9787257.$$
$$\log \frac{n'''}{\sin o'''} = 4{,}5212063.$$
$$N''' = 289^\circ\ 28'\ 52'',1$$
$$o''' = 107\ \ 47\ \ 16$$
$$Q''' = 181\ \ 41\ \ 36{,}1$$
$$Q'' = 220\ \ 3\ \ 4{,}9$$
$$Q''' - Q'' = 321\ \ 38\ \ 31{,}2$$
$$\frac{Q''' - Q''}{2} = 160\ \ 49\ \ 15{,}6$$
$$\log tg \frac{Q''' - Q''}{2} = 9{,}5413620\ (-)$$

$$\frac{Q''' + Q'' - 2\omega'}{2} = 67^\circ\ 53'\ 10'',9$$
$$\omega' = 132^\circ\ 59'\ 9'',6$$
$$Q'' - \omega' = 87\ \ 3'\ 55{,}3$$
$$Q''' - \omega' = 48\ \ 42\ \ 26{,}5.$$

$$\log n'' = 4{,}3937970$$
$$\log \sin (Q'' - \omega') = 9{,}9994301$$
$$DE \cdot \log \sin o'' = 0{,}0038207$$
$$\log r' = 4{,}3970478$$
$$\log \cos \omega' = 9{,}8336695\ (-)$$
$$\log r' \cdot \cos \omega' = 4{,}2307173\ (-)$$
$$r' \cos \omega' = -\ 17010{,}51$$
$$x' = 179{,}108$$
$$x' - r' \cdot \cos \omega' = +\ 17189{,}618 = x;$$
$$y'' - y = -\ 2642{,}843$$
$$x'' - x = -\ 3719{,}237.$$
$$\log (y'' - y) = 3{,}4220714\ (-)$$
$$\log (x'' - x) = 3{,}5704538\ (-)$$
$$\log tg\, \omega'' = 9{,}8516176$$
$$\omega'' = 215^\circ\ 23'\ 49'',67$$

$$\log n''' = 4{,}4999320$$
$$\log \sin (Q''' - \omega') = 9{,}8758416$$
$$DE \cdot \log \sin o''' = 0{,}0212743$$
$$\log r' = 4{,}3970479$$
$$\log \sin \omega' = 9{,}8642264$$
$$\log r' \cdot \sin \omega' = 4{,}2612743$$
$$r' \cdot \sin \omega' = 18250{,}471.$$
$$y' = 20450{,}243$$
$$y' - r' \cdot \sin \omega' = +\ 2199{,}772 = y$$
$$y''' - y = -\ 11557{,}265$$
$$x''' - x = -\ 6466{,}075.$$
$$\log (y''' - y) = 4{,}0628551\ (-)$$
$$\log (x''' - x) = 3{,}8106407\ (-)$$
$$\log tg\, \omega''' = 0{,}2522144.$$
$$\omega''' = 240^\circ\ 46'\ 25'',69$$

$\omega' = 132^\circ\, 59'\, 9'',6$ $\qquad\qquad$ $\omega' = 132^\circ\, 59'\, 9'',6$

$o'' = 82 \quad 24 \quad 40{,}07.$ $\qquad\qquad$ $o''' = 107 \quad 47 \quad 16{,}09.$

Auflösung 4. Geometrisch. Ist ab (Fig. 344) die Horizontalprojection von AB, so beschreibe man über ab als Sehne einen Kreis abd, der den bekannten Winkel abd = δ als Peripheriewinkel faßt; ist ferner bc die Horizontalprojection von BC, so beschreibe man über bc als Sehne einen Kreis, der den bekannten Winkel bdc = ε als Peripheriewinkel faßt. Diese beiden Kreise schneiden sich in den Punkten b und d, von denen der letztere der gesuchte ist.

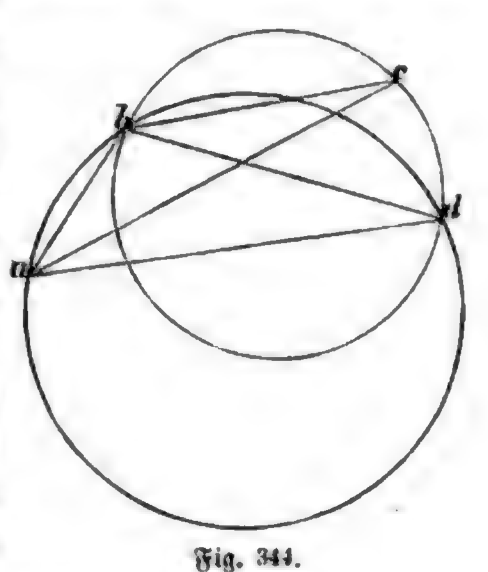


Fig. 344.

Denn die Kreislinie adb ist der Ort des Scheitels des Winkels adb, die Kreislinie bcd der Ort des Scheitels des Winkels bdc; ihr Durchschnitt d also der gemeinsame Ort beider Scheitel.

§. 295. In den Auflösungen der Aufgabe des vorigen Paragraphen ist der allgemeine Fall vorausgesetzt worden, daß die Punkte B, D auf verschiedenen Seiten der Linie AC liegen, also W. ABC < 180° sei. Wir wollen jetzt noch einige besondere Fälle derselben Aufgabe in Betracht ziehen.

Fig. 345.

1) Liegt B (Fig. 345) in der Geraden AC, so ist W. ABC = 180°; ist dann W. ADC oder δ + ε spitz, so ist φ (= 360° − β − δ − ε) jetzt = 180° − (δ + ε) stumpf und

$$\cot g\ \varphi = -\cot g\ (\delta + \varepsilon)$$

negativ, während sin φ positiv bleibt.

2) Liegen B, D auf derselben Seite von AC (Fig. 346), so ist β > 180°; ist daher der hohle Winkel ABC gegeben, so wird man β = 360° − ABC nehmen müssen.

Fig. 346.

3) Liegt D innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 347), so wird W. D erhaben und = 360° − ADC.

4) Liegt D in der Peripherie des durch A, B, C gehenden Kreises (Fig. 348), so ist B + D oder β + δ + ε = 180°, also auch φ = 180°, cotg φ = ∞, also unbestimmt, wie dies auch aus geometrischen Gründen einleuchtet, da der Punkt D unendlich viele verschiedene Lagen

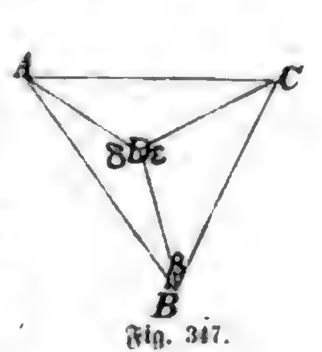


Fig. 347.

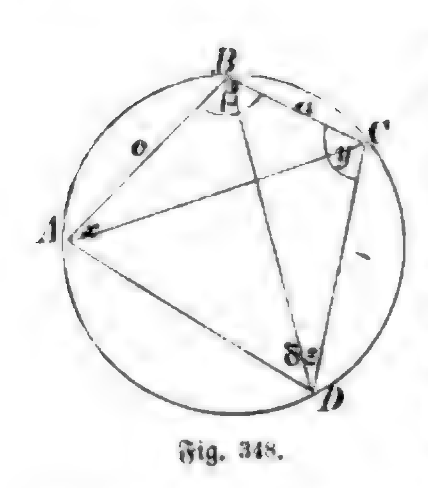


Fig. 348.

in der Kreisperipherie annehmen kann, ohne daß sich die W. δ und ε verändern.

Anmerkung. Mittels der Aufgabe des §. 294 kann man, wenn wenigstens schon drei Punkte in die Karte eingetragen sind, nach und nach beliebig viele andere dazu eintragen, ohne daß man nöthig hätte, sich nach den bekannten Punkten A, B, C hin zu begeben; sie gehört daher zu den wichtigsten Aufgaben der Feldmeßkunst. Willibrod Snellius machte ihre Lösung schon im Jahr 1614 bekannt, während der französische Mathematiker Pothenot erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts eine Lösung davon gegeben hat. Dessenungeachtet heißt sie nach letzterm das Pothenot'sche Problem. Im Laufe der Zeit haben sich die größten Mathematiker mit dieser Aufgabe beschäftigt, wovon wir nur Lambert, Delambre, Tobias Mayer, Langsdorff, Kästner erwähnen wollen.

§. 296. **Aufgabe.** Drei Punkte A, B, C sind der Lage nach bekannt; man soll die Lage zweier anderer Punkte D und E unter der Voraussetzung bestimmen, daß von D aus nur die Punkte A, C und E, von E aus nur die Punkte B, C und D sichtbar seien, und daß keine Linie gemessen werden könne.

Fig. 349.

Auflösung 1. Da die Lage von A, B, C (Fig. 349) bekannt ist, so kann man BC = a, AC = b und W. ACB = γ als gegeben ansehen. Man messe in D noch die Winkel δ und ψ, in E die Winkel ε und λ. Im Fünfecke ACBED betragen sämmtliche Winkel 6R = 540°, folglich ist: $\alpha + \beta = 540 - (\gamma + \delta + \psi + \varepsilon + \lambda)$. Setzen wir die bekannte Größe von $\alpha + \beta = \varphi$, so ist $\beta = \varphi - \alpha$, und aus den Dreiecken ACD, DCE und ECB erhält man folgende Proportionen:

$$b : CD = \sin\delta : \sin\alpha$$
$$CD : CE = \sin\lambda : \sin\psi$$
$$CE : a = \sin(\varphi - \alpha) : \sin\varepsilon$$
$$b : a = \sin\delta \cdot \sin\lambda \cdot \sin(\varphi - \alpha) : \sin\alpha \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon.$$
$$a \cdot \sin\delta \cdot \sin\lambda \cdot \sin(\varphi - \alpha) = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon$$
$$\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon}{a \cdot \sin\delta \cdot \sin\lambda}.$$
$$\frac{\sin\varphi \cdot \cos\alpha - \cos\varphi \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon}{a \cdot \sin\delta \cdot \sin\lambda}.$$
$$\sin\varphi \cdot \operatorname{cotg}\alpha - \cos\varphi = \frac{b \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon}{a \cdot \sin\delta \cdot \sin\lambda}.$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\varphi + \frac{b \cdot \sin\psi \cdot \sin\varepsilon}{a \cdot \sin\delta \cdot \sin\lambda \quad \sin\varphi}.$$

Digitized by Google

Hiernach findet sich dann:

$$AD = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \delta)}{\sin \delta}; \quad CD = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \delta};$$

$$CE = \frac{a \cdot \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varepsilon}; \quad BE = \frac{a \cdot \sin(\varepsilon + \varphi - \alpha)}{\sin \varepsilon}.$$

Auflösung 2. Man kann auch auf folgende Weise verfahren:

$$1)\ CD : CE = \sin \lambda : \sin \psi,$$
$$2)\ b : CD = \sin \delta : \sin \alpha,$$
$$3)\ a : CE = \sin \varepsilon : \sin \beta.$$

Aus (2) folgt:

$$CD = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \delta}.$$

Aus (3) folgt:

$$CE = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \varepsilon}.$$

Diese Werthe in (1) gesetzt:

$$4)\ \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \delta} : \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \varepsilon} = \sin \lambda : \sin \psi.$$

$$\alpha + \beta = 540^\circ - (\gamma + \delta + \varepsilon + \psi + \lambda) = \varphi.$$
$$\beta = \varphi - \alpha.$$

Dies in (4) gesetzt und die Producte genommen, liefert:

$$\frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \psi}{\sin \delta} = \frac{a \cdot \sin(\varphi - \alpha) \cdot \sin \lambda}{\sin \varepsilon},$$

oder: $$5)\ \frac{a \cdot \sin \delta \cdot \sin \lambda}{b \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Setze: $$6)\ \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = \operatorname{tg} x,$$

so ist: $$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha} = \operatorname{tg} x.$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha}$$
$$= \frac{\sin \varphi \cos \alpha - (1 + \cos \varphi) \sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha}.$$

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{\sin \varphi \cos \alpha + (1 - \cos \varphi) \cdot \sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha}.$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg}(45^\circ + x)$$
$$= \frac{\sin \varphi \cos \alpha - (1 + \cos \varphi) \cdot \sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha + (1 - \cos \varphi) \cdot \sin \alpha}$$
$$= \frac{\sin \varphi - (1 + \cos \varphi) \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \operatorname{tg} \alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} - \operatorname{tg} \alpha}{\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2 \sin {}^1\!/_2 \varphi \cos {}^1\!/_2 \varphi}{2 \cos {}^1\!/_2 \varphi^2} = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi$$

und $$\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2 \sin {}^1\!/_2 \varphi^2}{2 \cos {}^1\!/_2 \varphi^2} = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi^2,$$

also: $$\operatorname{cotg}(45^\circ + x) = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi + \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi (1 + \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha)}$$

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cdot \operatorname{cotg}(45^\circ + x) = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin {}^1\!/_2 \varphi \cdot \cos \alpha - \cos {}^1\!/_2 \varphi \sin \alpha}{\cos {}^1\!/_2 \varphi \cdot \cos \alpha + \sin {}^1\!/_2 \varphi \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin ({}^1\!/_2 \varphi - \alpha)}{\cos ({}^1\!/_2 \varphi - \alpha)} = \operatorname{tg} ({}^1\!/_2 \varphi - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} ({}^1\!/_2 \varphi - \alpha) = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \varphi \cdot \operatorname{cotg}(45^\circ + x);$$

während x gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \cdot \sin \delta \cdot \sin \lambda}{b \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \psi}.$$

Wäre z. B. gegeben: $a = 137{,}76$, $b = 98{,}43$, $\gamma = 133^\circ\ 51'\ 18''$, $\delta = 24^\circ\ 16'\ 30''$, $\psi = 62^\circ\ 37'\ 15''$, $\lambda = 98^\circ\ 27'\ 10''$, $\varepsilon = 41^\circ\ 36'\ 25''$, so hätte man folgende Rechnung:

log a =	2,1391231	log b =	1,9931275
log sin δ =	9,6139651	log sin ε =	9,8221791
log sin λ =	9,9952566	log sin ψ =	9,9484045
	21,7483448		21,7637111
	21,7637111		
log tg x =	9,9846337	γ =	133° 51′ 18″
x =	43° 59′ 11″	δ =	24 16 30
45° + x =	88 59 11	ψ =	62 37 15
log cotg (45° + x) =	8,2477939	λ =	98 27 10
tg ½ φ =	12,1503635	ε =	41 36 25
log tg (½ φ — α) =	10,3981574		360 48 38

$\frac{1}{2}\varphi - \alpha$ =	68° 12′ 30″,5		539 59 60
$\frac{1}{2}\varphi$ =	89 35 41		360 48 38
α =	21 13 10,5	φ =	179 11 22
δ =	24 16 30	$\frac{1}{2}\varphi$ =	89 35 41
$\alpha + \delta$ =	45 29 40,5		
log sin $(\alpha + \delta)$ =	9,8532017	log sin α =	9,5586404
log b =	1,9931275	log b =	1,9931275
	11,8463292		11,5517679
log sin δ =	9,6139651	log sin δ =	9,6139651
log AD =	2,2323641	log CD =	1,9378028
AD =	170,7513	CD =	86,65582
log a =	2,1391231		
log sin $(\varphi - \alpha)$ =	9,5741404		
	11,7132635	φ =	179° 11′ 22″
log sin ε =	9,8221791	α =	21 13 10,5
log CE =	1,8910844	$\varphi - \alpha$ =	157 58 11,5
CE =	77,8188.	$\pi - (\varphi - \alpha)$ =	22 1 48,5.

Die beiden Punkte D, E lassen sich auch durch Construction bestimmen. Ueber AC als Sehne beschreibe man einen Kreisbogen ACGD (Fig. 350), welcher den W. δ, und über CB einen Kreisbogen, welcher den W. ε als Peripheriewinkel faßt. Dann schneide man von C aus den Bogen CG = 2ψ, von B aus den Bogen BCH = $2(\lambda + \varepsilon)$ ab; durch die so bestimmten Punkte G, H ziehe man die Gerade GH, welche, verlängert, die Kreise in den gesuchten Punkten D, E schneiden wird.

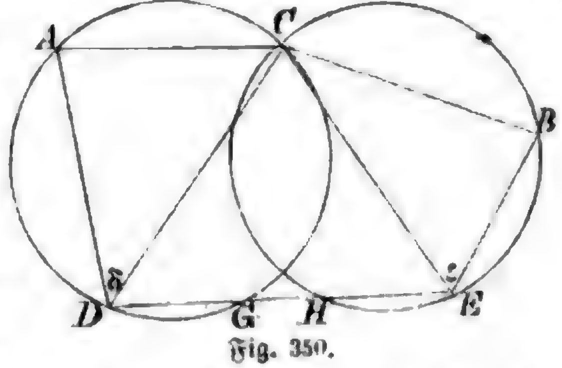


Fig. 350.

Da nämlich Bogen CG = 2ψ, so ist der Peripheriewinkel CDG = ψ, und da Bogen BCH = $2(\lambda + \varepsilon)$, so ist der Peripheriewinkel BEH = $\lambda + \varepsilon$. Aus der Construction der Kreise folgt überdies ADC = δ und BCE = ε.

B. Aufnahme ganzer Figuren.

Eigentliches Feldmessen.

§. 297. Bei der Aufnahme einer Figur kann man, je nach Umständen, folgende verschiedene Methoden in Anwendung bringen.

1) Die Umfangs- oder Perimetermethode. Ein geradliniges nEck

ABCDEF (Fig. 351) ist bekanntlich bestimmt durch 2n — 3 von einander unabhängige Stücke, worunter wenigstens n — 2 Seiten sind. Mißt man daher alle Seiten und Winkel eines Vielecks, mit Ausnahme einer Seite und der zwei anliegenden Winkel, oder zweier Seiten und des von ihnen eingeschlossenen Winkels, so muß sich das Vieleck daraus construiren oder berechnen lassen. Wegen der unvermeidlichen Fehler aber, die sich in jede praktisch ausgeführte Messung einschleichen, wird meistens der Fall eintreten, daß nicht blos die so entworfene Figur eine andere Gestalt bekommt, als die im Felde hat, sondern daß auch die letzte Seite sich nicht genau an die erste anschließt; in diesem Falle sagt man: die Figur schließe sich nicht. Das Resultat der Winkelmessung läßt sich dadurch prüfen und erforderlichenfalls corrigiren, daß man alle Winkel der Figur mißt, und zusieht, ob ihre Summe wirklich, wie es sein soll, (2n — 4) R. beträgt. Genügt dies noch nicht, so messe man noch einige Diagonalwinkel und bestimme so die Richtung der Diagonalen, um zu sehen, ob sie nach dieser Bestimmung in der That durch den entsprechenden Eckpunkt der Figur gehen.

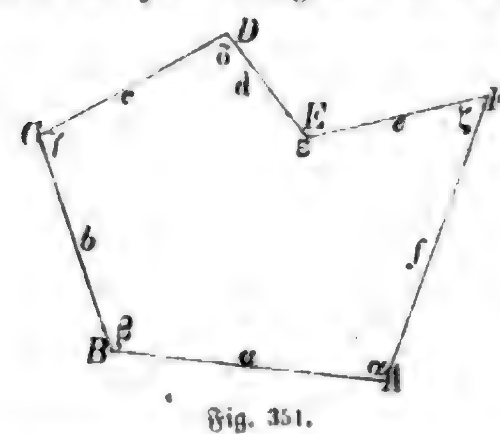


Fig. 351.

Wendet man bei der Umfangsmethode den Meßtisch an, so mißt man nur eine Seite direct mit der Kette oder Meßstäben, und bestimmt alles Uebrige mittels des Meßtisches auf gewöhnliche Weise. Es versteht sich von selbst, daß man auch den Winkelmesser anwenden kann, indem man eine Seite und so viele Diagonal- und Seitenwinkel mißt, daß sie nicht blos zur Bestimmung des Vielecks ausreichen, sondern noch Elemente zur Prüfung des Ganzen liefern. Je nach dem geforderten Grade der Genauigkeit wird man sich des Theodoliten oder blos der Boussole bedienen.

2) Ein zweites Verfahren, das man zweckmäßig die Diagonalmethode nennen könnte, das aber irrthümlich auch wol, wie das nächstfolgende, Triangulirmethode genannt wird, besteht darin, daß man alle Seiten und alle von einer Ecke des aufzunehmenden Vielecks ausgehenden Diagonalen mißt. Da diese zusammen auch 2n — 3 Stücke ausmachen, so ist das Vieleck durch sie ebenfalls bestimmt. Aber da durch die vielen Linienmessungen sich große Fehler einschleichen können, wird man zur Controle noch einige andere Diagonalen messen müssen, z. B. (Fig. 352) außer den von A auslaufenden, noch etwa die punktirt gezeichneten, um

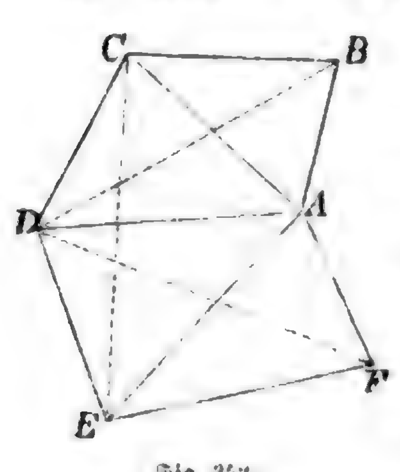


Fig. 352.

nachzusehen, ob die gefundenen Längen dieser letztern auch wirklich zwischen die durch die ersten Messungen bestimmten Ecken passen; im entgegengesetzten Falle wäre das Vieleck auf dem Papier kein treues Bild der Figur im Felde.

3) Die Dreiecks- oder Triangulirmethode. Man mißt eine einzige schicklich gelegene gerade Linie AB (Fig. 353), die Standlinie oder Basis, zerlegt dann die ganze aufzunehmende Fläche in sich an einander anschließende Dreiecke, das Netz oder Dreiecksnetz; die Eckpunkte dieser Dreiecke werden dann, soweit es bequem angeht, von der Basis aus entweder mit dem Meßtische oder durch Winkelmessung und nachfolgende Berechnung oder Construction der Dreiecke aufgenommen; wo dies, wegen zu großer Entfernung nicht mehr möglich ist, benutzt man eine Seite eines schon aufgenommenen Dreiecks als neue Basis, deren Länge also schon aus der Berechnung oder Construction bekannt ist. Wird das Netz mit dem Meßtische aufgenommen, so heißt es ein geometrisches, bei der Winkelmessung dagegen ein trigonometrisches, und das Verfahren heißt demgemäß ein geometrisches oder trigonometrisches Trianguliren.

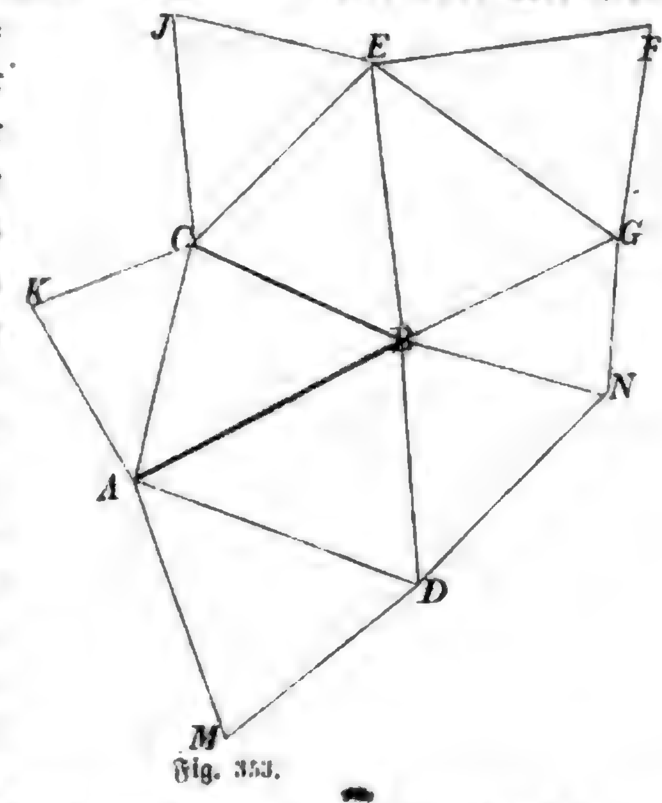


Fig. 353.

Diese Triangulirmethode kommt bei der Aufnahme aller größern Länderstrecken in Anwendung. Da auf der Genauigkeit, mit welcher die Basis gemessen wird, die Richtigkeit der ganzen Aufnahme hauptsächlich beruht, so wird man hierauf die größte Sorgfalt zu verwenden haben. Stellt sich im Verlaufe der Messung das Bedürfniß einer zweiten Basis heraus, so wird man solche Punkte, die etwa dazu benutzt werden möchten, mit ganz besonderer Sorgfalt bestimmen.

Wenn sich zwei Linien unter sehr schiefen Winkeln schneiden, so läßt sich bekanntlich der genaue Durchschnittspunkt sehr schwer bestimmen, dagegen dies leicht ist, wenn sich die Linien unter Winkeln schneiden, welche sich dem rechten nähern; bei Winkeln von 60° und selbst von 45° geht dies auch noch recht gut an, bei allen kleinern Winkeln aber wird der Durchschnitt zweifelhaft. Man muß daher bei der Anlage des Dreiecksnetzes behufs einer Meßtischaufnahme stets darauf sehen, jedes Dreieck und jeden Punkt durch eine solche Basis zu bestimmen, durch die keine sehr kleinen Winkel entstehen, also,

26*

sobald dies der Fall wäre, aus einer neuen Basis arbeiten. Sehr schiefe Winkel beeinträchtigen zwar die Winkelmessung nicht, haben also von dieser Seite für die Aufnahme mittels des Winkelmessers keinen Nachtheil. Aber, wie §. 52—54 gezeigt ist, geben die trigonometrischen Tafeln bei kleinen Winkeln in gewissen Fällen keine sichern Resultate; man wird daher auch bei diesem Verfahren darauf zu sehen haben, daß stets nur Dreiecke von geeigneter Form entstehen, und namentlich das beachten, was §. 278—281 über diesen Punkt beigebracht ist. Dreiecke von geeigneter Form für die Meßtischaufnahme oder Berechnung heißen in der Praxis gute Dreiecke.

4) Die Coordinatenmethode besteht darin, daß man im Felde, wie auf dem Papier, ein rechtwinkeliges Achsensystem zu Grunde legt (Fig. 354), wo XX′, YY′ die beiden rechtwinkeligen, sich im Anfangspunkte O schneidenden Achsen bezeichnen. Bei bloßen Meßtischaufnahmen bestimmt man von jedem aufzunehmenden Punkte die Abscisse und Ordinate in Bezug auf dieses Achsensystem und trägt sie nach dem verjüngten Maßstabe in die Zeichnung ein; bei dem rechnenden Verfahren aber

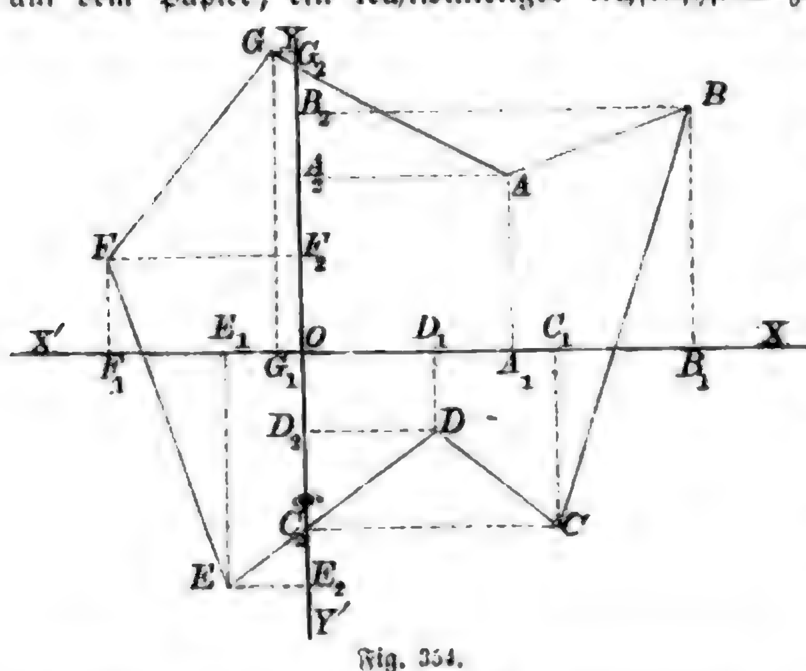


Fig. 354.

berechnet man nach §. 48 die Coordinaten jedes folgenden Punktes aus denen der schon bestimmten Punkte und der Größe gewisser gemessener Winkel. Im letztern Falle denkt man sich die durch zwei schon bestimmte Punkte gehende Gerade als Abscissenachse, den einen dieser Punkte als Anfangspunkt, und nimmt dann gar keine Ordinatenachse an, wie solches die Fig. 355 für das Polygon ABCDE darstellt.

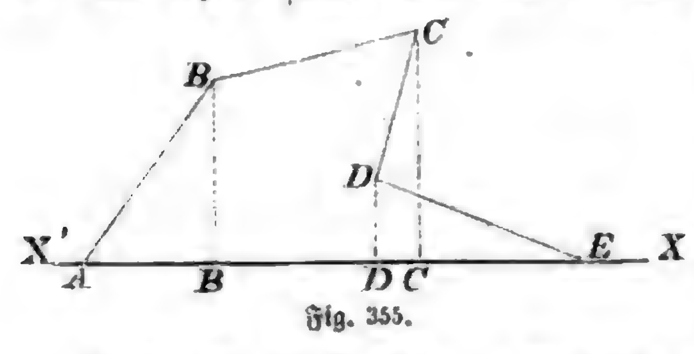


Fig. 355.

5) Die Polarmethode. Man nimmt innerhalb oder außerhalb der aufzunehmenden Figur einen Punkt O (Fig. 356) an, zieht Gerade nach allen Eckpunkten der Figur OA, OB, OC ....., mißt diese, sowie die Winkel α, β, γ ....., welche je zwei derselben mit einander machen, um daraus die Winkel zu berechnen, welche jede dieser Geraden mit einer unter

ihnen, die zur Achse angenommen, macht. Die einzelnen Linien und Winkel erhalten hier dieselben Benennungen, die im §. 35 schon angegeben sind. Wenn ein Pol zur Aufnahme der Flur nicht ausreicht, so kann man deren zwei oder mehrere annehmen, nur muß deren gegenseitige Lage genau bestimmt und in die Karte eingetragen werden. Für das rechnende Verfahren wird man indeß jeden später angenommenen Pol auf den ersten zurückbeziehen.

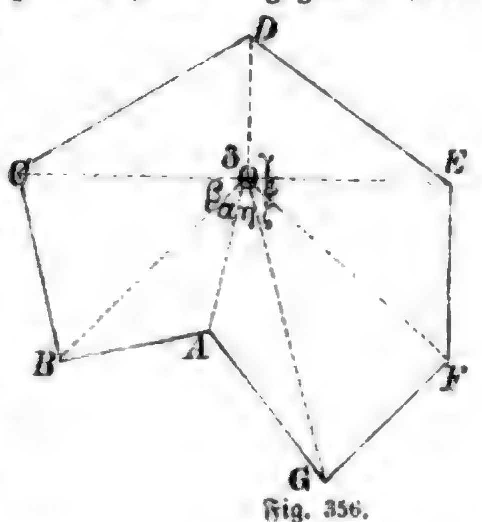


Fig. 356.

§. 298. **Aufgabe.** Die Mittagslinie eines gegebenen Punktes der Erde zu bestimmen.

Auflösung. Die Aufgabe kann mittelst der Sonne oder auch mittels der Circumpolarsterne*) gelöst werden. Die Sonne sowol wie die Sterne werden vor und nach ihrer Culmination, d. h. vor und nach ihrem Durchgange durch den Meridian des Ortes, gleiche Höhen über dem Horizonte, oder gleiche Zenithdistanzen erreichen; so daß jeder Höhe des Gestirns vor der Culmination eine genau gleiche Höhe nach der Culmination entspricht; man nennt sie correspondirende Höhen. Der Meridian halbirt nun stets den Winkel, welchen die beiden Verticalkreise, in denen das Gestirn gleiche Höhe hatte, mit einander bilden.

Man messe also einige Zeit vor der Culmination die Höhe der Sonne oder eines Sterns; dann stelle man das Fernrohr des Höhenwinkelmessers in der Verticalebene fest, drehe aber den Verticalkreis nach der Culmination so weit herum, bis der Sonnenrand wieder vom Fadenkreuz gedeckt wird (während das Fernrohr noch denselben Höhenwinkel anzeigt). Hat nun der Winkelmesser zugleich einen Horizontalkreis, so liest man bei beiden Beobachtungen den Azimuthalwinkel ab; ist der erste μ, der letzte ν, so ist das Azimuth der Mitte des gemessenen Bogens $= \frac{1}{2}(\mu + \nu)$; man stelle also den Verticalkreis auf dieses Azimuth, gebe dem Fernrohr die horizontale Richtung und stecke in der Gesichtslinie des Fernrohrs ein Signal aus, so ist die durch den Ort der Beobachtung und dieses Signal gehende Gerade die Mittagslinie des Orts.

Muß man sich bei der Bestimmung der Mittagslinie mit einem bloßen Quadranten ohne Azimuthalkreis behelfen, so stecke man in der Richtung jeder der beiden Höhenbeobachtungen Signale aus und halbire den dazwischen enthaltenen Winkel durch eine Construction im Felde, etwa durch Halbirung der

*) Sterne, welche für einen bestimmten Ort der Erde nie untergehen, weil ihr Polabstand kleiner ist als die Polhöhe dieses Orts, heißen Circumpolarsterne.

Sehne zwischen den Endpunkten gleichgemachter Schenkel, führe aber die ganze Operation mit der möglichsten Genauigkeit aus. Die so gefundene Richtung ist dann ebenfalls die Mittagslinie.

Um ein genaueres Resultat zu erzielen wird man die Operation mehreremal wiederholen, also mehrere Sonnenhöhen vor der Culmination beobachten, sie ablesen und aufzeichnen, dann die ihnen correspondirenden nach der Culmination aufsuchen, zu jeder Höhe aber auch das Azimuth aufmerken (wenn man mit dem Theodoliten arbeitet), oder, wenn man mit dem Quadranten arbeitet, die entsprechende Visirlinie (eigentlich Verticalebene) abstecken, in beiden Fällen mit jedem zusammengehörigen Beobachtungspaar verfahren wie oben beschrieben, und aus den etwa abweichenden Richtungen der gefundenen Mittagslinien eine mittlere Richtung finden.

Es wird bei diesem Verfahren vorausgesetzt, daß das Gestirn, das man dabei benutzt, von der einen Beobachtung zur andern seine Declination (Abweichung vom Aequator) nicht ändere; bei den Sternen trifft dies zu; aber die Sonne verändert ihre Abweichung täglich und selbst stündlich. Die geeignetste Zeit zu diesen Sonnenbeobachtungen sind daher die Solstitien (der längste und kürzeste Tag des Jahres), weil an diesen die Aenderung der Declination der Sonne am kleinsten ist.

Will man die so bestimmte und im Felde bezeichnete Mittagslinie in die Karte einer aufgenommenen Figur übertragen, so nehme man zwei Punkte der abgesteckten Mittagslinie nach derselben Methode auf, nach welcher die übrige Aufnahme der Karte beschafft worden, und ziehe durch diese Punkte eine Gerade.

§. 299. **Aufgabe.** Eine kleinere Flur aufzunehmen.

Auflösung. 1) Vor allem umgehe man das ganze aufzunehmende Stück, um eine genaue Kenntniß von allen seinen Theilen und der Terrainbeschaffenheit zu erlangen; man wird dadurch erfahren, wo sich der Meßtisch oder Winkelmesser aufstellen läßt oder nicht, welche Linien direct gemessen werden können und welche eine Messung nicht zulassen, weil sie vielleicht sumpfig, oder allzu uneben sind u. s. w. Dieses Geschäft heißt das Recognosciren des Terrains. Es setzt den Feldmesser in Stand, zu beurtheilen, welche Methode der Aufnahme im vorliegenden Falle die geeignetste sei, oder ob er vielleicht genöthigt sei, mehrere Methoden mit einander zu verbinden, was bei kleinern Fluren selten der Fall ist, wenn man die Bestimmung der Einzelheiten im Innern der Figur nicht in Anschlag bringt.

2) Je nach dem Zwecke der Aufnahme bestimmt man dann den zu Grunde zu legenden Maßstab, worüber die §§. 108—110 das Nöthige lehren, verschafft sich eine ungefähre Kenntniß von der größten Dimension des Grundstücks, etwa durch Abschreiten, um danach die Größe des Papiers bestimmen

zu können, oder zu beurtheilen, ob die ganze Flur auf ein Meßtischblatt gebracht werden könne, oder aber auf zwei oder mehrere vertheilt werden müsse.

3) Nun wähle man unter den im §. 297 beschriebenen Methoden diejenige, welche im vorliegenden Falle, unter Berücksichtigung aller Umstände, für die Aufnahme der Flurgrenzen als die zweckmäßigste erachtet wird.

4) Das nächste Geschäft ist die Messung einer genau abgesteckten Linie, die, wenn man nach der Triangulirmethode verfährt, als Basis der ganzen Vermessung dienen soll, daher in diesem Falle so gewählt wird, daß man möglichst viele Punkte des Netzes von ihr aus aufnehmen kann; bei der Perimeter- und Polarmethode wird es eine der geradlinigen Seiten der Figur sein, wenn sich solche vorfinden; ist aber die Figur von lauter krummen Linien begrenzt, oder hat sie doch nicht eine zu diesem Zwecke ausreichend lange geradlinige Seite, so muß man die Basis einem Theile des Umfangs so nahe anschließen als möglich; bei der Coordinatenmethode wird die Basis mitten durch die Figur gelegt, damit die Ordinaten der einzelnen Punkte so kurz wie möglich werden. Als Coordinatenachse braucht diese Linie zwar nicht zum voraus gemessen zu werden; es gewährt aber beim Bestimmen der Abscissen der verschiedenen Punkte der Aufnahme Bequemlichkeit, wenn man von vornherein die Abscissenachse von ihrem Anfangspunkte aus mißt und während des Messens etwa alle zehn Ruthen durch einen Pflock bezeichnet, auf welchen man mit Rothstift die Ruthenzahl vom Anfangspunkte aus schreibt.

Die Basis oder Abscissenachse trägt man in schicklicher Lage auf den Plan des Meßtisches, so nämlich, daß man nach allen Richtungen hin so viel Raum behält, als zum Auftragen der für dieses Blatt bestimmten Punkte nöthig ist.

5) Im Verlaufe der Messung versäume man nicht, bereits festgelegte Punkte durch Einschneiden von andern Punkten aus, die bei ihrer Aufnahme nicht gebraucht worden waren, zu controliren und die sich etwa vorfindenden Fehler durch Wiederholung der Operation zu verbessern; überhaupt müssen besonders wichtige Punkte, die zu weitern, secundären Standlinien dienen sollen, durch Einschneiden von mehr als zwei Punkten bestimmt werden, auch wol durch Rückwärtseinschneiden, wenn sie durch Vorwärtseinschneiden gefunden waren.

6) Unzugängliche Punkte wird man durch Vorwärtseinschneiden festlegen, in einzelnen Fällen auch wol durch Seitwärtseinschneiden; dasselbe Verfahren wird man anwenden, wenn zwar die aufzunehmenden Punkte zugänglich sind, aber andere, schon bestimmte Punkte die nöthige Bequemlichkeit darbieten, den Meßtisch oder Winkelmesser aufzustellen. Sind aber schon drei Punkte der Karte ganz zuverlässig festgelegt, so gewährt das Rückwärtseinschneiden (nach dem Verfahren des Pothenot'schen Problems, §. 294) große Vorzüge vor jedem andern, indem man das Instrument dabei stets nur an

dem zu bestimmenden Punkte aufzustellen braucht. Ist man an ein genaues und umsichtiges Arbeiten gewöhnt, so braucht man die anscheinende Umständlichkeit des Verfahrens bei Meßtischaufnahmen nicht zu scheuen; bei der rechnenden Methode fallen auch diese Umstände fort und die nachfolgende Berechnung ist leicht und allemal sicher.

7) Sind einzelne oder auch alle Grenzen der Figur krummlinig, so nimmt man diese stets nach der Coordinatenmethode auf, wie §. 267 gezeigt wurde. Meist lassen sich aber die Coordinaten dieser Linien oder einzelner Punkte derselben nicht auf die Hauptachse der Aufnahme beziehen, weil sie zu lang würden und viele Linienmessungen veranlassen müßten. Man steckt dann längs der krummen Grenzen gerade Linien ab, bestimmt deren Lage auf der Karte ganz genau durch eine besondere Aufnahme, und gebraucht dann jede solche Gerade als Abscissenachse für das ihr zunächst liegende krumme Linienstück.

8) Mit den Details im Innern der Figur verfährt man in ähnlicher Weise; bestimmt ihre Coordinaten in Bezug auf die Hauptachse, oder, wenn dies bequemer scheint, in Bezug auf eine der eben erwähnten Nebenachsen, oder bildet aus der zwischen zwei festgelegten Punkten liegenden Geraden eine solche Nebenachse. Gebäude und ähnliche Gegenstände werden dadurch aufgenommen, daß man so viele Punkte ihres Grundrisses, als zur Bestimmung nöthig sind, durch Coordinaten festlegt. Hat man sich zur Aufnahme der Triangulirmethode bedient, so werden die meisten Punkte solcher Details, wie z. B. Flüsse, Bäche, Wege, Ackergrenzen u. dgl. sich durch ihre Durchschnitte mit bekannten Dreiecksseiten bestimmen, so daß man nur ihre Entfernungen von dem nächsten Dreieckspunkte zu messen hat; oder man nimmt eine Dreiecksseite zur Achse und mißt die Coordinaten der einzelnen Punkte in Bezug auf diese.

9) Um jedoch bei der Aufnahme dieser Details mit möglichster Genauigkeit zu Werke zu gehen, lege man nach bloßem Augenmaße einen im ganzen jedoch möglichst ähnlichen Grundriß in größerm Maßstabe als der der eigentlichen Zeichnung der Flur an, bezeichne darin alle in den Flurriß eingetragenen und bei der Aufnahme der Details in Anwendung kommenden Punkte mit denselben römischen Ziffern wie im Flurriß, und trage nun alle Details nach der Gestalt ihres Grundrisses in diese Nebenzeichnung nach Abscissen und Ordinaten der einzelnen Punkte ein. Diese rohe Zeichnung heißt der Hand- oder Faustriß, das Brouillon. Soweit es ohne Eintrag der Deutlichkeit geschehen kann, schreibt man die aus den directen Messungen gewonnenen Längen neben oder auf die betreffenden Linien, wobei aber zu bemerken ist, daß für Punkte, die in einer geraden Linie liegen, die Maße ihrer Entfernungen von demselben Punkte aus notirt werden, nicht ihre Entfernungen

von innerhalb der Linie liegenden Punkten. Man entgeht dabei allen Zweifeln und Irrthümern, welche sich beim nachfolgenden Copiren dieses Risses einschleichen könnten, wenn man, zur Sicherheit, alle Maße auch noch in ein

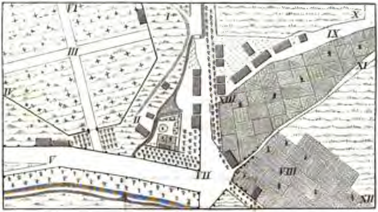


Fig. 357.

Register, auch Manual genannt, einträgt. Fig. 357 liefert ein Beispiel einer kleinen Flur oder doch eines Theils einer kleinen Flur, wozu Fig. 358 den Handriß, Fig. 359 die Behandlung der Details zeigt, wäh-

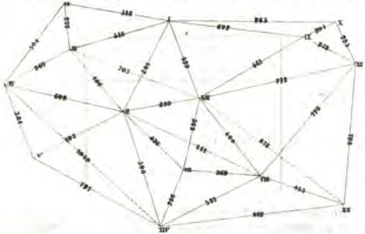


Fig. 358.

rend das Folgende die Anlage des Manuals verdeutlichen mag. Die Fig. 359 veranschaulicht die auf die Linien XIII — IX und I — X bezogenen

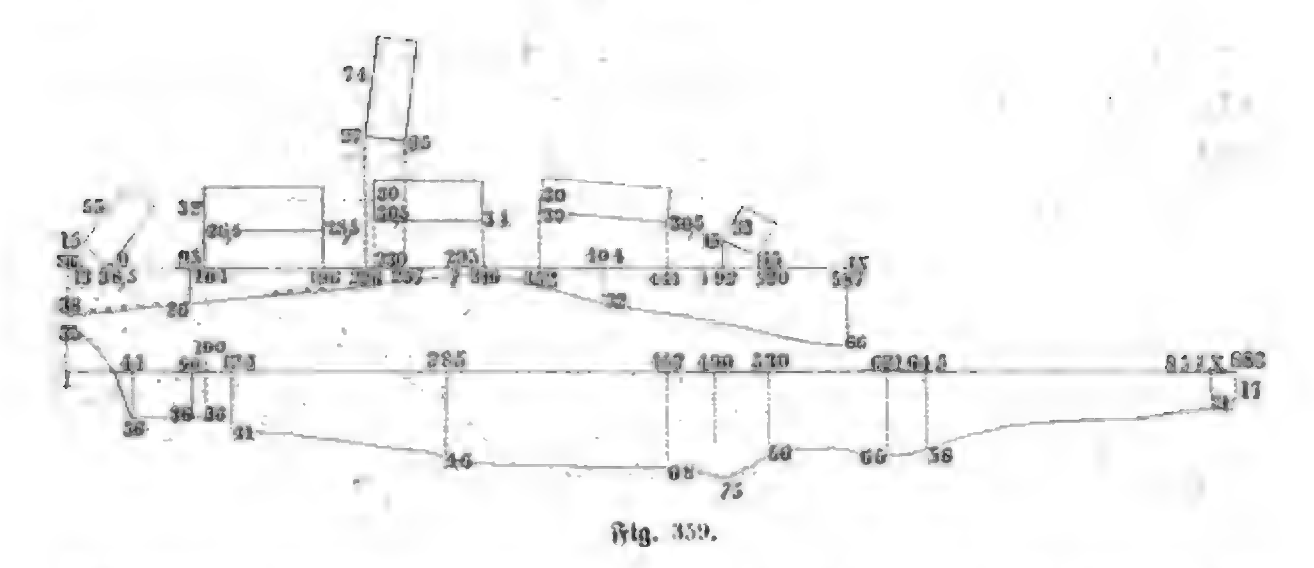


Fig. 359.

Gegenstände; man wird daraus abnehmen, wie mit dem Uebrigen zu verfahren ist.

Manual der Hauptlinien.

Bezeichnung.	Ruthen.
I — III	
I — IV	
u. s. w.	u. s. w.

Manual für die Coordinaten.

Achse.	Name des Punktes.	x	y
I — XII	I		
	a		
	b		
XI—XIV	p		
	q		
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

10) Nach beendeter Aufnahme müßte der Feldmesser seine eigene Arbeit, ehe er sie abliefert, prüfen, damit er zu große Fehler oder Versehen selbst noch zu verbessern in Stand gesetzt werde. Eine solche Prüfung stellt man am einfachsten dadurch an, daß man beliebige Visirlinien quer durch die Felder legt, sie auf der Karte und im Felde ausmißt und vergleicht, ob beide

dieselben Punkte treffen und ob gewisse unter den getroffenen Punkten in gleicher Entfernung vom Anfangspunkte liegen, wie im Felde. Ueberschritte der Fehler die Grenzen, welche gesetzlich innegehalten werden sollen, so müßte der Feldmesser die aufgefundenen Fehler durch nochmalige Verbesserung der betreffenden Abschnitte beseitigen und alles Uebrige um so sorgfältiger prüfen.

11) Wenn die Aufnahme vollendet ist, soll ein Riß derselben angefertigt werden. Von dem dabei zu befolgenden Verfahren wird zwar weiter unten erst die Rede sein; dessenungeachtet müssen wir doch hier schon erwähnen, daß, behufs Anfertigung des Risses, die Lage aller wesentlichen Punkte der Flur durch Coordinaten ausgedrückt werden muß, weil mittels ihrer die Austragung am allereinfachsten und sichersten von statten geht. Ist die Aufnahme mit dem Meßtische ausgeführt, so bleibt nichts weiter übrig, als auf dem ursprünglichen Plane eine schicklich gelegene Gerade als Abscissenachse anzunehmen, in ihr einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt der Abscissen festzusetzen, dann von allen Punkten der Figur, im Innern sowol wie im Umfange, Ordinaten auf die Abscissenachse zu fällen, welche leicht in die neue Zeichnung übergetragen werden können.

Ist dagegen die Aufnahme mit dem Winkelmesser, d. h. durch die eigentliche trigonometrische Triangulation beschafft worden, so müssen die Coordinaten aus den gemessenen Bestimmungsstücken der Figur nach Anleitung des §. 48 berechnet werden. Läge z. B. die Aufnahme der Fig. 353 vor und man nähme die gemessene Basis AB als Abscissenachse, A als Anfangspunkt der Abscissen an, und es wäre gemessen: AB = 3745,3; W. CAB = 41° 15′ 30″; W. ABC = 50° 16′ 40″; so wäre, wenn man A_1 für A, A_2 für C, A_3 für B nimmt, und BA = a als erste Linie der Verbindung setzt, AC = b, CB = c:

$x_1 = y_1 = 0;$

$x_3 = 3745{,}3; \; y_3 = 0;$

$\nu_1 = 180°; \quad \nu_2 = 41° \, 15' \, 30'';$

$\nu_3 = 309° \, 43' \, 20''$ (nach §. 41);

$\omega_3 = 50° \, 16' \, 40''; \; \omega_1 = 41° \, 15' \, 30''; \; \omega_2 = 88° \, 18' \, 50''$
nach (§. 46).

$$AC = \frac{a \cdot \sin \omega_3}{\sin(\omega_1 + \omega_3)}; \quad BC = \frac{a \cdot \sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_3)}.$$

log AB (a)	= 3,5734866	x_2	$= x_1 + b \cos \nu_2$
log sin ω_3	= 9,8860120	x_1	= 0
E · log sin ω_2	= 0,0001881	log b	= 3,4596867
log AC	= 3,4596867	log cos ν_2	= 9,8760699
AC = b	= 2881,95	log x_2	= 3,3357566
		x_2	= 2166,19.

$$\begin{array}{rlrl} \log AB &= 3{,}5734866 & y_2 &= y_1 + b \cdot \sin \nu_1 \\ \log \sin \omega_1 &= 9{,}8191853 & \log b &= 3{,}4596867 \\ E \cdot \log \sin \omega_2 &= \underline{0{,}0001881} & \log \sin \nu_2 &= \underline{9{,}8191853} \\ \log BC &= 3{,}3928600 & \log y_2 &= 3{,}2788720 \\ BC = c &= 2470{,}92. & y_2 &= 1900{,}52. \end{array}$$

x_2 und y_2 sind die Coordinaten des Punktes C. Wenn man in B den Winkel ABC gemessen hat, wird man gleich auch das Fernrohr nach einander auf E, G, N, D einstellen und aus den Ablesungen durch Subtraction successive die Winkel CBE, EBG, GBN, NBD und DBA bestimmen. Um die Winkel am Punkte C kennen zu lernen, muß der Winkelmesser in C aufgestellt und nach dem schon bestimmten CA oder CB eingestellt werden; stellt man ihn dann noch nach den übrigen von C ausgehenden Dreiecksseiten ein, so erhält man in gleicher Weise wie vorhin die um C herum liegenden Winkel; bei A verfährt man ebenso; aus den bereits berechneten Seiten AC, BC und den eben gemessenen Winkeln werden die übrigen Seiten der um A, B, C herum liegenden Dreiecke berechnet; aus den Seiten und Winkeln dieser Dreiecke die Coordinaten ihrer Eckpunkte.

Oder man verfährt nach der Pothenot'schen Aufgabe (§. 294) und berechnet aus den Coordinaten der Punkte A, B, C und den gemessenen Winkeln, genau wie §. 294 geschehen, die Neigungswinkel der Seiten BA, CA (§. 43), daraus die Größen dieser Seiten nach §. 44 und endlich die Coordinaten des vierten Punktes E, wozu jedoch, wie aus §. 294 einleuchtet, die Winkel CEA und AEB gemessen sein müssen, um daraus die Neigungswinkel der Linien CE, AE, BE zur Achse berechnen zu können.

§. 300. **Aufgabe.** Eine größere Flur aufzunehmen.

Auflösung. 1) Wie bei der vorigen Aufgabe, so ist auch hier das Recognosciren das erste Geschäft. Der Feldmesser wird hierbei auf alles achten, was ihm bei seiner vorzunehmenden Arbeit von Wichtigkeit sein kann; insbesondere wird er sich alle die Punkte genau merken, welche hoch und frei gelegen, so daß sie sich als gute Visirobjecte eignen, sei es, daß vielleicht schon natürliche Signale, wie Thürme, Berg- oder Hügelkuppen, leicht kenntliche und nicht zu verwechselnde Bäume, Häuser, Scheunen oder andere Gebäude sich darauf befinden, oder daß man doch leicht künstliche Signale darauf aufpflanzen kann, die weithin sichtbar sind. Ebenso wird er sich alle unzugänglichen Punkte merken, um künftig seine Vermessungsmethode so einzurichten, daß solche durch Einschneiden von zugänglichen Punkten aus erhalten werden. Mit der Recognoscirung verbindet man in der Regel zugleich die genaue Erkundigung über die Grenzen der aufzunehmenden Flur sowol, als die einzelner Theile derselben, die verschiedene Besitzer haben. Sollten die Grenzen hier

oder da streitig sein, so muß der Feldmesser solches rechtzeitig der competenten Behörde insinuiren, um von dieser die Entscheidung darüber und endliche Feststellung der Grenzen zu erwarten; eine Versäumniß hierin würde ihn später in der Arbeit aufhalten und somit ihm oder dem Auftraggeber unnöthige Kosten veranlassen.

2) Nun bestimme man die Hauptbasis und die Dreieckspunkte des Netzes. Erstere ist so zu wählen, daß das Terrain zwischen ihren Endpunkten möglichst horizontal und eben ist, womöglich hoch gelegen, damit sie eine freie Aussicht weithin gewähre. Sie darf nicht zu kurz sein, weil dann gar zu kleine Dreiecke sich daran anschließen würden, aber auch nicht zu lang, weil ihr Maß dadurch um so unsicherer wird; sie muß natürlich mit der Größe der zu vermessenden Flur in einem angemessenen Verhältniß stehen; da auf ebenem Terrain, das eine freie Aussicht gewährt, viel weniger Dreiecke nöthig sind, so kann man da die Basis größer nehmen, und die Netzpunkte können viel weiter aus einander liegen, als dies bei gleicher Ausdehnung der Flur in einem unebenen, coupirten Terrain der Fall ist.

In Cultur befindliche Flächen zerfallen in der Regel in eine große Anzahl einzelner Parcellen, die, des leichtern Bearbeitens wegen, meist parallele Grenzen, die sogenannten Scheiden, haben. Eine Anzahl dieser Parcellen zusammen bilden eine Wendung oder Wanne, so genannt, weil die Parcellenscheiden der einen Wendung eine andere Lage haben als die der Nachbarwendung. Mehrere Wendungen zusammen machen einen Schlag aus; der Schlag umfaßt alle die Ackerstücke einer Feldmark, welche zur Zeit derselben Culturart unterworfen sind, während verschiedene Schläge in demselben Jahre ungleiche Früchte tragen, nämlich so, daß zwar die Fruchtfolge in allen Schlägen so ziemlich dieselbe bleibt, jeder Schlag aber sich in einem andern Stadium dieser Fruchtfolge befindet. Die Grenzen der verschiedenen Schläge und Wendungen einer Feldmark müssen ein besonderes Augenmerk des Feldmessers in Anspruch nehmen; wo es immer möglich ist, muß er Dreieckspunkte in diese Grenzen legen, weil die Wendungen die besten Anhaltspunkte für die richtige Aufnahme der einzelnen Parcellen abgeben. Ebenso wird man bei der Wahl der Dreieckspunkte auch auf andere Details des Terrains achten, um dadurch die Richtung von Wegen, Straßen, den Lauf der Flüsse, die Grenzen anderer Gewässer, die Lage von Gebäuden u. s. w. leicht feststellen zu können. Er wird also die Dreieckspunkte, so oft es angeht, so legen, daß sie zugleich wichtige Punkte bezeichnen, die doch aufgenommen werden müssen, auch darauf sehen, daß sich Instrumente in ihnen leicht aufstellen lassen, oder, wo dies nicht der Fall, sich doch die zum Centriren nöthigen Größen genau bestimmen lassen. In einem Lande, wo schon geodätisch genau bestimmte Punkte vorhanden sind, wird man diese mit in das Netz aufneh-

men, auch wenn sie nicht innerhalb der Flur fallen sollten, wenn sie nur von einigen Netzpunkten aus deutlich sichtbar sind, weil bei der trigonometrischen Aufnahme der Flur dadurch eine größere Sicherheit der Messungen erzielt werden kann.

3) Die Messung der Basis wird natürlich mit aller möglichen Sorgfalt ausgeführt und mehreremal wiederholt, nur die Resultate, welche nicht über $^1/_{5000}$ — $^1/_{6000}$ der ganzen Länge von einander abweichen, werden als brauchbar erkannt; aus diesen berechnet man das arithmetische Mittel und sieht das Resultat dieser Rechnung als die wahrscheinlichste Länge der Basis an.

4) Bei der Aufnahme der Netzpunkte scheidet sich die Operation der Vermessung in zwei wesentlich von einander abweichende Methoden, je nachdem solches mit dem Meßtische oder durch Winkelmessung auszuführen ist, je nachdem man es also mit einer geometrischen oder trigonometrischen Aufnahme zu thun hat.

1. Geometrische Aufnahme des Dreiecksnetzes.

Durch das Recognosciren des Feldes wird der Geometer sich unter anderm davon überzeugt haben, ob nach dem vorgeschriebenen, oder dem Zwecke der Karte entsprechend zu wählenden Maßstabe die Karte auf einem einzigen Meßtischblatte Platz finden kann oder nicht. Im ersten Falle wird auch die Aufnahme des Netzes nach demselben Maßstabe beschafft, in welchem nachher die Karte selbst gezeichnet werden soll. Im andern Falle dagegen, wenn die Karte mehrere Meßtischblätter erfordert, kann man bei der Netzaufnahme zwei verschiedene Wege einschlagen: entweder zeichnet man das Netz nach einem so kleinen Maßstabe, daß es dennoch auf ein einziges Meßtischblatt gebracht werden kann, ungeachtet die Karte selbst auf mehrere Blätter vertheilt werden muß; oder man nimmt auch schon das Netz auf mehreren Blättern und im Maßstabe der Karte auf. Bei dem ersten Verfahren ist man genöthigt, das Netz nach einem kleinern Maßstabe aufzunehmen, als für die danach zu entwerfende Karte gefordert ist; man muß also das Netz dann aus einem kleinern Maßstabe in einen größern übertragen, und dies kann nicht anders als der Genauigkeit nachtheilig sein, da man eigentlich nie aus dem Kleinen ins Große arbeiten sollte, weil sich dabei jeder kleine Fehler der Aufnahme ebenso oft vervielfältigt, als der neue Maßstab größer ist als der ursprüngliche. Beim zweiten Verfahren dagegen macht allerdings das Anschließen eines Blattes an das andere bei der Netzaufnahme einige Schwierigkeiten, die jedoch nicht größer sind als die, auf welche man beim ersten Verfahren beim Uebertragen des Netzes in einen größern Maßstab und von einem Blatte auf

mehrere Blätter stößt. Im Folgenden sollen beide Wege umständlich beschrieben werden.

a. Aufnahme des Netzes auf einem einzigen Blatte.

Das Dreiecksnetz wird auf einem Blatte aufgenommen, entweder wenn die aufzunehmende Flur so klein ist, daß das Netz, wie die Karte selbst, bei dem vorgeschriebenen oder auch willkürlich gewählten Maßstabe, auf einem einzigen Meßtischblatte Platz findet, oder wenn, bei einer größern Flur und einem so großen Kartenmaßstabe, daß die Karte auf mehrere Blätter vertheilt werden muß, für das Netz ein kleinerer Maßstab gewählt wird, als für die nachgehends darauf zu basirende Karte. In beiden Fällen ist das Verfahren für die Aufnahme des Netzes ganz dasselbe.

Man zeichne sich einen genauen Transversalmaßstab für die beabsichtigte Verjüngung des Dreiecksnetzes auf ein besonderes Papier nach §. 111, entwerfe nach dem Augenmaße ein ungefähres Bild der aufzunehmenden Fläche, und bestimme darin die Gegend der gemessenen Basis, um danach zu entscheiden, wo diese auf dem Plane des Meßtisches zu liegen kommen müsse, damit nach allen Seiten hin ausreichender Raum für alle Netzpunkte vorhanden bleibe. Nun zeichne man eine Gerade auf das Papier des Meßtischplanes, etwa in der Richtung, in welcher die gemessene Basis in dem Faustrisse liegt, und mache sie nach dem verjüngten Maßstabe so lang als die gemessene Basis. I, II mögen die Endpunkte der gemessenen Basis vorstellen. Dann bringe man den Meßtisch über I, orientire ihn nach der Geraden I—II, stelle ihn horizontal und schneide auf so viele der Netzpunkte III, IV, V .... ein, als von I aus deutlich sichtbar sind, bringe den Tisch nach II, orientire ihn nach II—I und schneide auf dieselben Punkte ein. Ist man hierbei mit der erforderlichen Sorgfalt und Genauigkeit zu Werke gegangen, so sind sämmtliche genannten Punkte festgelegt und bedürfen nur noch mehrfacher Prüfung, um sich ganz von ihrer Richtigkeit zu überzeugen.

Zu diesem Zwecke stelle man den Tisch in dem Punkte III auf, orientire ihn gehörig und schneide auf alle von da aus sichtbaren Netzpunkte ein, so wird man sehen, ob dieses Verfahren dieselben Punkte im Plane gibt, wie das Einschneiden von I und II aus. In gleicher Weise kann man noch von andern Punkten aus auf die übrigen einschneiden. Stimmt der so gefundene Punkt hier oder da nicht mit dem schon verzeichneten überein, so versäume man nicht, sogleich den Fehler aufzusuchen und zu berichtigen, wobei es mitunter nöthig werden wird, zu den frühern Punkten zurückzukehren und dort die Operation zu wiederholen. Eine andere Prüfung besteht darin, daß man eine der Dreiecksseiten im Felde mißt und mit der Länge der verjüngten Zeichnung vergleicht. Diese Prüfung der festgelegten Punkte kostet zwar Zeit und

Mühe, macht sich aber durch den Gewinn der Vermessung an innerm Werth reichlich belohnt, weil auf der Richtigkeit der Netzpunkte die ganze übrige Vermessung beruht.

b. Aufnahme des Netzes auf mehreren Blättern.

Um dem Uebelstande, das Netz aus einem kleinern Maßstabe in einen größern überzutragen, wobei man stets der Gefahr, erhebliche Fehler zu begehen, ausgesetzt ist, vorzubeugen, theilt man dasselbe lieber in mehrere Sectionen, von denen je eine, in dem Maßstabe der Karte, auf ein Meßtischblatt kommt. Es entsteht dann aber die Frage: wie kann man eine Section richtig an eine vorhergehende anschließen, so daß, wenn nachher die Ränder der Sectionsblätter an einander geklebt werden, die Netzpunkte, welche auf verschiedenen Blättern liegen, dennoch die genau richtige Lage zu einander haben?

Zur Lösung dieser Aufgabe hat man verschiedene Wege vorgeschlagen, die wir, ihrer Unzweckmäßigkeit halber, alle mit Stillschweigen übergehen müssen; wir werden uns damit begnügen, ein von uns vielfach gebrauchtes und zweckmäßig befundenes Verfahren zu beschreiben.

Es sei MNPQ (Fig. 360) das erste Sectionsblatt, und zwar mögen diese Buchstaben die Grenze des Rechtecks vorstellen, welches die Zeichnung enthält, so daß außerhalb des Rechtecks noch der Papierrand folgt. A, B seien zwei Netzpunkte, die noch in das erste Sectionsblatt fallen, C sei ein Punkt, der schon außerhalb des ersten Blattes fällt, während A und B schon in Grundriß gelegt sein mögen. Man bringe den Meßtisch nach A, visire von A nach C und ziehe die Richtungslinie AC rückwärts bis zum Rande MQ des Blattes in a, und vorwärts bis zum Rande NP in a'; ebenso bestimme man die Punkte b und b' mittels der Richtungslinie BC, nachdem der Meßtisch nach B gebracht worden. Dann mache man auf dem zweiten Sectionsblatte, dessen Rand mq mit NP des ersten zusammenfallen soll, $m\alpha = Ma$, $n\alpha' = Na'$ und ziehe $\alpha\alpha'$, mache auch $m\alpha'' = Na'$ und ziehe $\alpha''\alpha''' \# \alpha\alpha'$, verfahre mit Bb' gerade ebenso, d. h. man mache $q\beta = Qb$, $p\beta' = Pb'$ und $q\beta'' = Pb'$, ziehe $\beta\beta'$, dann $\beta''\beta''' \# \beta\beta'$; so ist der Punkt C, wo sich $\alpha''\alpha'''$ und $\beta''\beta'''$ schneiden, die Horizontalprojection des entsprechenden Punktes im Felde. Da nun $\alpha''C$ in das Alignement AC, $\beta''C$ in das Alignement BC im Felde fällt; so kann man den in C aufgestellten Meßtisch nach $C\alpha''$ oder $C\beta''$ orientiren, also von C aus beliebige andere Punkte aufnehmen. Man wird leicht bemerken, daß man hierbei nur zwei beliebige Punkte des ersten und einen ebenso

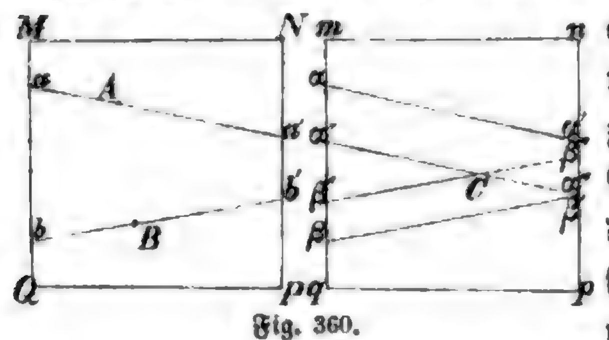


Fig. 360.

beliebigen Punkt des zweiten Sectionsblattes zu wählen hat, weil dann allemal die Visirlinien von den ersten beiden nach dem dritten die Grenzlinie zwischen beiden Blättern schneiden werden. In gleicher Weise, wie vom ersten zum zweiten Blatte, trägt man Punkte von jedem beliebigen Blatte auf ein folgendes an ersteres sich anschließendes über. Man wird aber stets, um später nicht in Verlegenheit zu gerathen, vor dem Abschneiden eines Blattes vom Tische, die Visirlinien von zwei in dem Blatte enthaltenen und einem auf ein angrenzendes Blatt fallenden Punkte auf dem Rande bemerken, und dies für geeignete Punkte auf jedem der vier Ränder des Blattes beachten, um später nach jeder Seite hin noch Blätter anfügen und die Vermessung beliebig fortsetzen zu können.

Bei diesem Uebertragen der Netzpunkte auf ein anderes Blatt können, so einfach das beschriebene Verfahren ist, dennoch leicht Fehler sich einschleichen. Man darf daher das Geschäft nicht ohne sorgfältige Prüfung abgemacht sein lassen. Mit dem einen übertragenen Punkte (C) und seinen Visirlinien (auf A und B) läßt sich aber keine Probe anstellen. Man trage daher auf den Rand des ersten Blattes, außerhalb der Linie NP noch zwei Punkte auf, wenn es auch nicht Netzpunkte sind, weil schwerlich zwei Netzpunkte vorhanden sein werden, die eine solche Lage haben, daß sie im Grundriß auf den Rand fallen würden; man wähle also zwei sonst beliebige Objecte des Feldes, nur so, daß sie in der Zeichnung die verlangte Lage bekommen, bestimme sie auf gewöhnliche Weise durch Einschneiden von zwei andern, schon aufgenommenen Punkten. D und E (Fig. 361) seien diese Punkte im Grundriß. Da mq von Blatt II bei der Zusammensetzung der Karte auf NP von Blatt I fällt, so müssen D und E innerhalb Blatt II fallen. Man fälle nun die Lothe Dd, Ee auf NP, mache md′ = Nd, me′ = Ne, errichte auf mq die Lothe d′D′ und e′E′, und mache d′D′ = dD, e′E′ = eE, so sind D′, E′ die Punkte, welche D und E entsprechen. Hierdurch hat man Prüfungsmittel genug, ja man würde selbst schon ausreichen, wenn man statt der zwei Punkte D, E nur einen davon aufnähme. Man bringe den Tisch nach dem früher übergetragenen Punkte C, orientire ihn und visire von C über D, so wird sich zeigen, ob das Alignement auf den entsprechenden Punkt D im Felde zugeht; ebenso von C über E, von D über E; jede dieser Operationen ist eine Prüfung für die verrichtete Arbeit.

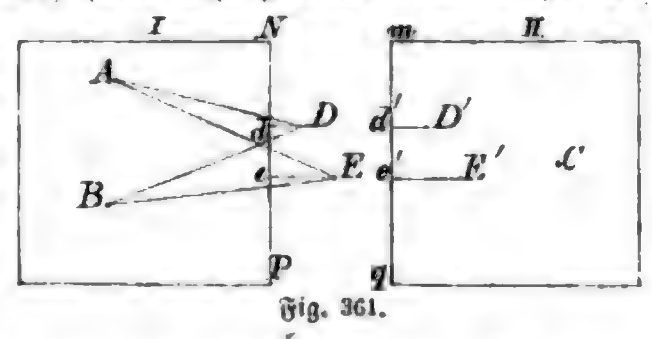


Fig. 361.

Die zum Uebertragen benutzten Punkte können mitunter eine solche Lage haben, daß sie nicht hinreichend lange Visirlinien liefern, um das Lineal mit

Sicherheit daran anlegen und den Tisch danach orientiren zu können. Diesem Uebelstande ist aber bei unserm Verfahren leicht zuvorzukommen, wenn man die Richtungslinien $\alpha''\alpha'''$, $\beta''\beta'''$ bis an den Rand des Blattes verlängert.

II. Trigonometrische Aufnahme des Dreiecksnetzes.

Nachdem Basis und Netzpunkte gewählt und ausreichend bezeichnet sind, beginnen die verschiedenen Messungen. Womit man anfange, ist bei der trigonometrischen Messung für die ganze Arbeit unerheblich und hängt von besondern Zeit- und Lokalumständen ab. So ist es z. B. durchaus nicht nöthig, daß man mit der Messung der Basis vorschreite, ehe man an die Winkelmessung gehe. Bei ersterm Geschäfte ist man, um nur einen Umstand anzuführen, von den Beleuchtungsverhältnissen, von der Klarheit der Witterung u. s. w. unabhängig, während dieser Umstand bei der Winkelmessung sehr in Betracht kommt. Ist also die Witterung zufällig trübe, so wird man zur Linienmessung schreiten, während man stilles und heiteres Wetter, weil man nicht allemal darauf rechnen kann, zur Winkelmessung benutzen wird, auch wenn die Basis noch nicht gemessen sein sollte. In gleicher Weise können mancherlei andere Umstände für das eine oder andere entscheiden. Ebenso ist es völlig gleichgültig, bei welchem Netzpunkte man die Winkelmessung beginne, und können auch hier wieder besondere Umstände für den einen oder andern Punkt entscheiden; es soll also, wenn wir im Folgenden annehmen, daß die Winkel nach der Ordnung der Punkte gemessen werden, durchaus kein Gewicht auf diese Folge der Messungen gelegt werden; nur wird man, wenn der Winkelmesser einmal in einem Punkte aufgestellt ist, nach einander alle Winkel messen, die in diesem Punkte ihre Scheitel haben, also z. B. in I die Winkel II, I, III; II, I, IV; II, I, V u. s. w., wo I, II stets den einen Schenkel aller gemessenen Winkel bildet; oder II, I, III; III, I, IV; IV, I, V; V, I, VI u. s. w. In beiden Fällen braucht man, mit Ausnahme des ersten Winkels, für jeden Winkel nur eine Einstellung. Die Winkel werden nach dem Repetitionsverfahren nach beiden Lagen des Fernrohrs gemessen. Sind schon drei Punkte bestimmt, also außer I, II, welche als gegeben angesehen werden müssen, noch einer, so kann man auch nach §. 294 oder §. 296 verfahren; jedesmal aber wird man mehr Winkel messen, als gerade nur zur Bestimmung der Dreiecke nöthig wären, um Elemente zur Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler zu gewinnen. Sind in der Nähe geodätisch fest bestimmte Punkte vorhanden, so wird man diese besonders beim Rückwärtseinschneiden benutzen können.

Um noch ein neues Prüfungsmittel der Messungen zu erhalten, wird man eine von den zu berechnenden Dreiecksseiten, fern von der Basis, mit aller

Sorgfalt direct messen und von dieser aus wieder rückwärts die Basis berechnen. Sollten nicht alle Punkte, von denen aus man Winkel zu messen hat, zugänglich sein, so müßte man die Winkel centriren, und hätte daher sogleich die zum Centriren nöthigen Elemente zu messen und in besondere Columnen in das Manual einzutragen; ebenso die Größen zur Reduction schief liegender Winkel auf den Horizont, was jedoch nur nöthig ist, wenn man die schief liegenden Winkel mit dem Spiegelsextanten mißt, da der Theodolit sofort die Horizontalprojection des Winkels gibt.

Die so gewonnenen Größen werden in ein Manual getragen, dem man verschiedene Einrichtung geben kann, das jedoch allemal seinem Zwecke entsprechen wird, sobald für jede beobachtete Größe eine Rubrik vorhanden ist. Da man doch noch ein zweites Manual für die Berechnung anlegen muß, so ist es besser, die zu berechnenden Winkelcorrectionen für dieses zweite, das auch die Berechnung der Dreiecke aufnimmt, aufzusparen, und in das erste, außer der genauen Bezeichnung der Winkel, durchaus nur beobachtete Größen aufzunehmen. Es dürfte daher folgendes Schema zweckmäßig erscheinen.

Manual I. Für die Beobachtung.

Nr. der Beobachtung.	Station.	Signal links.	Signal rechts.	Lage des Fernrohrs.	Nr. des Nonius.	Stand des Horizontalkreises. Am Anfang. Gr.	Min.	Sec.	Am Ende. Gr.	Min.	Sec.	Zahl d. Repetitionen.	Elemente zum Centriren.	*)		Verbesserte Winkel.**) Gr.	Min.	Sec.
1	C	B	A	recht	1	0	0	0	126	23	20	5	d =	2,5				
					2	179	59	50	306	24	5	5	δ = 18°	15′	10″			
													ε = 21	41	15			

Um die Winkel rücksichtlich ihrer Centricität zu verbessern, muß man natürlich auch die Längen AC, BC haben, welche aber aus den anderweitigen Rechnungen bekannt sein werden; sonst müßte man sie einstweilen, behufs des

*) Die hier gebrauchten Buchstaben beziehen sich auf Fig. 316, wenn man dort C für A, A für B und B für C setzt.

**) Die Verbesserungen rücksichtlich der Centricität scheinen zweckmäßig schon in dieses Manual aufgenommen zu werden.

Centrirens mittels der beobachteten (unrichtigen) Winkel berechnen; später werden dieselben Seiten noch mit den so verbesserten Winkeln wieder berechnet.

Nachdem die Winkel, welche nicht an ihrem wahren Scheitelpunkte beobachtet werden konnten, centrirt und ihre wahren Werthe in das Manual eingetragen worden, müssen noch die Beobachtungsfehler ausgeglichen werden. Zuletzt werden aus den so gewonnenen Daten die Dreiecksseiten nach den bekannten Formeln berechnet. Man wird sich bei diesen Berechnungen viele vergebene Mühe und beschwerliche Wiederholungen der Rechnung ersparen, wenn man möglichst ordnungsmäßig und systematisch dabei zu Werke geht, was insbesondere dadurch, daß man die ganze Berechnung in ein geordnetes Schema einträgt, am sichersten zu erreichen sein dürfte. Vor allem stelle man sämmtliche zur Dreiecksberechnung dienende Formeln, wozu wir außer den gewöhnlichen trigonometrischen Dreiecksformeln auch die der §§. 294—296 rechnen, in eine Tabelle zusammen und versehe jede derselben mit einer Nummer, mittels der sie im Falle der Anwendung im Schema citirt werden kann. Dadurch entsteht dann ein zweites Manual etwa in folgender Gestalt.

Manual II. Für die Berechnung.

Bezeichnung der Dreiecke.	Name der Station.	Verbesserte Winkel zur Berechnung.				Gegebene Seiten.		Nr. der Formel.	Berechnung.	Berechnete Seiten.	
		Bez.	Gr.	Min.	Sec.	Bez.	Größe. Ruthen.			Bez.	Ruthen.

Diese Schemata haben später für alle Zeiten für die Vermessung den Werth von Urkunden; um sie daher vor Verlust, Beschädigung u. dgl. zu sichern, wird man sie entweder sorgfältig zu einem Actenconvolut zusammenlegen, oder eine Reinschrift davon in ein festes, in Folio gebundenes Buch eintragen und mit zu den Vermessungsacten geben.

Nachdem alle Dreiecke des Netzes berechnet sind, müssen endlich noch die Coordinaten aller Netzpunkte nach §. 48 berechnet werden.

Die genaue Aufnahme des Dreiecksnetzes geschieht einerseits, um an den Netzpunkten und an den Seiten der Netzdreiecke sichere Anhaltepunkte für die nachherige Detailmessung zu haben, wie weiter unten noch ausgeführt werden

soll; dann aber insbesondere auch zu dem Zwecke, um bei künftigen Grenzstreitigkeiten oder sonst neuen Aufnahmen der Flur, wenn z. B. die Details im Laufe der Zeit verändert worden sind, feste Anhaltepunkte zu haben, von welchen aus jede Revision oder erneuerte Aufnahme einzelner Theile oder Besitzstücke mit der größten Leichtigkeit ausgeführt werden kann, ohne große, über die ganze Feldmark sich erstreckende Vermessungen nöthig zu machen. Diese festen Netzpunkte müssen aber in die Karte der Feldmark eingetragen werden, um die Lage der Details (einzelnen Besitzstücke, Wendungen u. s. w.) nach ihnen völlig festzustellen und die Details desto sicherer einzeichnen zu können. Das Einzeichnen der Details kann nun zwar durch gewöhnliche geometrische Construction geschehen, indem man jedes Dreieck aus seinen drei Seiten construirt; dann pflanzt sich aber jeder irgendwo gemachte Fehler auf alle folgenden Dreiecke fort, und wenn die einzelnen Fehler auch nur so klein sind, daß sie an sich nicht in Betracht kämen, würden sie sich doch nach und nach in den spätern Dreiecken so anhäufen, daß die ganze Figur ihre wahre Gestalt und ihre richtigen Verhältnisse dabei einbüßte. Man zieht es aus diesem Grunde vor, die Netzpunkte durch rechtwinkelige Coordinaten in die Karte zu zeichnen, weil dabei jeder eingetragene Punkt von jedem andern völlig unabhängig bleibt, daher nie ein Anhäufen von Fehlern stattfinden kann.

5) Bei der trigonometrischen Netzaufnahme bedarf man, außer etwa einer Handzeichnung zur Orientirung, keiner Zeichnung, während die geometrische Aufnahme unmittelbar eine Zeichnung des Netzes liefert; im ersten Falle muß diese also noch besonders angefertigt werden. Es ist schon gesagt, daß diese am zweckmäßigsten mittels der rechtwinkeligen Coordinaten der einzelnen Punkte gemacht wird. Vor allem ist es also nöthig, jetzt die Coordinaten zu berechnen. Hierzu muß aber die Achse, auf die sich die Coordinaten beziehen sollen, und ein Anfangspunkt in ihr gewählt werden. Wenn nicht besondere Gründe für ein anderes Verfahren vorliegen, wird man sie mit einer schon festgelegten Geraden und den Anfangspunkt der Abscissen mit einem darin liegenden Netzpunkte zusammenfallen lassen, weil dann durch die bekannten Winkel des Netzes auch am leichtesten und ohne neue Winkelmessung die Neigungswinkel aller Dreiecksseiten zu der so angenommenen Achse schon bekannt oder doch sehr leicht zu berechnen sind. Aus der schon berechneten Länge der Seiten der einzelnen Dreiecke und ihren Neigungswinkeln berechnet man die Coordinaten der Netzpunkte nach §. 48. Fiele die gewählte Achse nicht mit einer Dreiecksseite zusammen, so müßte man natürlich durch eine besondere Messung den Winkel bestimmen, welchen sie mit irgend einer Dreiecksseite machte. Wäre z. B. ABC (Fig. 362) eins der Netzdreiecke, MN die Achse, Winkel BAN $= \psi$, so könnte man die Richtung der Achse MN deutlich

abstecken und in A den Winkel BAN messen; da aber AB bekannt, so kann man auch von B ein Loth auf MN fällen, Bb messen und ψ aus

$$\sin \psi = \frac{Bb}{AB}$$

berechnen. Ist aber die Neigung einer Dreiecksseite zur Achse bekannt, so findet man daraus, und aus den bekannten Dreieckswinkeln die Neigungswinkel aller Dreiecksseiten des Netzes.

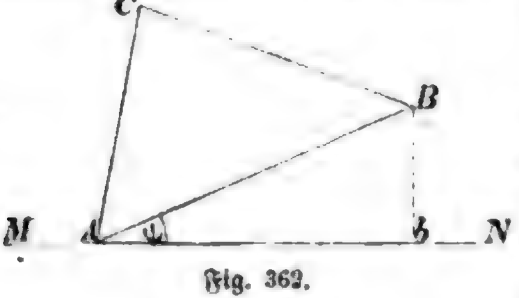


Fig. 362.

Sind die Coordinaten aller Netzpunkte in Bezug auf eine angenommene Abscissenachse und einen beliebig in ihr gewählten Anfangspunkt berechnet, so bieten sich zum Auftragen der Coordinaten noch verschiedene Wege dar.

a) Auf dem auf ein Reißbret aufgespannten Papierblatte zeichne man die beiden rechtwinkeligen Achsen so, daß nach dem Maßstabe, in welchem das Netz übertragen werden soll in allen vier Regionen die nach der Urzeichnung dahin gehörigen Netzpunkte Platz finden können; vom Durchschnittspunkte der Achsen aus trage man dann die Abscissen aller Netzpunkte nach rechts oder links hin ab, je nachdem die Rechnung sie positiv oder negativ gegeben hat; auf der Ordinatenachse trage man ebenso die Ordinaten aller Netzpunkte nach der einen oder andern Seite des Anfangspunktes, je nach ihrem Vorzeichen ab. Durch die so bestimmten Punkte beider Achsen führe man Lothe zur betreffenden Achse, so werden die Durchschnitte je zweier zusammengehöriger Lothe stets einen Dreieckspunkt bestimmen.

b) Oder man theile das ganze Blatt, vom Anfangspunkte der Achsen ausgehend, in gleich große Quadrate, so daß die Seiten dieser Quadrate einer ganzen Anzahl m Längeneinheiten nach dem Maßstabe gleich werden. Soll nun z. B. ein Netzpunkt aufgetragen werden, dessen Abscisse $x = 2m + n$ Längeneinheiten beträgt, so nehme man mit dem Zirkel n Einheiten vom Maßstabe und trage sie in das dritte Quadrat rechts vom Anfangspunkte; und wäre die Ordinate dieses Punktes $y = -(3m + p)$, so nehme man p Einheiten des Maßstabes in den Zirkel und trage sie auf der Seite der negativen Ordinaten in das vierte Quadrat ein, so sind die Punkte auf beiden Achsen bestimmt, und der Netzpunkt kann, wie beim ersten Verfahren, durch Lothe gefunden werden.

6) Nachdem das Dreiecksnetz aufgenommen und genau verzeichnet ist, geht man zur Aufnahme der Details über. Sollen die Details mit dem Meßtische aufgenommen werden, so bringe man von zwei Ecken eines Dreiecks aus so viele solcher Punkte, als von da aus sichtbar sind, in den Grundriß, gehe dann zu andern Netzpunkten über und schneide von diesen aus auf

andere Detailpunkte ein, bis die bemerkenswerthesten Einzelheiten festgelegt sind. Manches wird sich auf andere Weise, z. B. durch Rückwärtseinschneiden, oder durch Ordinaten auf eine der Dreiecksseiten leichter bestimmen lassen. Ueberhaupt wird man in jedem einzelnen Falle die Methode der Aufnahme nach den Umständen zu wählen haben, um möglichst leicht und doch sicher den Zweck zu erreichen. Arbeitet man noch sehr im Großen, d. h. sind die Netzdreiecke von bedeutender Ausdehnung, so bedient man sich zweckmäßig auch hier noch der Methode der Winkelmessung mit dem Theodoliten. Man wird dann aber innerhalb der ersten oder Hauptdreiecke, welche dann auch Dreiecke ersten Ranges heißen, eine Gruppe von kleinern Dreiecken zweiten Ranges bilden, um für die Detailaufnahme noch mehr und einander näher liegende Anhaltpunkte zu haben. Mit der Anlage und Aufnahme dieser Dreiecke zweiten Ranges wird gerade ebenso verfahren, wie bei den Hauptdreiecken gelehrt worden. Man kann übrigens sehr wohl auch Einzelheiten noch mit dem Theodoliten bestimmen. Man bildet dann aus gewissen, sich natürlich darbietenden Flächen, z. B. aus einer Waldung, der Wendung einer Culturfläche u. s. w. ein geradliniges Vieleck, nimmt dieses durch Winkelmessung auf, wobei man große Seitenmessungen meist zu vermeiden sucht, indem man, wo es angeht, die Coordinaten der fraglichen Punkte aus dem Dreiecksnetz zu bestimmen sucht. Daß indeß bei der Bestimmung einzelner Polygonpunkte noch Linienmessungen vorkommen werden, versteht sich von selbst. Sollte z. B. der Punkt A des Polygons AFGHJ (Fig. 363) bestimmt werden, und wäre CD eine Dreiecksseite, XY die Hauptachse oder doch eine damit Parallele, so würde man die Lothe Aa, Dd fällen; Dd und Cd sind aus dem Netze bekannt; mißt man dann AC und den Winkel ACX $= \gamma$, so ist $Aa = AC \cdot \sin \gamma$, $Ca = AC \cdot \cos \gamma$. Da Cd bekannt ist, so hat man, um a zu erhalten, nur noch ad zu messen, wenn dies etwa leichter sein sollte als Ca zu messen. Sonst könnte man auch Aa′ senkrecht auf CD fällen, Aa′ und Ca′ oder Da′ messen; ist dann noch a′a″ senkrecht zu XY, so hat man: W. $aAa' = DCX = \alpha$, also bekannt. $Ca'' = Ca' \cdot \cos \alpha$; $a'a'' = Ca' \cdot \sin \alpha$; $a'\delta = aa'' = Aa' \cdot \sin \alpha$; $A\delta = Aa' \cdot \cos \alpha$; $Ca = Ca'' - aa''$; $Aa = a'a'' + A\delta$; also bekommt man auch auf diesem Wege die Coordinaten von A.

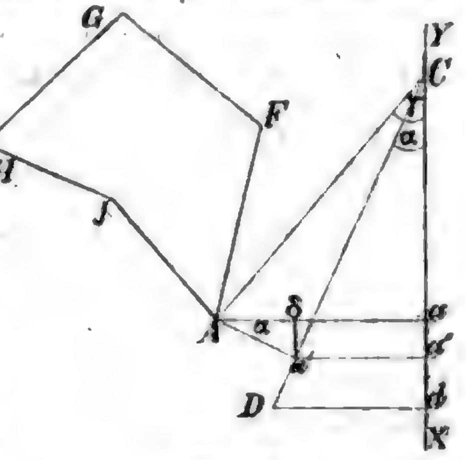


Fig. 363.

Die Aufnahme der Details blos mit der Kette, wie dies gewöhnliche Feldmesser oft ausführen, ist allemal verwerflich, wird aber ganz unausführbar, wenn Terrainschwierigkeiten vorliegen, da Vielecke zu ihrer Bestimmung,

wenn keine Winkel gemessen werden sollen, allemal noch wenigstens n — 3 Diagonalen bedürfen, wenn n die Zahl der Seiten ist, die Messung von Diagonalen aber sehr oft durch Hügel, Gebüsche, Gewässer oder Gebäude erschwert wird.

Daß man für diese Detailaufnahmen einen Handriß in größerm Maßstabe mit beigeschriebenen Maßen, wie bei der vorigen Aufgabe, zu Hülfe nimmt, braucht kaum erwähnt zu werden.

Bei der Aufnahme von bewohnten Ortschaften, Dörfern, Flecken und Städten hängt das Verfahren wesentlich von der außerhalb derselben vorhandenen Räumlichkeit ab. Ist der Raum zugänglich und zur Aufstellung des Instruments geeignet, so sollte man außerhalb eine feste Linie annehmen und messen, von dieser aus die Ortschaft mit einem zusammenhängenden Dreiecksnetz umziehen und mit Hülfe desselben vorläufig so viele Punkte im Innern festlegen, als von den verschiedenen Netzpunkten aus deutlich sichtbar sind, oder mit leicht unterscheidbaren Signalen bezeichnet werden können. Diese Punkte dienen dann als Anhaltepunkte für die Messung im Innern. In derselben Weise wie die Punkte des Innern lassen sich auch die meisten Punkte des Umfangs bestimmen. Wege und Straßen werden in der Mittellinie aufgenommen, bei welchem Verfahren sich sowol der Meßtisch wie der Winkelmesser anwenden läßt. Man muß sich zur Regel machen, stets im Großen und Ganzen zu arbeiten, d. h. erst größere Partien anzulegen, ehe man an die Einzelheiten geht; so die Hauptstraßen durch den ganzen Ort zuerst, dann die Häusergruppen, welche zu einem Quarré oder sonstiger (unregelmäßiger) Form vereinigt sind, ehe man die einzelnen Gebäude u. s. w. vornimmt.

7) Um nun das Ganze noch auf einen besondern Fall anzuwenden, möge die Flur in Fig. 364 dienen, welcher das Netz in Fig. 324 zu Grunde liegt, da die Winkelcorrectionen desselben im §. 286 bereits durchgeführt sind.

Die Gerade AB ist zur Basis der Vermessung gewählt, weil sie etwas erhöht liegt, daher eine freie Aussicht gestattet. Bei der Anlage des Netzes ist darauf gesehen, daß die Netzpunkte gleich als Punkte der Aufnahme selbst sollen gebraucht werden können, was freilich bei größern Flächen nicht so allgemein möglich ist. Mittels der Punkte K und L bekommen wir noch eine Reihe Dreiecke zweiten Ranges, welche schon mit mehr Rücksicht auf das Detail angelegt sind.

Bei der Aufnahme des Netzes mit dem Meßtische wird man von A und B aus auf C, D, E und F einschneiden, von E und F auf L, von E und L auf G, von L und G auf H. Sollte sich in F der Tisch nicht aufstellen lassen, so müßte man L durch Rückwärtseinschneiden bestimmen.

Wird das Netz trigonometrisch aufgenommen, so mißt man in A die Winkel, welche die Richtungen AC, AD, AF, AE mit AB machen, immer

nach derselben Seite hin gezählt, also die Winkel BAC, BAD, BAF, BAE; bei B die Winkel ABC, ABD, ABF, ABE, ebenso an den übrigen Punkten.

Fig. 364.

Als Achse, worauf die nun zu berechnenden Coordinaten der Netzpunkte zu beziehen sind, nimmt man sehr häufig die Meridianlinie, welche nach §. 298 einzutragen ist; um die Neigungswinkel zu bestimmen, denkt man sich dann durch jeden Netzpunkt eine solche Linie gelegt; wie die auf die Achse bezogenen Winkel bestimmt werden, ist bereits gezeigt worden. Es mag nur noch erwähnt werden, daß wir, um das folgende Manual vollständig zu geben, die bereits früher berechneten Winkelcorrectionen mit aufgenommen haben. Die Berechnung der Seiten, Polygonwinkel, Neigungswinkel und Coordinaten lassen wir jedoch vorangehen.

1. Berechnung der Seiten.

$$AB = 759{,}43 \text{ (gemessen).}$$

$$AC = \frac{AB \cdot \sin B_1}{\sin C_1}$$

$$\begin{aligned}
\log AB &= 2{,}8804877 \\
\log \sin B_1 &= 9{,}9949210 \\
E \cdot \log \sin C_1 &= 0{,}1226034 \\
&\ 2{,}9980121 \\
AC &= 995{,}433.
\end{aligned}$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A_1}{\sin C_1}$$

$$AE = \frac{AF \cdot \sin F_4}{\sin E_4}.$$

$$\begin{aligned}
\log AF &= 3{,}2216992 \\
\log \sin F_4 &= 9{,}7837098 \\
E \cdot \log \cdot \sin E_4 &= 0{,}0734653 \\
&\ 3{,}0788743 \\
AE &= 1199{,}152.
\end{aligned}$$

$$EF = \frac{AF \cdot \sin A_4}{\sin E_4}.$$

$$\begin{aligned}
\log AB &= 2{,}8804877\\
\log \sin A_1 &= 9{,}8830007\\
E \cdot \log \sin C_1 &= 0{,}1226034\\
&\quad 2{,}8860918\\
BC &= 769{,}293.
\end{aligned}$$

$$AD = \frac{AC \cdot \sin C_2}{\sin D_2}.$$

$$\begin{aligned}
\log AC &= 2{,}9980121\\
\log \sin C_2 &= 9{,}9046367\\
E \cdot \log \sin D_2 &= 0{,}1206256\\
&\quad 3{,}0232744\\
AD &= 1055{,}053.
\end{aligned}$$

$$CD = \frac{AC \cdot \sin A_2}{\sin D_2}.$$

$$\begin{aligned}
\log AC &= 2{,}9980121\\
\log \sin A_2 &= 9{,}9893337\\
E \cdot \log \sin D_2 &= 0{,}1206256\\
&\quad 3{,}1079714\\
CD &= 1282{,}246.
\end{aligned}$$

$$AF = \frac{AD \cdot \sin D_3}{\sin F_3}.$$

$$\begin{aligned}
\log AD &= 3{,}0232744\\
\log \sin D_3 &= 9{,}9780306\\
E \cdot \log \sin F_3 &= 0{,}2203942\\
&\quad 3{,}2216992\\
AF &= 1666{,}092.
\end{aligned}$$

$$DF = \frac{AD \cdot \sin A_3}{\sin F_3}.$$

$$\begin{aligned}
\log AD &= 3{,}0232744\\
\log \cdot \sin A_3 &= 9{,}9758178\\
E \cdot \log \sin F_3 &= 0{,}2203942\\
&\quad 3{,}2194864\\
DF &= 1657{,}626.
\end{aligned}$$

$$FH = \frac{FG \cdot \sin G_7}{\sin H_7}.$$

$$\begin{aligned}
\log AF &= 3{,}2216992\\
\log \sin A_4 &= 9{,}9983240\\
E \cdot \log \sin E_4 &= 0{,}0734653\\
&\quad 3{,}2934885\\
EF &= 1965{,}57.
\end{aligned}$$

$$BE = \frac{AE \cdot \sin A_5}{\sin B_5}.$$

$$\begin{aligned}
\log AE &= 3{,}0788743\\
\log \sin A_5 &= 9{,}9884006\\
E \cdot \log \sin B_5 &= 0{,}0346700\\
&\quad 3{,}1019449\\
BE &= 1264{,}575.
\end{aligned}$$

$$BE = \frac{AB \cdot \sin A_5}{\sin E_5}.$$

$$\begin{aligned}
\log AB &= 2{,}8804877\\
\log \sin A_5 &= 9{,}9884006\\
E \cdot \log \sin E_5 &= 0{,}2331475\\
&\quad 3{,}1020358\\
BE &= 1264{,}84.\ ^{*)}
\end{aligned}$$

$$EG = \frac{EF \cdot \sin F_6}{\sin G_6}.$$

$$\begin{aligned}
\log EF &= 3{,}2934885\\
\log \sin F_6 &= 9{,}8534051\\
E \cdot \log \sin G_6 &= 0{,}0177617\\
&\quad 3{,}1646553\\
EG &= 1461{,}017.
\end{aligned}$$

$$FG = \frac{EF \cdot \sin E_6}{\sin G_6}.$$

$$\begin{aligned}
\log EF &= 3{,}2934885\\
\log \sin E_6 &= 9{,}9407770\\
E \cdot \log \sin G_6 &= 0{,}0177617\\
&\quad 3{,}2520272\\
FG &= 1786{,}6.
\end{aligned}$$

$$GH = \frac{FG \cdot \sin F_7}{\sin H_7}.$$

---

*) Dieser zweite Werth von BE kann als Probe für den ersten angesehen werden.

log FG = 3,2520272	log FG = 3,2520272
log sin G_7 = 9,9952820	log sin F_7 = 9,8603848
E · log sin H_7 = 0,1037354	E log sin H_7 = 0,1037354
3,3510446	3,2161474
FH = 2244,112.	GH = 1644,13.

2. Berechnung der Polygonwinkel.

B_1 =	81°	15′	16″,041	E_4 =	57°	36′	17″,622
B_5 =	67	24	33,551	E_5 =	35	46	26,902
ω_1 =	148	39	49,592	E_6 =	60	45	11,539
				ω_2 =	154	7	56,063.
G_6 =	73	43	29,616	ω_4 = H_7 =	51	57	17,471.
G_7 =	.81	34	11,294				
ω_3 =	155	17	40,910				
F_3 =	37	0	52,210	D_2 =	49	14	34,915
F_4 =	37	25	31,639	D_3 =	71	55	43,657
F_5 =	45	31	18,846	ω_6 =	121	10	18,572
F_6 =	46	28	31,236				
ω_5 =	166	26	13,931				
C_1 =	48	56	30,833	ω_8 = ω_1 =	148	39	49,592.
C_2 =	53	24	12,732				
ω_7 =	102	20	43,565				

3. Bezeichnung der Polygonseiten.

AB = s_0; BE = s_1; EG = s_2; GH = s_3;
HF = s_4; FD = s_5; DC = s_6; CB = s_7.

4. Berechnung der Neigungswinkel.

ν_0 =	95°	15′	42″	ν_3 =	292°	5′	52″,524.
ABE = ω' =	67	24	33,551	ω_4 =	51	57	17,471
π =	180				344	3	9,995
ν_1 =	342	40	15,551	π =	180		
ω_2 =	154	7	56,063	ν_4 =	164	3	9,995.
	496	48	11,614				

$\pi = 180$	$\omega_5 = 166^\circ\ 26'\ 13,''931$
$\nu_2 = 316^\circ\ 48'\ 11'',614.$	$330\ \ 29\ \ 23,926$
$\omega_3 = 155\ \ 17\ \ 40,910$	$\pi = 180$
$472\ \ 5\ \ 52,524$	$\nu_5 = 150\ \ 29\ \ 23,926$
$\pi = 180$	$\omega_6 = 121\ \ 10\ \ 18,572.$
$\nu_3 = 292\ \ 5\ \ 52,524.$	$271\ \ 39\ \ 42,498.$
$271\ \ 39\ \ 42,498$	$\nu_7 = 14\ \ 0\ \ 26,063$
$\pi = 180$	$\omega_8 = 148\ \ 39\ \ 49,592$
$\nu_6 = 91\ \ 39\ \ 42,498.$	$162\ \ 40\ \ 15,655$
$\omega_7 = 102\ \ 20\ \ 43,565$	$\pi = 180$
$194\ \ 0\ \ 26,063$	$\nu_8 = 342\ \ 40\ \ 15,655$
$\pi = 180$	$\nu_8 = \nu_1$ beinahe, wie es sein soll.
$\nu_7 = 14\ \ 0\ \ 26,063$	

5. Berechnung der Coordinaten.

$x_0 = 0;$	$y_0 = 0;$
$s_0 = 759,43$	$s_0 = 759,43$
$\log s_0 = 2,8804877$	$\log s_0 = 2,8804877$
$\log\cos\nu_0 = 8,9623901\ (-)$	$\log\sin\nu_0 = 9,9981661$
$1,8428778$	$2,8786538$
$x_1 = -69,643.$	$y_1 = 756,23.$
$\log s_1 = 3,1020459$	$\log s_1 = 3,1020459$
$\log\cos\nu_1 = 9,9798260$	$\log\sin\nu_1 = 9,4740100\ (-)$
$3,0818719$	$2,5760559$
$1207,46$	$-376,752$
$x_1 = -69,643$	$y_1 = 756,23$
$x_2 = 1137,817.$	$y_2 = 379,478.$
$\log s_2 = 3,1647652$	$\log s_2 = 3,1647652$
$\log\cos\nu_2 = 9,8627315$	$\log\sin\nu_2 = 9,8353776\ (-)$
$3,0274967$	$3,0001428$
$1065,36$	$-1000,33$
$x_2 = 1137,817$	$y_2 = 379,478$
$x_3 = 2203,177.$	$y_3 = -620,852.$
$\log s_3 = 3,2162572$	$\log s_3 = 3,2162572$
$\log\cos\nu_3 = 9,5754074$	$\log\sin\nu_3 = 9,9668653\ (-)$
$2,7916646$	$3,1831225$
$618,963$	$-1524,483$
$x_3 = 2203,177$	$y_3 = -620,852$
$x_4 = 2822,140.$	$y_4 = -2145,335.$

$\log s_4 = 3{,}3511545$	$\log s_4 = 3{,}3511545$
$\log \cos v_4 = 9{,}9829561$	$\log \sin v_4 = 9{,}4389414$
$3{,}3341106$	$2{,}7900959$
$-\ 2158{,}294$	$616{,}731$
$x_4 = 2822{,}140$	$y_4 = -\ 2145{,}335$
$x_5 = 663{,}846.$	$y_5 = -\ 1528{,}604.$
$\log s_5 = 3{,}2195963$	$\log s_5 = 3{,}2195963$
$\log \cos v_5 = 9{,}9396537\ (-)$	$\log \sin v_5 = 9{,}6924734$
$3{,}1592500$	$2{,}9120697$
$-\ 1442{,}946$	$816{,}713$
$x_5 = 663{,}846$	$y_5 = -\ 1528{,}604$
$x_6 = -\ 779{,}100.$	$y_6 = -\ 711{,}891.$
$\log s_6 = 3{,}1080641$	$\log s_6 = 3{,}1080641$
$\log \cos v_6 = 8{,}4623893\ (-)$	$\log \sin v_6 = 9{,}9998173$
$1{,}5704534$	$3{,}1078814$
$-\ 37{,}1923$	$1281{,}980$
$x_6 = -\ 779{,}1000$	$y_6 = -\ 711{,}891$
$x_7 = -\ 816{,}2923.$	$y_7 = 570{,}089.$
$\log s_7 = 2{,}8861691$	$\log s_7 = 2{,}8861691$
$\log \cos v_7 = 9{,}9868905$	$\log \sin v_7 = 9{,}3838938$
$2{,}8730596$	$2{,}2700629$
$746{,}551$	$186{,}235$
$x_7 = -\ 816{,}292$	$y_7 = 570{,}089$
$x_8 = -\ 69{,}741 = x_1$ beinahe.	$y_8 = 756{,}324 = y_1$ beinahe.

Manual für die Berechnung.

Nr. der Dreiecke	Bez. der Dreiecke	Bez. der Winkel	Gemessene Winkel Gr.	Gemessene Winkel Min.	Gemessene Winkel Sec.	Elemente der Winkelverbesserung Sec.	Verbesserte Winkel zur Berechnung Gr.	Verbesserte Winkel zur Berechnung Min.	Verbesserte Winkel zur Berechnung Sec.	Berechnete Seiten Bez.	Berechnete Seiten Werthe Ruthen	Polygonwinkel Bez.	Polygonwinkel Werthe Gr.	Polygonwinkel Werthe Min.	Polygonwinkel Werthe Sec.	Neigungswinkel Bez.	Neigungswinkel Werthe Gr.	Neigungswinkel Werthe Min.	Neigungswinkel Werthe Sec.	Coordinaten Abscissen Bez.	Coordinaten Abscissen Ruthen	Coordinaten Ordinaten Bez.	Coordinaten Ordinaten Ruthen	Bemerkungen
I.	A B C	A_1	49	48	12	— 1,127	49	48	13,127	A B	759,43 (gemessen)	ω_1	148	39	49,592	v_1	342	40	15,551	x_0	0	y_0	0	v_0 = 95° 15′ 42″. BE ist doppelt berechnet zur Controle.
		B_1	81	15	15	— 1,041	81	15	16,041	A C	995,692	ω_2	154	7	56,063	v_2	316	48	11,614	x_1	— 69,643	y_1	+ 756,23	
		C_1	48	56	30	— 0,833	48	56	30,833	B C	769,493	ω_3	155	17	40,910	v_3	292	5	52,524	x_2	+ 1137,817	y_2	+ 379,478	
II.	A C D	A_2	77	21	10	— 2,353	77	21	12,353	A D	1055,32	ω_4	51	57	17,471	v_4	164	3	9,995	x_3	+ 2203,177	y_3	— 620,852	
		C_2	53	24	12	— 0,732	53	24	12,732	C D	1282,58	ω_5	166	26	13,931	v_5	150	29	23,926	x_4	+ 2822,14	y_4	— 2145,335	
		D_2	49	14	34	— 0,915	49	14	34,915											x_5	+ 663,846	y_5	— 1528,604	
III.	A D F	A_3	71	3	25	+ 0,867	71	3	24,133	A F	1666,514	ω_6	121	10	18,572	v_6	91	39	42,498	x_6	— 779,1	y_6	— 711,891	
		D_3	71	55	45	+ 1,343	71	55	43,657	D F	1658,04	ω_7	102	20	43,565	v_7	14	0	26,063	x_7	— 816,292	y_7	+ 570,089	
		F_3	37	0	54	+ 1,790	37	0	52,210															
IV.	A E F	A_4	84	58	8	— 2,739	84	58	10,739	A E	1199,45	ω_8	148	39	49,592	v_8	342	40	15,655	x_8	— 69,741	y_8	+ 756,324	
		E_4	57	36	15	— 2,622	57	36	17,622	E F	1966,06													
		F_4	37	25	30	— 1,639	37	25	31,639															
V.	A B E	A_5	76	48	57	— 2,647	76	48	59,647	B E	1264,925													
		B_5	67	24	38	+ 4,549	67	24	33,551	B E	1264,87													
		E_5	35	46	36	+ 9,098	35	46	26,902															
VI.	E F G	E_6	60	45	15	+ 3,461	60	45	11,539	E G	1461,38													
		F_6	45	31	20	+ 1,154	45	31	18,846	F G	1787,05													
		G_6	73	43	31	+ 1,385	73	43	29,616															
VII.	F G H	F_7	46	28	33	+ 1,765	46	28	31,236	F H	2244,68													
		G_7	81	34	12	+ 0,706	81	34	11,294	G H	1645,34													
		H_7	51	57	18	+ 0,529	51	57	17,471															

8) Es versteht sich, daß auch die Aufnahme einer größern Flur verschiedenen Prüfungen und Proben unterworfen werden muß, ehe sie als abgeschlossen und richtig angesehen werden kann. Hierfür gilt indessen im allgemeinen alles das, was §. 299 über die Prüfung einer kleinern Flur gesagt worden, nur daß man bei größern Arbeiten noch mit mehr Sorgfalt zu Werke gehen und Probelinien nach verschiedenen Richtungen legen muß, um keinen möglichen Fehler zu übersehen. Es mag noch bemerkt werden, daß das preußische Feldmesserreglement von 1858 (§. 30) festsetzt, es soll eine Messung als richtig angesehen werden, wenn für Längenmessungen die Differenzen bei günstigem Terrain 0,002, bei sehr unebenem und coupirtem Terrain 0,003 der wirklichen Länge nicht überschreiten. Die mecklenburg-schwerinsche Feldmesserordnung von 1854 gestattet (§. 32) ohne Unterschied Abweichungen von 0,003.

9) Schließlich pflegt man, zur Orientirung beim Gebrauche, in jede Karte an schicklicher Stelle noch die Mittagslinie einzuzeichnen, wobei nach §. 298 verfahren wird.

C. Berechnung des Flächeninhalts der Figuren.

§. 301. Der Flächeninhalt einer gemessenen und in Plan gelegten Figur kann auf zweierlei Art gefunden werden:

1) man bestimmt denselben nach den Regeln, welche die ebene Geometrie und Trigonometrie an die Hand geben, aus den *gemessenen Größen* unmittelbar; oder

2) man hat zwar eine Karte der zu berechnenden Fläche, aber keine Zahlangaben, weil die Aufnahme mit dem Meßtische beschafft ist; dann bestimmt man den Flächeninhalt aus der *Zeichnung*.

Da die gemessenen Flächenstücke doch immer nur nach einem sehr stark verjüngten Maßstabe aufgetragen werden können, überdies beim Auftragen sowol als beim Abnehmen der Linien stets kleinere oder größere Fehler begangen werden, deren Betrag nach dem wahren Maßstabe (in der natürlichen Größe) um so beträchtlicher ausfällt, je größer das Verjüngungsverhältniß ist: so leuchtet ein, daß die Berechnung des Flächeninhalts nach der zweiten Methode lange nicht so genau ausfallen kann, wie die nach der ersten, und daß die Genauigkeit des aus der Karte entnommenen Flächeninhalts um so geringer sein wird, in je stärker verjüngtem Maßstabe die zu berechnende Flur abgebildet ist.

Außer der Erklärung der zwei Methoden der Berechnung des Flächeninhalts einer aufgenommenen Fläche werden wir auch noch zu zeigen haben,

wie man den Einfluß berechnen kann, welchen Fehler in den gemessenen Größen auf das Resultat der Flächenberechnung haben können.

1. Berechnung des Flächeninhalts aus den gemessenen Größen.

§. 302. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Dreiecks aus den gemessenen Seiten und Winkeln desselben zu bestimmen.

Auflösung. Jede Inhaltsbestimmung des Dreiecks beruht auf dem bekannten geometrischen Satze: der Inhalt eines Dreiecks wird dadurch gefunden, daß man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und von dem Producte die Hälfte nimmt. Heißt a die Grundlinie, h die Höhe, J der Inhalt, so ist hiernach:

$$J = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h.$$

Ist nun das Dreieck gegeben durch zwei Seiten a, b und den eingeschlossenen Winkel γ, so ist:

$$h = b \cdot \sin \gamma,$$

also:

$$J = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \gamma.$$

Da aber, wenn der Inhalt eines Dreiecks berechnet werden soll, in der Regel schon alle Seiten bekannt sind, so zieht man es vor, den Inhalt aus den drei Seiten nach der Formel:

$$J = \sqrt{\frac{1}{2} s \cdot (\frac{1}{2} s - a) \cdot (\frac{1}{2} s - b) \cdot (\frac{1}{2} s - c)},$$

wo $s = a + b + c$ ist, zu berechnen.

§. 303. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Vierecks zu berechnen, wenn irgend fünf zu seiner Bestimmung ausreichende Stücke gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe eine Diagonale des Vierecks, berechne den Inhalt der beiden dadurch entstehenden Dreiecke und addire die so gefundenen Inhalte.

Ist das Viereck ein Trapez, so bietet die Geometrie das bequemere Mittel dar, die Höhe (den Abstand der parallelen Seiten) mit dem arithmetischen Mittel der parallelen Seiten zu multipliciren.

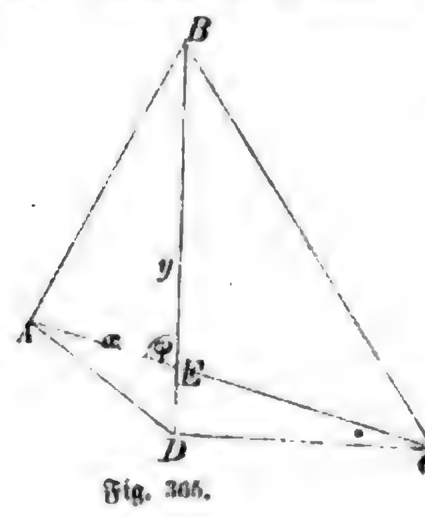


Fig. 365.

In ganz speciellen Fällen bieten sich noch andere Mittel zur bequemen Inhaltsberechnung dar.

§. 304. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Vierecks aus den Diagonalen und dem Winkel, unter welchem sich diese schneiden, zu bestimmen.

Auflösung. ABCD (Fig. 365) sei das gegebene Viereck, e, f seien seine Diagonalen, φ der Winkel BEC, unter dem sich die Diagonalen e, f schneiden, man bezeichne ferner AE mit x, BE mit y, so ist $CE = e - x$, $DE = f - y$ und:

Dreieck AED $= \frac{1}{2} x \cdot (f - y) \cdot \sin \varphi$,
Dreieck BEC $= \frac{1}{2} y \cdot (e - x) \cdot \sin \varphi$,
und da W. AEB = AEC $= 180° - \varphi$, also sin AEB = sin AEC $= \sin \varphi$, so ist weiter:
Dreieck AEB $= \frac{1}{2} xy \cdot \sin \varphi$
und Dreieck CED $= \frac{1}{2} (e - x) \cdot (f - y) \cdot \sin \varphi$.

$$J = \frac{1}{2} \sin \varphi \, [xy + x(f - y) + y(e - x) + (e - x) \cdot (f - y)]$$
$$= \frac{1}{2} ef \cdot \sin \varphi.$$

§. 305. **Aufgabe.** Den Inhalt eines beliebigen Vielecks durch Coordinaten zu berechnen.

Auflösung. Aus den gemessenen oder berechneten Seiten und Polygonwinkeln bestimme man die Neigungswinkel der einzelnen Seiten zu einer beliebig angenommenen Abscissenachse, berechne die Ordinaten aller Eckpunkte des Polygons und suche daraus den Inhalt nach der Formel des §. 50.

Da die Neigungswinkel und Coordinaten der Eckpunkte zu anderweitigen Zwecken doch gewöhnlich schon bestimmt sein werden, so ist die Inhaltsbestimmung nach dieser Methode ohne große Mühe zu beschaffen.

2. Inhaltsberechnung aus dem Grundrisse.

§. 306. Soll der Inhalt einer aufgenommenen Figur aus dem Grundrisse gefunden werden, so zerlegt man die Figur am zweckmäßigsten in Trapeze, mißt die beiden parallelen Seiten a, b jedes dieser Trapeze und den Abstand h derselben, so gibt der Ausdruck

$$\frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

den Inhalt eines solchen Trapezes. Die Längen der genannten Linien werden mit einem guten Haarzirkel aus dem Grundrisse entnommen und ihre Maße nach dem Maßstab der Karte bestimmt. Um die Höhen zu entnehmen, welche in dem Risse nicht gezeichnet sind, kann man, um nicht zu viele Linien zu ziehen, ein Lineal nach einer der parallelen Seiten anlegen, ein rechtwinkeliges Dreieck längs dieses Lineals hinschieben und die Höhen mit dem Zirkel an dem letztern selbst nehmen. Wo es angeht, wird man die Grundlinien mehrerer Trapeze in eine Gerade fallen lassen; ist dann die Zeichnung auf einem rechtwinkeligen Reißbrete befestigt, so kann man an diese gemeinschaftliche Basis oder parallel mit ihr eine Reißschiene anlegen und das rechtwinkelige Dreieck bequem längs dieser verschieben, um die Höhen der Trapeze davon abzunehmen. Meist wird es am bequemsten sein, eine außerhalb der zu messenden Figur gelegene Gerade für die Maße der Höhen zu ziehen, wie MN (Fig. 366); sind dann aa_1, $bb'b_1$, $cc'c_1$, $dd'd_1$, $ee'e_1$ die Paral-

lelen, so stellen a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, d_1e_1 die Höhen der Trapeze vor. Die Berechnung geschieht nun, wie schon wiederholt erwähnt worden; danach ist:

$$J = (a_1abb_1 + b_1bcc_1 + c_1cdd_1 + d_1dee_1)$$
$$- (a_1ab'b_1 + b_1b'c'c_1 + c_1c'd'd_1 + d_1d'e'e_1).$$
$$J = \tfrac{1}{2}(aa_1 + bb_1) \cdot a_1b_1 + \tfrac{1}{2}(bb_1 + cc_1) \cdot b_1c_1$$
$$+ \tfrac{1}{2}(cc_1 + dd_1) \cdot c_1d_1 + \tfrac{1}{2}(dd_1 + ee_1) \cdot d_1e_1$$
$$- [\tfrac{1}{2}(aa_1 + b'b_1)\, a_1b_1 + \tfrac{1}{2}(b'b_1 + c'c_1) \cdot b_1c_1$$
$$+ \tfrac{1}{2}(c'c_1 + d'd_1) \cdot c_1d_1 + \tfrac{1}{2}(d'd_1 + e'e_1) \cdot d_1e_1].$$
$$= \tfrac{1}{2}[bb' \cdot a_1b_1 + (bb' + cc')\, b_1c_1 + (cc' + dd') \cdot c_1d_1$$
$$+ (dd' + ee') \cdot d_1e_1].$$

Da indeß hier $d'e'$ als gerade Linie angesehen worden, während sie doch in x und u beträchtliche Wendungen macht, so könnte man die Figur $d'dee'ux$ noch in drei Trapeze theilen, wie die beiden gezogenen Linien mn, pq andeuten, und mit diesen wie bisher verfahren, dadurch erhielte man ein genaueres Resultat.

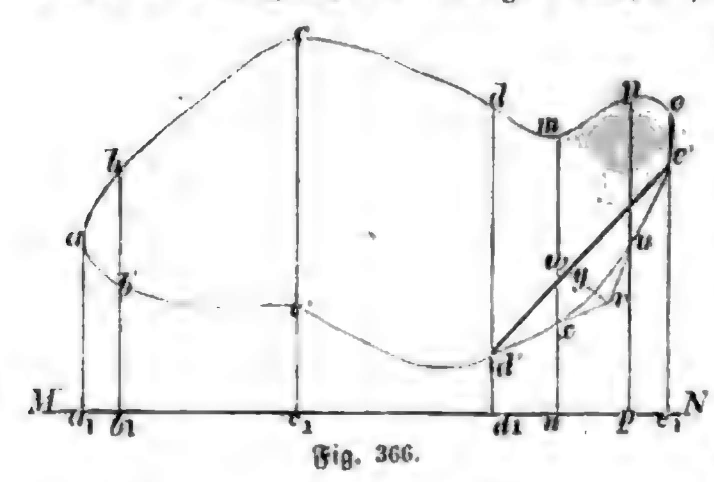


Fig. 366.

Je weniger Krümmungen der Umfang der Figur darbietet, desto weiter können die Parallelen aus einander stehen, desto größer können die Höhen der Trapeze genommen werden; nimmt man diese Höhen alle einander gleich, so vereinfacht sich die Rechnung und selbst auch das Abtragen auf dem Maßstabe; dann müssen aber diese Höhen alle so klein sein, daß nirgends eine bedeutende Krümmung des Umfangs zwischen zwei Parallelen fällt.

§. 307. Es wird zweckmäßig sein, eine solche Inhaltsbestimmung einer sichern **Probe** zu unterwerfen. Zu diesem Zwecke gebe man der Linie MN eine andere Lage, ziehe demgemäß neue Parallelen, welche zur jetzigen Achse $M'N'$ senkrecht stehen und bestimme so den Inhalt nochmals mittels dieser neuen Achse. Ist der Unterschied der beiden Resultate nur gering, so nimmt man das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten als wahren Werth des gesuchten Inhalts. Unterscheiden sich aber die Resultate bedeutend von einander, so müssen gröbere Versehen vorgefallen sein, und man muß dann die Arbeit von vorn durchmachen. Hierüber stellt man dann abermals die Probe mit der veränderten Lage der Achse an und fährt in dieser Weise so lange fort, bis der gewünschte Grad der Uebereinstimmung beider Resultate erreicht ist. Bei einer **Revision** der Flächenberechnung einer Flur hat man sowol die gemessenen Größen als auch die Rechnung zu prüfen, wenn nicht etwa

schon eine Revision der Aufnahme selbst vorangegangen ist, so daß die Richtigkeit der gemessenen Größen schon festgestellt ist. Bei der Revision der Rechnung fängt man mit den größern Flächen an, rechnet sie nach und vergleicht das Resultat mit der Angabe; in derselben Weise geht man nach und nach zu immer kleinern Parcellen über, bis jedes einzelne Stück nachgerechnet ist.

Das preußische Feldmesserreglement von 1858 schreibt im §. 30 vor, daß bei Flächenmessungen unter 3 Morgen pro Morgen $2\frac{1}{2}$ Quadratruthen, von 3 bis incl. 50 Morgen pro Morgen $1\frac{1}{2}$ Quadratruthen, über 50 Morgen pro Morgen $1\frac{1}{4}$ Quadratruthen Abweichung vom wahren Inhalte gestattet sein soll; und die mecklenburg-schwerinsche Feldmesserordnung von 1854 gestattet (§. 32) bis 12000 Quadratruthen eine Abweichung von 0,0111 der ganzen Fläche, bis 60000 Quadratruthen 0,0104 einzelner Figuren, bis 120000 Quadratruthen 0,0093.

3. Grad der Genauigkeit der Inhaltsbestimmung.

§. 308. Bei der Berechnung des Inhalts legt man, wie wir oben gesehen haben, entweder Dreiecke oder Trapeze zu Grunde. Im ersten Falle kommen wesentlich die Formeln:

1) $J = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma$,

2) $J = \dfrac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}$,

3) $J = \sqrt{\frac{1}{2} s\, (\frac{1}{2} s - a)\, (\frac{1}{2} s - b)\, (\frac{1}{2} s - c)} = w$ (als Bezeichnung) zur Anwendung; im andern Falle dagegen die Bestimmung des Inhalts eines Rechtecks aus Grundlinie und Höhe, oder die Formel:

4) $J = ab$.

Da dies letztere der einfachere Fall ist, der bei der Berechnung mittels des Rechtecks auch wieder vorkommt, so wollen wir ihn zuerst untersuchen.

Sind die streng richtigen Größen a und b, die fehlerhaften aber $a \pm \delta a$ und $b \pm \delta b$, so ist der richtige Inhalt $= ab$, der fehlerhafte $= (a \pm \delta a)(b \pm \delta b) = ab \pm a\delta b \pm b\delta a \pm \delta a \cdot \delta b$. Die größte Abweichung vom wahren Werthe erhält man, wenn man allen Messungsfehlern gleiches Vorzeichen gibt; dann ist, wenn man den Fehler im Inhalte mit δJ bezeichnet:

$$\delta J = a\delta b + b\delta a + \delta a \cdot \delta b.$$

Sind beide Linien mit derselben Genauigkeit gemessen, so beträgt jeder Fehler einen proportionalen Theil der betreffenden Linie, also etwa:

$$\delta a = \frac{1}{n}\, a \text{ und } \delta b = \frac{1}{n}\, b,$$

also ist dann:

$$\delta J = a \cdot \frac{1}{n}\, b + b \cdot \frac{1}{n}\, a + \frac{1}{n^2} \cdot ab.$$

Soll überhaupt die Messung eine brauchbare sein, so darf $\frac{1}{n}$ nur ein sehr kleiner Bruch sein, so daß $\frac{1}{n^2} \cdot ab$ verschwindend klein wird und vernachlässigt werden darf. Dann ist:

$$\delta J = a \cdot \frac{1}{n} b + b \cdot \frac{1}{n} a = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot ab = \frac{2}{n} \cdot J,$$

oder:

$$\frac{\delta J}{J} = \frac{2}{n}.$$

Der Fehler in der berechneten Fläche beträgt also einen doppelt so großen aliquoten Theil der wahren Fläche als der Fehler der gemessenen Linien von den wahren Linien.

Gesetzt, man habe gemessen:

$a \pm \delta a = 550$, $b \pm \delta b = 1430$, und $\delta a = 0{,}001 \cdot a$, $\delta b = 0{,}001 \cdot b$, so ist:

$$(a \pm \delta a)(b \pm \delta b) = (1 \pm 0{,}002)\, J, \text{ d. h.:}$$

entweder $1{,}002 \cdot J = 786500$; $J = 784930$; $\delta J = 1570$;

oder $0{,}998 \cdot J = 786500$; $J = 788076$; $\delta J = 1576$.

§. 309. Untersuchen wir nun die erste Dreiecksformel, nämlich:

$$J = \tfrac{1}{2}\, ab \cdot \sin \gamma,$$

so gibt das eben Gesagte, wenn der Fehler der Linienmessung $= \frac{1}{n}$ der gemessenen Linie gesetzt wird,

$$J + \delta J = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot ab \cdot \sin(\gamma + \delta\gamma)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \cdot ab \cdot [\sin\gamma \cdot \cos\delta\gamma + \cos\gamma \cdot \sin\delta\gamma]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) ab \cdot [\sin\gamma + \delta\gamma \cdot \cos\gamma] \quad (\text{§. } 279)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma + \frac{1}{n}\, ab \sin\gamma + \tfrac{1}{2}\, ab\, \delta\gamma \cdot \cos\gamma + \frac{1}{n}\, ab\delta\gamma \cos\gamma$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n}\right) J + \frac{n+2}{2n} \cdot ab \cdot \delta\gamma \cdot \cos\gamma$$

$$\delta J = \frac{2}{n} J + \frac{n+2}{2n} \cdot ab \cdot \delta\gamma \cdot \cos\gamma.$$

$$J = \tfrac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma$$

$$\frac{\delta J}{J} = \frac{2}{n} + \frac{\frac{n+2}{2n} \cdot ab \cdot \delta\gamma \cdot \cos\gamma}{\tfrac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma}$$

$$= \frac{2}{n} + \frac{n+2}{n} \cdot \delta\gamma \cdot \mathrm{cotg}\,\gamma.$$

Für $\frac{1}{n} = 0{,}001$, $\gamma = 48^\circ\,18'\,20''$, $\delta\gamma = 5''$ ist, da $\frac{n+2}{n} = 1{,}002$,

$$\log \mathrm{cotg}\,\gamma = 9{,}9497771$$
$$\log \delta\gamma = 5{,}3845449$$
$$\log \frac{n+2}{n} = \frac{0{,}0008677}{0{,}3351897-5}$$
$$\frac{n'+2}{n} \cdot \delta\gamma\ \mathrm{cotg}\,\gamma = 0{,}000021$$
$$\frac{2}{n} = 0{,}002$$
$$\frac{\delta J}{J} = 0{,}002021.$$

Daß in der Formel für $\frac{\delta J}{J}$ die Seiten a, b des Dreiecks nicht weiter vorkommen, ist ganz natürlich; wir haben die Incremente δa, δb den Seiten a und b proportional angenommen, daher sind dann die Dreiecke J und $J + \delta J$ ähnlich, und das Verhältniß $\frac{\delta J}{J}$ bleibt stets dasselbe, wie man auch die Größe der Seiten selbst ändern mag. Auch sieht man, daß, je größer γ, desto kleiner der Fehler im Flächeninhalte werden muß.

Wir wollen nun noch die dritte Dreiecksformel untersuchen, hierbei aber annehmen, daß alle drei Seiten mit gleicher Genauigkeit gemessen seien, daß demnach ihre Fehler denselben aliquoten Theil, $\frac{1}{n}$, der Seite betragen. Dann ist:

$$\delta a = \frac{1}{n}\,a,\quad \delta b = \frac{1}{n}\,b,\quad \delta c = \frac{1}{n}\,c.$$

$$s + \delta s = (a+b+c) + \frac{1}{n}(a+b+c)$$

$$= \frac{n+1}{n}(a+b+c) = \frac{n+1}{n}\,s.$$

$$\frac{s}{2} + \delta\,\frac{s}{2} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{s}{2}.$$

$$\delta\,\frac{s}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{s}{2}.$$

$$\delta\left(\frac{s}{2} - a\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{s}{2} - a\right).$$

$$\delta\left(\frac{s}{2} - b\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{s}{2} - b\right).$$

$$\delta\left(\frac{s}{2} - c\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{s}{2} - c\right).$$

$$J + \delta J = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{s}{2} \cdot \left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot w. \quad (\S.\ 308,\ 3.)$$

$$\delta J = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1\right] \cdot w.$$

$$\frac{\delta J}{J} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1.$$

Setzt man hier $n = 1000$, so erhält man

$$\frac{\delta J}{J} = 0{,}002,$$

also wieder doppelt so groß als der Fehler der Linienmessung.

§. 310. Es ist wol hier der schicklichste Ort, eine Frage zur Sprache zu bringen, die in der geodätischen Literatur schon viele Controversen veranlaßt hat, nämlich: ob eine geneigte Fläche mehr Bodenertrag gebe als ihre Horizontalprojection, oder nicht. Jede geneigte Fläche verhält sich zu ihrer Horizontalprojection, wenn φ der Neigungswinkel ist, wie $1 : \cos \varphi$, ist also immer größer als diese, und der Unterschied ist um so größer, je größer der Winkel φ. Es ist nun aber eine unbestrittene Thatsache, daß alle Pflanzen auf einer geneigten Fläche nicht senkrecht zu dieser, sondern zur Horizontalebene, also vertical stehen. Bei gleicher gegenseitiger Entfernung der Stengel, Halme u. s. w. hätten hiernach auf der geneigten Fläche nicht mehr Pflanzen Platz als auf ihrer Horizontalprojection, wie dies Fig. 367 deutlich zeigt; denn wenn auch die auf der schiefen Fläche genommene Entfernung der einzelnen Pflanzen von einander größer ist als in der Horizontalprojection, so bleibt doch, bei gleicher Anzahl in beiden Fällen, die horizontale Entfernung dieselbe, so daß hiernach zu erwarten stände, daß auf der schiefen Fläche nicht mehr wachse als auf ihrer Horizontalprojection. Aber der Landmann verwendet auf die schiefe Fläche mehr Einsaat als auf ihre Horizontalprojection, und zwar in demselben Verhältniß, als jene größer ist als diese, wie dies namentlich mit der Säemaschine sich ziemlich genau abmißt; bei gleicher Bonität des Bodens werden daher die Pflanzen, wegen ihrer verticalen Stellung, dichter zu stehen kommen als auf der horizontalen Fläche. Nun gibt es aber gewisse Einflüsse, die im allgemeinen nicht gegen einander abzuwägen sind, weil sie von der Lage der Fläche nach der Himmelsgegend ab-

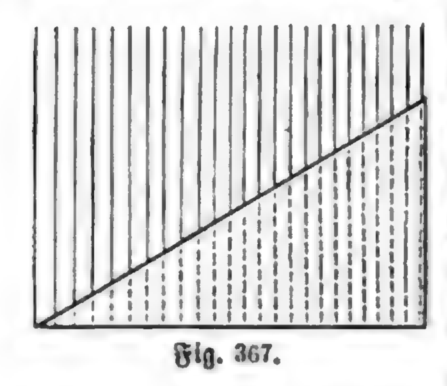


Fig. 367.

hängig sind; es sind dies hauptsächlich Luft, Licht, atmosphärische Niederschläge, Winde, Temperatur, besonders Schutz gegen kalte Winde u. s. w.; eine Neigung gegen Süden hat natürlich einen ganz andern Einfluß als eine gegen Norden; hier findet ein Unterschied in den Temperaturverhältnissen statt, während zwischen Ost und West Verschiedenheit der Niederschläge das wesentlich unterscheidende sein wird. Der horizontale Boden hält die Feuchtigkeit besser als der geneigte; bei leichtem Boden und in trockenen Jahren fördert dieser Umstand die Vegetation, während derselbe bei schwerem Boden und in nassen Jahren dem Gedeihen nachtheilig sein wird. Bei dem Zusammenwirken so vieler Factoren wird es also wol schwerlich gelingen, die Frage theoretisch zu entscheiden. Man muß sich also an die Erfahrung halten, und nach der übereinstimmenden Ansicht aller Landwirthe lehrt diese, daß die schiefe Fläche, bei gleicher Bonität, mehr Ertrag liefert, als eine ihrer Horizontalprojection gleiche Fläche. Wie genau übrigens diese Vergleiche angestellt sind; können wir nicht beurtheilen, obgleich wir dem Resultate Glauben schenken, da bewährte Agronomen, wie z. B. Thaer in Möggelin u. a., dieser Ansicht beipflichten. Die Geodäsie nimmt übrigens hierauf keine Rücksicht und bestimmt den Flächeninhalt stets nur nach der Horizontalprojection, was selbst von Landesbehörden auch dann, wenn die Vermessung zum Zwecke der Anfertigung von Steuerkatastern gemacht wird, als richtig und genügend angenommen wird.

D. Verwandlung der Figuren.

§. 311. Obgleich wir im Vorigen Methoden zur Inhaltsbestimmung gelehrt haben, welche schon ziemlich schnell zum Ziele führen, deren Anwendung auch in allen Fällen ohne Ausnahme möglich ist, kann es doch zuweilen wünschenswerth erscheinen, noch ein anderes Verfahren befolgen zu können; ganz besonders tritt dieser Fall ein, wenn es sich darum handelt, eine ausgeführte Inhaltsbestimmung nach einer andern Methode zu prüfen. Die Geometrie lehrt nun aber, jede beliebige geradlinige Figur in ein Dreieck oder Rechteck zu verwandeln, wovon dann der Inhalt leicht gefunden werden kann, wenn man Grundlinie und Höhe mißt. Freilich muß, wenn man ein richtiges Resultat erzielen soll, der Grundriß vollkommen richtig sein und die zur Verwandlung nöthige Construction mit der größtmöglichsten Genauigkeit ausgeführt werden, weil, wie wir §. 308 und 309 gesehen, kleine Unterschiede in den linearen Verhältnissen der Figuren bedeutend größere Abweichungen in der Größe der Flächen bedingen.

§. 312. Die Verwandlung der Figuren beruht auf dem elementaren

Satze, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe einander gleichflächig sind; dieser Satz aber läßt sich wieder zurückführen auf den andern, daß die Mittellinie eines Dreiecks dasselbe in zwei gleichflächige Dreiecke theilt. Es könnten diese und andere damit verwandte Sätze hier füglich als aus den Elementen bekannt vorausgesetzt werden; aber die gewöhnliche, in die meisten Lehrbücher übergegangene euklidische Behandlung ist so mangelhaft und entbehrt so sehr alles wissenschaftlichen Zusammenhangs, daß wir glauben, den Anfängern einen Dienst zu leisten, wenn wir hier versuchen, diesen Gegenstand auf eine den jetzigen Anforderungen an die Wissenschaft entsprechendere Weise zu begründen.

Lehrsatz 1. Jedes Dreieck wird durch seine Mittellinie in zwei gleichflächige Dreiecke getheilt.

Beweis. ABC (Fig. 368) sei ein Dreieck, CD eine Mittellinie desselben, so daß AD = BD; ziehe DE ⫲ BC und DF ⫲ AC, so ist DECF ein Parallelogramm, das durch die Diagonale CD in zwei identische Dreiecke getheilt wird; also ist Dreieck CDE = CDF. AD = BD, W. DAE = BDF und W. ADE = DBF; also Dreieck ADE ≡ BDF. Demnach ist auch:

Dreieck CDE + ADE = CDF + DBF,

d. h. Dreieck ACD = BCD.

Fig. 368.

Lehrsatz 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Beweis. ABC und DEF (Fig. 369) seien zwei Dreiecke, CJ und FM seien beziehlich ihre Höhen, und AB = DE, CJ = FM. Man trage das Dreieck DEF mit der Basis DE an die Basis AB des Dreiecks ABC an, so daß DEF diesseits AB zu liegen kommt, wenn ABC jenseits liegt; ABG sei das dem DEF identische Dreieck, GH = FM die Höhe von ABG. Ziehe CG. In den Dreiecken CJL und GHL ist dann CJ = FM = GH, W. CJL = GHL = 90°, W. CLJ = GLH, also Dreieck CJL ≡ GHL; folglich CL = GL. In dem Dreieck ACG ist also AL, und im Dreieck BCG, BL Mittellinie; folglich ist (nach Lehrsatz 1):

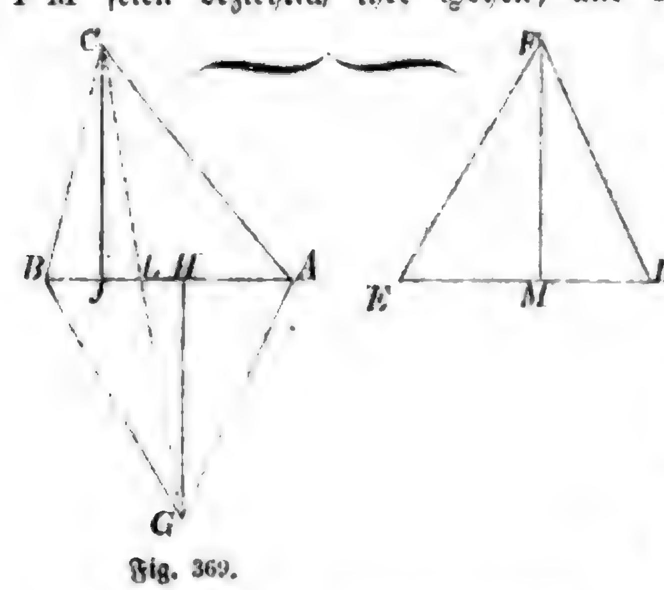


Fig. 369.

Dreieck ACL = AGL
Dreieck BCL = BGL

ACL + BCL = AGL + BGL,

Dreieck ABC = ABG. Da nun Dreieck ABG = DEF, so ist auch Dreieck ABC = DEF.

Die beiden Dreiecke können noch zwei andere Lagen zu einander annehmen, so nämlich, daß entweder die eine Höhe GH außerhalb des betreffenden Dreiecks fällt, wie in Fig. 370, oder daß beide Höhen CJ und GH außerhalb der Dreiecke fallen, wie in Fig. 371.

Fig. 370.

Fig. 371.

Im ersten Falle ist Dreieck CJL ≡ GHL, also CL = GL,

Dreieck ACL = AGL
Dreieck BCL = BGL

ACL — BCL = AGL — BGL
Dreieck ABC = ABG = DEF.

Im andern Falle ist Dreieck CJL ≡ GHL, also wieder CL = GL,

Dreieck BCL = BGL
Dreieck ACL = AGL

Dreieck BCL — ACL = BGL — AGL
Dreieck ABC = ABG = DEF.

Noch ist zu erinnern, daß Dreiecke, deren Grundlinien in dieselbe Gerade fallen und deren Spitzen in einer damit parallelen Geraden liegen, wo man dann sagt: „die Dreiecke liegen zwischen denselben Parallelen“, gleiche Höhen haben, weil die senkrechten Abstände zweier Parallelen überall einander gleich sind.

Mit diesen wenigen Elementen ausgerüstet, werden wir nun leicht alle hierher gehörigen Aufgaben lösen können.

§. 313. **Aufgabe.** Ein Viereck in ein ihm gleichflächiges Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. ABCD (Fig. 372) sei das gegebene Viereck; ziehe eine Diagonale desselben, z. B. AC; durch eine Ecke B, durch welche die Diagonale nicht geht, ziehe BE $\parallel$ AC, verlängere DC bis zum Durchschnitt mit BE in E, und ziehe AE, so ist Dreieck ADE = Viereck ABCD.

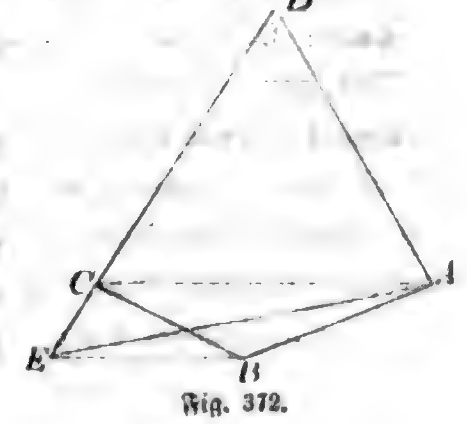


Fig. 372.

Beweis. BE ⫲ AC, also Dreieck ABC = AEC (§. 312, Lehrsatz 2), folglich auch ABC + ACD = AEC + ACD, d. h. ABCD = ADE.

Fig. 373.

Es ist leicht einzusehen, daß die Lösung im wesentlichen dieselbe bleibt, wenn das gegebene Viereck eine einspringende Ecke hat, wie Fig. 373, und daß man auch hier die Wahl zwischen beiden Diagonalen hat, und wie in Fig. 373 entweder die äußere AC, oder wie in Fig. 374 die innere BD ziehen kann. Im ersten Falle zieht man durch B, im andern durch A oder C parallel mit der Diagonale und erhält, wenn man in Fig. 373 noch CE zieht, das Dreieck CDE; in Fig. 374, wenn man BE zieht, das Dreieck ABE. Der Unterschied ist nur der, daß in Fig. 373 das Dreieck ABC oder das ihm gleiche ACE in Abzug kommt, während in Fig. 374 das Dreieck BCD oder das ihm gleiche BDE zu dem Dreieck ABD hinzugerechnet werden muß.

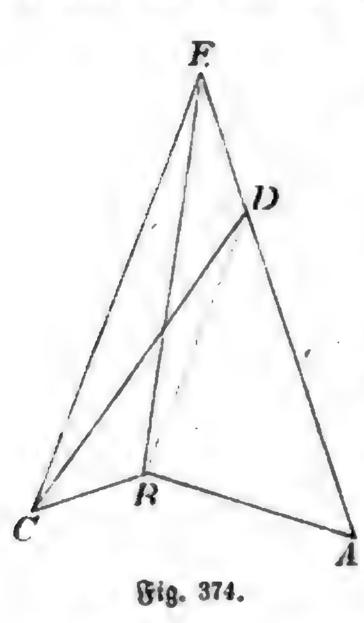


Fig. 374.

§. 314. Aufgabe. Ein beliebig gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

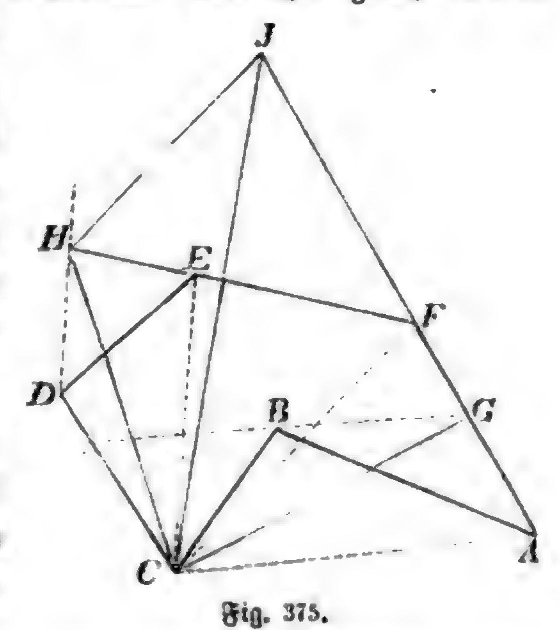


Fig. 375.

Auflösung. Es sei ABCDEF (Fig. 375) das gegebene Vieleck. Verwandle zunächst die einspringende Ecke ABC, ziehe AC, dann BG ⫲ AC, CG; so ist jetzt noch das Vieleck CDEFG zu verwandeln. Ziehe CE, dann DH ⫲ CE, verlängere FE bis H, ziehe CH, so hat man das Viereck CHFG. Ziehe CF, HJ ⫲ CF, verlängere GF bis J, ziehe CJ, so ist das Dreieck CGJ dem gegebenen Vieleck gleich.

Beweis folgt aus §. 313.

Das ganze Geschäft einer solchen Figurenverwandlung läßt sich durch eine zusammenhängende Construction ausführen, welche einige Erleichterung gewährt. Hat die Figur einspringende Ecken, so werden diese zunächst auf die oben gezeigte Weise fortgeschafft. Hat man nun eine Figur wie Fig. 376, die entweder überhaupt keine einspringenden Ecken hat, oder an der etwa vorhandene einspringende Ecken durch eine vorangegangene Construction fortgeschafft worden sind, so ziehe man von einer beliebigen Ecke F aus sämmtliche mög-

liche Diagonalen FB, FC, FD; durch den dem F nach einer Seite hin nächsten Eckpunkt E ziehe Ee ‡ der nächsten Diagonale FD, bis sie die Verlängerung der folgenden Seite CD in e trifft; durch e ziehe ed ‡ der zweiten Diagonale FC, bis sie die Verlängerung der folgenden Seite BC in d trifft; durch d ziehe dc ‡ der dritten Diagonale FB, bis sie die Verlängerung von AB in c trifft, so ist AFc das dem Vieleck ABCDEF gleichflächige Dreieck.

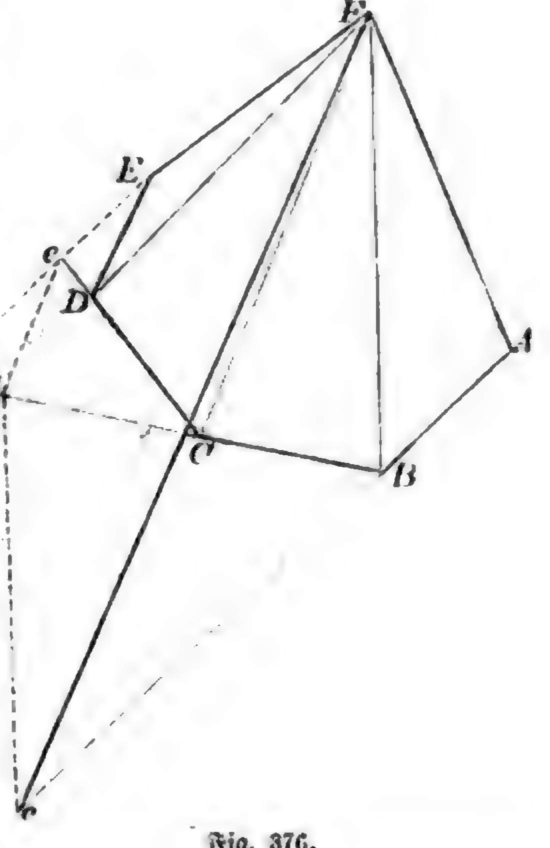


Fig. 376.

Beweis folgt leicht aus dem Frühern, wenn man noch die Transversalen Fe, Fd zieht.

Sollte der Inhalt einer so gegebenen und in ein Dreieck verwandelten Figur gefunden werden, so würde man eine Seite des Dreiecks nach dem Maßstabe des Grundrisses messen, dann auch die zu dieser Seite gehörige Höhe nach demselben Maßstabe messen, endlich aus diesen beiden Größen den Inhalt berechnen.

§. 315. **Aufgabe.** Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. ABC (Fig. 377) sei das gegebene Dreieck. Halbire AB in E, ziehe EF ‡ AC und CF ‡ AB, so ist AEFC das verlangte Parallelogramm.

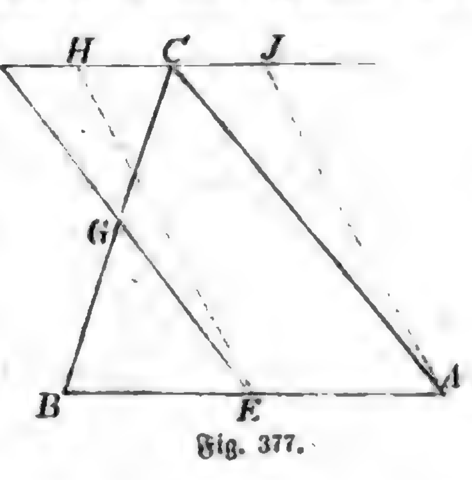


Fig. 377.

Beweis. Weil AE = BE und EG ‡ AC, ist auch BG = CG; ferner ist W. BGE = CGF, und weil CF ‡ BE auch W. GBE = GCF, also Dreieck BGE ≡ CGF, also BGE + AEGC = CGF + AEGC, d. h. Dreieck ABC = Parallelogramm AEFC.

§. 316. **Aufgabe.** Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung. ABCD (Fig. 378) sei ein Parallelogramm, welches in ein Rechteck zu verwandeln ist. In A errichte AF senkrecht zu AB, in B errichte BE senkrecht zu AB, verlängere CD bis F, so ist das Rechteck ABEF = ABCD.

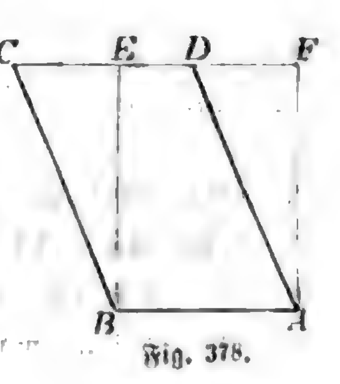


Fig. 378.

Beweis. Daß ABEF ein Rechteck ist, leuchtet von selbst ein. Ziehe die Diagonalen BD, AE.

Dreieck ABD = ½ · ABCD.
Dreieck ABE = ½ · ABEF
Dreieck ABD = ABE

ABCD = ABEF.

§. 317. Es kommt in der Praxis öfters vor, daß Ackerstücken, mit Beibehaltung ihres Flächenraums, eine andere Gestalt gegeben werden soll. In der Regel zieht man hierbei Rechtecke jeder andern Form vor; dabei aber tritt gewöhnlich noch die Bedingung hinzu, daß eine Seite eine bestimmte Lage bekomme, damit sich die Figur an die Nachbarstücke bequem anschließe.

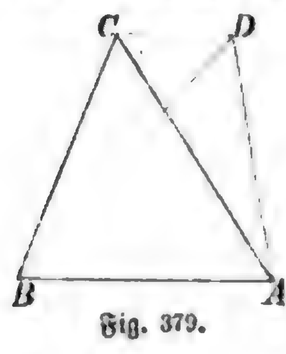


Fig. 379.

Bei Dreiecken hat man dabei nach Fig. 379 zu verfahren. ABC ist das gegebene Dreieck; die Seite AC soll die Lage AD bekommen, weshalb man durch C eine Parallele mit AB zieht; verbindet man dann noch B mit D, so ist ABD das verlangte Dreieck. Ebenso leicht gibt man dem Parallelogramm eine andere Lage: wäre z. B. ABCD (Fig. 380) das gegebene Parallelogramm, und

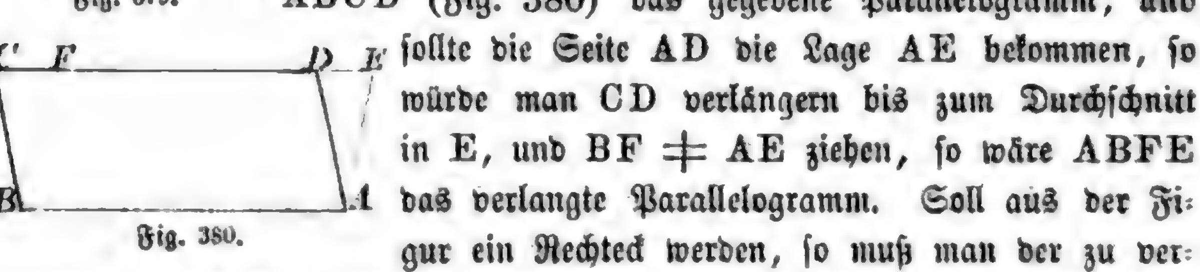


Fig. 380.

sollte die Seite AD die Lage AE bekommen, so würde man CD verlängern bis zum Durchschnitt in E, und BF ‡ AE ziehen, so wäre ABFE das verlangte Parallelogramm. Soll aus der Figur ein Rechteck werden, so muß man der zu verändernden Seite erst ihre neue Lage geben und die Figur (gewöhnlich Parallelogramm) dann erst in ein Rechteck verwandeln.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß in einem Rechtecke einer Seite eine andere Länge gegeben werden soll: z. B. in dem Rechtecke ABCD (Fig. 381) soll AB um AE verlängert werden, ohne den Flächeninhalt der Figur zu verändern. Man ziehe die Diagonale AC, dann die Gerade EC, und AF ‡ EC, verbinde F mit E, so ist Dreieck BEF = ABC. Zieht man nun noch FG ‡ AB und EG ‡ BC, so ist BFGE = ABCD.

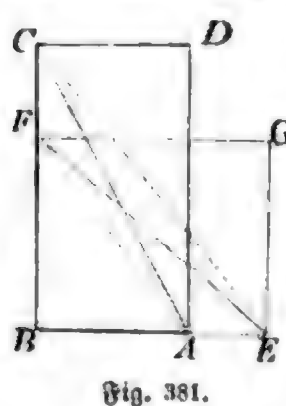


Fig. 381.

Daß man ein Parallelogramm oder Dreieck in derselben Weise verwandeln kann, leuchtet ein.

§. 318. **Aufgabe.** Ein Trapez in ein Rechteck mit gegebener Basis zu verwandeln.

Auflösung. ABCD (Fig. 382) sei das zu verwandelnde Trapez, AD ‡ BC, XY die gegebene Basis des Rechtecks. In der einen parallelen Seite BC nehme man einen beliebigen Punkt E an, ziehe Ef senkrecht zu

BC und AD, und trage die gegebene Basis XY von E aus darauf ab; es sei Ef = XY. In f errichte man ein Loth MN auf Ef, halbire AB in b und CD in a, ziehe aG und bH beide parallel mit Ef, verbinde EG, EH; sie schneiden AD in den Punkten p und q; durch p ziehe RS, durch q TV, beide parallel mit Ef; so ist RSVT das verlangte Rechteck.

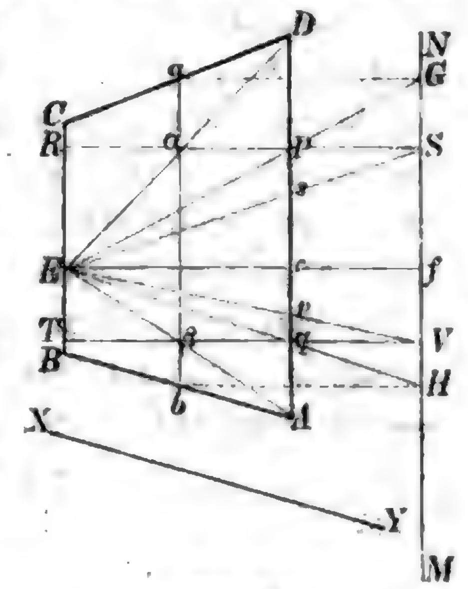


Fig. 382.

Beweis. Der Inhalt des Trapezes ABCD ist

$$= \frac{AD + BC}{2} \cdot Ec = ab \cdot Ec = GH \cdot Ec.$$

Da nun, im Dreiecke GEH, $pq \parallel GH$, und Ec Höhe in pEq, Ef Höhe in GEH ist, so ist ferner:

$$Ec : pq = Ef : GH,$$

oder

$$GH \cdot Ec = pq \cdot Ef,$$

d. h. die Fläche des Trapezes ABCD ist gleich der Fläche eines aus pq und Ef construirten Rechtecks, also an Inhalt gleich dem Rechtecke RSVT.

Es ist leicht zu sehen, daß gerade ebenso auch ein Dreieck in ein Rechteck mit gegebener Basis verwandelt werden könnte. Wäre z. B. das Dreieck AED (Fig. 382) zu verwandeln, so würde man DE und AE in α und β halbiren, αS und βV parallel mit Ef ziehen, dann ES, EV ziehen, welche AD in s und v schneiden; sv ist die Höhe des gesuchten Rechtecks.

Man begreift nun auch, daß, wenn man statt eines Rechtecks in einem besondern Falle lieber ein Dreieck von gleicher Fläche mit dem Trapeze ABCD herstellen wollte, das die Höhe Ef hätte, und dessen Grundlinie in die Gerade MN fiele, man nur fS und fV jedes zweimal so lang zu machen und die so bestimmten Punkte mit E zu verbinden hätte.

§. 319. **Aufgabe.** Ein beliebiges Vieleck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite der Lage, die andere der Größe nach gegeben ist.

Auflösung. ABCDEFG (Fig. 383) sei das gegebene Vieleck; die eine Seite des zu findenden Rechtecks soll in die Linie AG fallen, die andere dem Perpendikel CH von C auf AG gleich werden. Verlängere AG beliebig nach beiden Seiten hin; halbire alle Seiten außer AG in den Punkten a, b, c, d, e, f. Von den Punk-

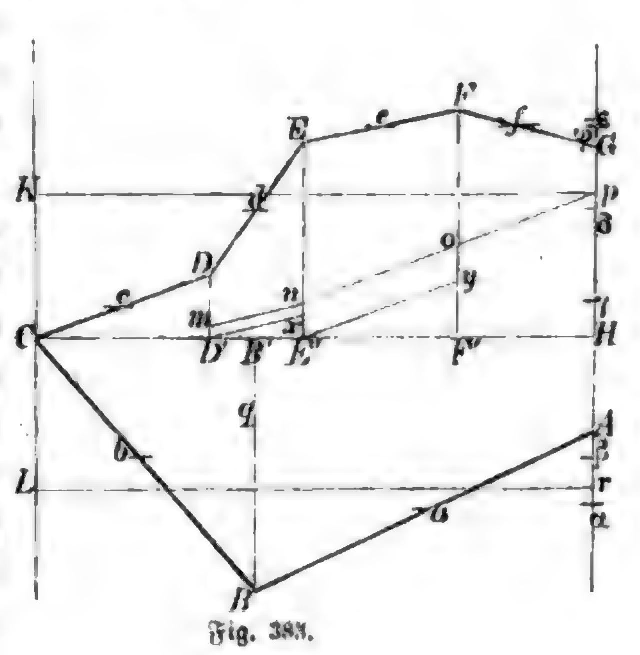


Fig. 383.

ten B, D, E, F fälle die Lothe BB′, DD′, EE′, FF′ auf CH; durch a, b, c, d, e, f ziehe Gerade parallel mit CH bis zur Seite AG oder ihrer Verlängerung, oder man bemerke auf AG blos die Durchschnitte α, β, γ, δ, ε, φ dieser Parallelen. Nun lege man ein Lineal an $C\gamma$ und bemerke den Durchschnitt m von $C\gamma$ mit dem Perpendikel DD′; ebenso lege man an $C\delta$ ein Lineal und ziehe durch m die Gerade $mn \mathrel{+\!\!\!\!=} C\delta$; sie schneidet das Perpendikel EE′ in n; durch n ziehe man $no \mathrel{+\!\!\!\!=} C\varepsilon$, durch o die $op \mathrel{+\!\!\!\!=} C\varphi$, dann bemerke man den Durchschnitt q von $C\beta$ mit BB′; durch q ziehe man $qr \mathrel{+\!\!\!\!=} C\alpha$. Nun ist rp die Seite des gesuchten Rechtecks.

Beweis. Dreieck CDD′ = Rechteck CH · D′m nach §. 318. Denkt man sich dann $D'x \mathrel{+\!\!\!\!=} mn$, so ist Dreieck $CH\delta \sim D'E'x$, also:

$$CH : H\delta = D'E' : E'x;$$

folglich:

$$CH \cdot E'x = H\delta \cdot D'E'.$$

Da nun $H\delta = \frac{DD' + EE'}{2}$ (§. 318), so ist $H\delta \cdot D'E'$ der Inhalt des Trapezes DD′E′E; also ist auch CH · E′x der Inhalt desselben Trapezes.

Ferner ist xn = D′m; also CH · xn = Dreieck CDD′; folglich CH · E′n = CDD′ + DEE′D′. Denkt man sich ferner $E'y \mathrel{+\!\!\!\!=} no$, so ist wieder, weil $no \mathrel{+\!\!\!\!=} C\varepsilon$, Dreieck $CH\varepsilon \sim E'F'y$, also:

$$CH : H\varepsilon = E'F' : F'y,$$

folglich:

$$CH \cdot F'y = H\varepsilon \cdot E'F';$$

$$H\varepsilon = \frac{EE' + FF'}{2};$$

also:

$$H\varepsilon \cdot E'F' = EE'F'F;$$

folglich:

$$CH \cdot H\varepsilon = EE'F'F.$$

Da nun oy = E′n, so ist CH · E′n = CH · oy, also:

$$CH \cdot oF' = CDD' + DD'E'E + EE'F'F.$$

Ebenso beweist man, daß:

$$CH \cdot Hp = CDD' + DD'E'E + EE'F'F + FF'HG,$$

also die Figur CDEFGH = CKpH.

Ganz übereinstimmend hiermit geschieht die Verwandlung der Figur ABCH in das Rechteck CHrL, so daß dann die ganze Figur ABCDEFG gleich dem Rechtecke rLKp sein wird.

Diese Construction kann auch bequem angewendet werden, um eine zum Theil oder ganz durch krumme Linien begrenzte Figur in ein Rechteck zu verwandeln, wenn man nur die Perpendikel so nahe an einander legt, daß die dazwischenliegenden Theile des Umfangs nahe genau als geradlinig angesehen werden können, und dieser Umstand ist es besonders, der diese Construction so brauchbar macht, während sie auch für geradlinige Figuren alle nur möglichen Vortheile darbietet.

§. 320. **Aufgabe.** Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite mit einer gegebenen geraden Linie parallel sei, während die andern beiden Seiten ihre Lage nicht ändern.

Auflösung. ABC (Fig. 384) sei das gegebene Dreieck, MN die Gerade, der die Seite AC parallel werden soll.

Fig. 384.

Ziehe CQ ⫲ MN. Gesetzt dann, A'C' sei parallel MN und Dreieck A'BC' = ABC, so ist, weil beide Dreiecke den Winkel B gemein haben, $AB \cdot BC = A'B \cdot BC'$.

Man setze nun $A'B = x$, $BC' = y$, so ist:

$$1)\quad xy = AB \cdot BC.$$

Da ferner CQ ⫲ A'C', so ist noch:

$$2)\quad x : y = BQ : BC.$$

Multiplicirt man (1) mit (2), so kommt:

$$3)\quad x^2 = AB \cdot BQ$$

$$4)\quad x = \sqrt{AB \cdot BQ}.$$

Dividirt man (1) durch (2), so erhält man:

$$5)\quad y^2 = \frac{BC^2 \cdot AB}{BQ}$$

$$6)\quad y = \sqrt{\frac{BC^2 \cdot AB}{BQ}}.$$

Um die Aufgabe zu lösen, braucht man nur eine der Linien x, y zu construiren; da die Formel für x einfacher ist, so wird man x vorziehen. Man erhält aber x, als mittlere Proportionale zwischen AB und BQ, wenn man über AB einen Halbkreis schlägt, in Q ein Loth auf AB errichtet, es bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in D verlängert, und die Sehne BD zieht; BD ist das gesuchte x. Man trage also das so gefundene BD von B aus auf BA ab, d. h. man mache BA' = BD, ziehe A'C' ⫲ MN und verlängere BC bis C', so ist Dreieck A'BC' = ABC.

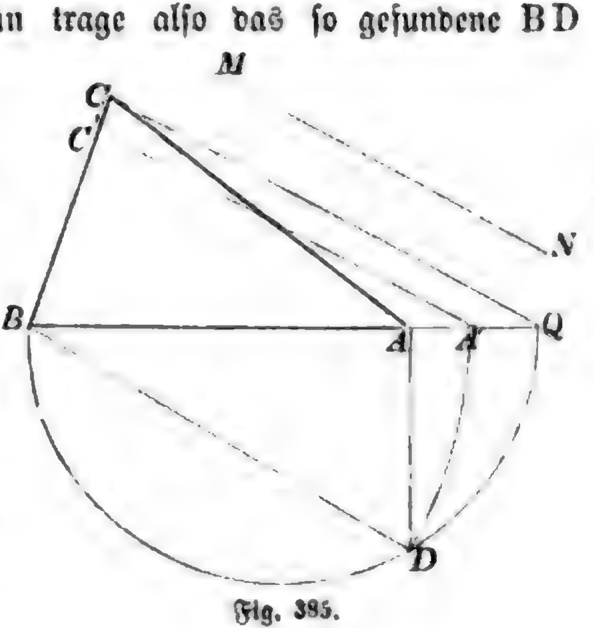


Fig. 385.

Bei gewissen Lagen der gegebenen Geraden MN fällt die damit Parallele CQ außerhalb des Dreiecks, wie z. B. in Fig. 385, wo man die mittlere Proportionale zwischen BA und BQ = BA' findet; so daß wieder A'BC' das gesuchte Dreieck wird.

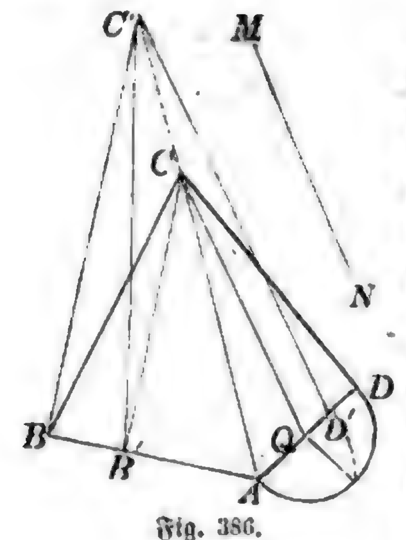


Fig. 386.

Ist ein in der beschriebenen Weise zu verwandelndes Dreieck Theil einer größern Figur, so entstehen durch die Verwandlung des Dreiecks neue Ecken; um diese fortzuschaffen muß man dann den übrigen Theil der Figur auch noch angemessen abändern. Z. B. es sei in Fig. 386 das Viereck ABCD gegeben; davon sei die Seite CD in die Lage C′D′, parallel mit MN gebracht worden, so entstände dadurch das Fünfeck ABCC′D′. Zieht man aber BC′, dann CB′ ∦ BC′, endlich C′B′, so erhält man wieder das Viereck AB′C′D′.

E. Theilung der Figuren.

§. 321. Theilung von Ackerstücken nach gegebenen Verhältnissen kommt in der Praxis sehr häufig vor. Das Verhältniß der einzelnen Theile rücksichtlich ihrer Größe hängt aber in der Regel von einer Menge Bedingungen ab, die eben nicht anders als durch die Größe der Stücke erfüllt werden können; dahin gehören insbesondere die Beschaffenheit des Bodens und seine Entfernung von bewohnten Orten oder von den Absatzwegen für die gewonnenen Producte.

Die Beschaffenheit der Ackerstücke wird durch eigene Taxatoren bestimmt. Man unterscheidet in der Regel sechs Klassen, wovon die erste den besten Acker, die sechste den schlechtesten begreift. Ein Ackerstück nach seiner Bodenbeschaffenheit abschätzen und die Klasse bestimmen, der es zugehört, heißt dasselbe **bonitiren**; sein Rang nach der Klassenzahl heißt seine **Bonität**. Wenn der Feldmesser einen Acker mit Rücksicht auf seine Bonität eintheilen soll, so muß ihm die Grenze jeder Klasse und der relative Werth jedes Stücks, d. h. die Klasse, der es angehört, sowie das Werthverhältniß der einzelnen Klassen genau angegeben werden.

Wir werden erst zeigen, wie einfache Theilungen, die jedoch immer ein in der Praxis vorkommendes Verhältniß in sich begreifen, gelöst werden, dann zu solchen übergehen, wo noch besondere Verhältnisse hinzutreten, welche die Erfüllung eigenthümlicher Bedingungen nöthig machen.

Die Theilung der Figuren kann durch Construction und durch Rechnung bewirkt werden; wir werden im Folgenden Beispiele beider Methoden liefern, ohne jedoch besondere Abschnitte daraus zu machen.

§. 322. **Aufgabe.** Ein Dreieck durch Linien, die von einer Ecke aus-

laufen, in mehrere Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m, n, p.... verhalten.

Auflösung. Das Dreieck ABC (Fig. 387) soll durch Linien, welche von der Ecke C ausgehen, in drei Theile nach dem Verhältniß m : n : p getheilt werden. Theile die der Ecke C gegenüberliegende Seite AB in drei Theile, welche sich wie m : n : p verhalten. (Bekanntlich geschieht dies dadurch, daß man von A aus eine Gerade AM unter einem beliebigen Winkel mit AB zieht, auf AM von A aus drei Linien Ad, de, eb abträgt, welche sich wie m : n : p verhalten, dann Bb zieht, und durch e und d die Linien eE, dD parallel mit Bb legt. D und E sind dann die gesuchten Theilpunkte.) Zieht man dann CD, CE, so ist:

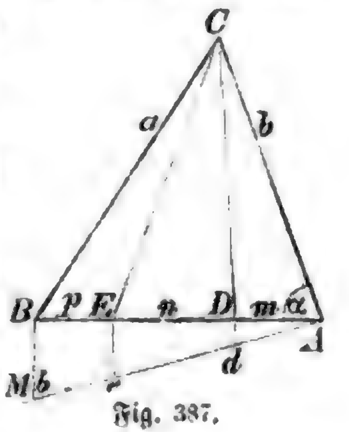


Fig. 387.

$$\text{Dreieck } ACD : CDE : CEB = m : n : p,$$

weil sich Dreiecke von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien verhalten, Dreiecke aber, deren Grundlinien in derselben Geraden liegen und die eine gemeinsame Spitze haben, auch gleiche Höhen haben.

Sollte das Dreieck ABC von der Ecke C aus in gleiche Theile getheilt werden, so würde man die Grundlinie AB, statt nach dem Verhältniß m : n : p, in drei gleiche Theile theilen, im übrigen dagegen ebenso verfahren wie oben.

Sollte die Theilung durch Rechnung geschehen und wäre c das Maß der zu theilenden Seite AB, so trage man von A aus die Theile:

$$AD = \frac{c}{m + n + p} \cdot m,$$

$$DE = \frac{c}{m + n + p} \cdot n,$$

$$BE = \frac{c}{m + n + p} \cdot p,$$

welche zusammen wieder c ausmachen, ab, und ziehe CD, CE. Natürlich braucht man nur die ersten zwei dieser Theile abzutragen, da der Rest der Linie AB von selbst die richtige Größe bekommen wird. Um indeß den beim Auftragen des ersten Theils AD etwa begangenen Fehler nicht auch auf die nächstfolgenden Theile überzutragen, trage man immer lieber von A aus die Stücke

$$AD = \frac{c}{m + n + p} \cdot m, \quad AE = \frac{c}{m + n + p} (m + n)$$

auf.

Man kann endlich auch noch auf folgende Weise verfahren: man bestimme den Inhalt J des Dreiecks ABC, berechne daraus die Theile

$$J_1 = \frac{J}{m + n + p} \cdot m, \; J_2 = \frac{J}{m + n + p} \cdot n, \; J_3 = \frac{J}{m + n + p} \cdot p;$$

ist dann b das Maß der Seite AC, so ist:

$$b \cdot AD \cdot \sin\alpha = 2 \cdot J_1,$$
$$b \cdot AE \cdot \sin\alpha = 2\,(J_1 + J_2),$$
$$b \cdot AB \cdot \sin\alpha = 2\,(J_1 + J_2 + J_3)$$

u. s. w., falls mehr als drei Theile entstehen sollten. Also ist dann:

$$AD = \frac{2\,J_1}{b \cdot \sin\alpha},\quad AE = \frac{2 \cdot (J_1 + J_2)}{b \cdot \sin\alpha}\ \text{u. s. w.}$$

§. 323. **Aufgabe.** Ein Dreieck von einem in einer Seite liegenden Punkte aus in mehrere Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m, n, p .... verhalten.

Auflösung. ABC (Fig. 388) sei das gegebene Dreieck, P der in der Seite BC gegebene Punkt, von dem die Theilungslinien ausgehen sollen. Theile die Seite BC nach dem Verhältniß m : n : p : .... in den Punkten D, E .... Ziehe AP und durch die Theilungspunkte D, E .... die Geraden Dd, Ee .... parallel mit AP, dann Pd, Pe ...., so sind BPd, dPeA, PeC die verlangten Theile.

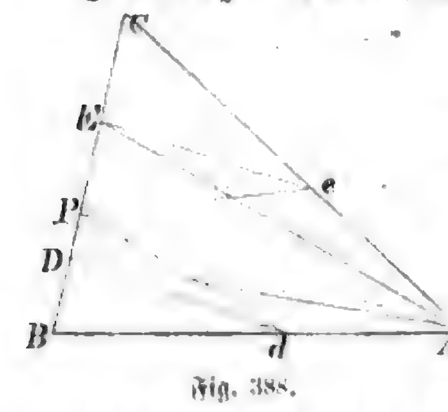


Fig. 388.

Beweis. Ziehe AD, AE, so ist:

Dreieck ABD : ADE : AEC = BD : DE : EC = m : n : p.

Aber Dreieck ADd = DPd, also Dreieck ADB = BPd.

Dreieck ADP = AdP und Dreieck AEe = EPe,

also: Dreieck ADE = AdPe.

Dreieck AEe = EPe, also Dreieck AEC = PeC.

Also stehen nun auch die Theile

BPd, dPeA und ePC

in dem Verhältnisse m : n : p.

Sollte das Dreieck ABC vom Punkte P aus in mehrere gleiche Theile getheilt werden, so würde man die Seite BC in ebenso viel gleiche Theile theilen.

Bei der Theilung auf rechnendem Wege würde man die Maße a, b, c der Seiten des Dreiecks ABC, sowie die Lage des Punktes P gegen die Ecken B und C durch das Maß von BP = d zu bestimmen haben. Sind dann wieder m, n, p die gegebenen Verhältnißzahlen, und ist m + n + p = s, sind ferner (in Fig. 389) PD, PE die gesuchten Theilungslinien und setzt man BD = x, CE = y, so ist:

Dreieck BPD : BCA = m : s,

aber Dreieck BPD : BCA = d · x : a · c*),

*) Zwei Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten. Sind nämlich b, c die Seiten

also $$d \cdot x : a \cdot c = m : s$$
$$x = \frac{a \cdot c}{d \cdot s} \cdot m.$$

Ebenso erhält man:
$$(a - d) \cdot y : a \cdot b = p : s$$
$$y = \frac{ab}{(a - d) \cdot s} \cdot p.$$

Fiele y so groß aus, daß es über A hinausreichte, also $y > b$, so fiele der Punkt E noch in die Linie AB, wie E'. Ebenso fiele D in AC, wenn $x > BA$ wäre. Man kann daher von vornherein von beiden Punkten D, E annehmen, daß sie in dieselbe Seite, etwa AB fallen, wie D und E'; ist dann $BE' = y'$, so hat man:

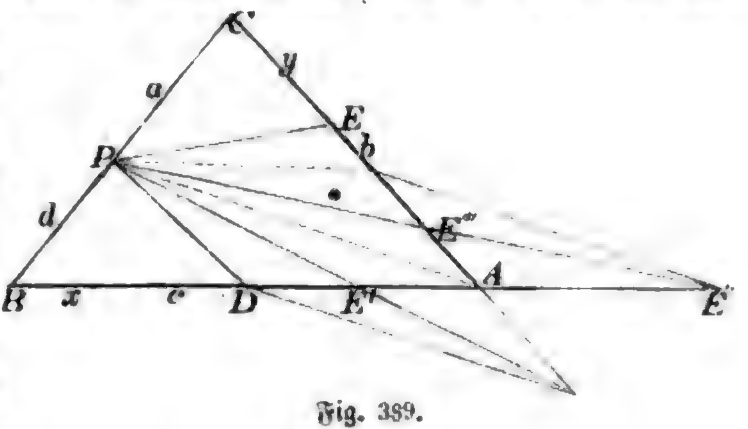


Fig. 389.

$$d \cdot y' : a \cdot c = m + n : s,$$
also $$y' = \frac{a \cdot c \cdot (m + n)}{d \cdot s};$$
man kann daher für einen vorliegenden speciellen Fall y' berechnen und es von B aus auf BA abtragen; fällt es, wie E'', über A hinaus, so gibt die Linie PE'' den Punkt E''' in AC dennoch bestimmt an.

Auch könnte man wieder setzen:
$$dx \cdot \sin \beta = 2\, J_1$$
$$ac \cdot \sin \beta = 2\, J$$
$$J : J_1 = ac : dx = s : m.$$
$$x = \frac{acm}{ds} \text{ wie oben,}$$
oder $$x = \frac{2\, J_1}{d \cdot \sin \beta}.$$

Für $BE' = y'$ erhielte man dann, wenn $DPE' = J_2$ gesetzt wird,
$$dy' \cdot \sin \beta = 2\, (J_1 + J_2)$$
$$y' = \frac{2\, (J_1 + J_2)}{d \cdot \sin \beta},$$

---

des einen, b', c' die des andern Dreiecks, α der beiden Dreiecken gemeinsame Winkel, J der Inhalt des ersten, J' der des andern, so ist:
$$J = \tfrac{1}{2}\, bc \cdot \sin \alpha$$
$$J' = \tfrac{1}{2}\, b'c' \cdot \sin \alpha$$
$$J : J' = bc : b'c'.$$

während J_1 und $J_1 + J_2$ sich dadurch bestimmen, wenn J gefunden, daß man setzt:

$$J : J_1 = s : m; \quad J_1 = \frac{m}{s} \cdot J;$$

$$J : J_1 + J_2 = s : m + n; \quad J_1 + J_2 = \frac{m + n}{s} \cdot J.$$

§. 324. **Aufgabe.** Ein Dreieck durch einen innerhalb desselben gelegenen Punkt in mehrere Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m, n, p, q .... verhalten.

Auflösung. Es sei ABC (Fig. 390) das gegebene Dreieck, P der Punkt im Innern des Dreiecks, von welchem aus die Theilung geschehen soll.

1) Durch Construction. Man theile eine beliebige Seite des Dreiecks, etwa AB, nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p, q; E, F, G seien die Theilpunkte. Durch die der getheilten Seite gegenüberliegende Ecke C und den gegebenen Punkt P ziehe CP und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit AB in D. Durch den Theilpunkt E ziehe EH parallel mit der nächst anliegenden Seite BC, durch F und G die Parallelen FK, GJ mit der Seite AC. Ferner ziehe man PA, PB, dann parallel mit PA die Linien JJ′ und KK′, parallel mit PB die Linie HH′; endlich noch die Linien PJ′, PK′ und PH′; so sind die Dreiecke CPH′, CPJ′ und die Vierecke BH′PK′, PJ′AK′ die verlangten Theile.

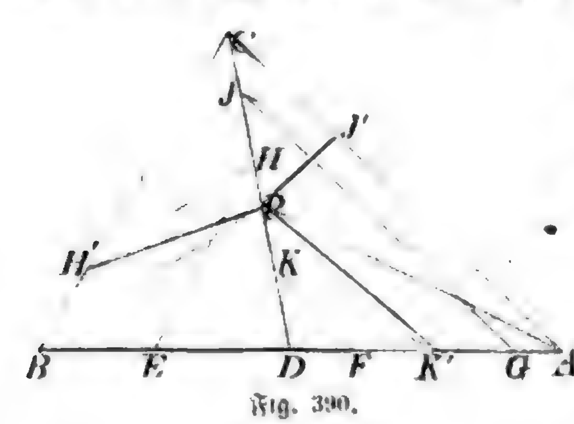


Fig. 390.

Beweis. Man denke sich die Linien CE, CF, CG gezogen, so stehen die Dreiecke CBE, CEF, CFG und CGA in dem Verhältniß der Zahlen m : n : p : q, weil sie gleiche Höhe haben und ihre Grundlinien in diesem Verhältniß stehen. Zieht man dann noch BH, so ist, weil EH ∦ BC, Dr. CBE = CBH; und Dr. BHH′ = PHH′, weil HH′ ∦ BP; also ist dann auch Dr. BCH = PCH′.

Ferner ist Dr. ACG = ACJ und Dr. AJJ′ = PJJ′, also auch Dr. ACG = PCJ′. Dann ist weiter Dr. ACF = ACK und Dr. APK = APK′, also Dr. ACF = ACPK′. Nun war Dr. ACG = PCJ′, also ist Dr. FCG = AJ′PK′, und es bleibt dann noch Dr. ECF = BH′PK′ übrig.

2) Durch Rechnung. Der Punkt P (Fig. 391), von dem die Theilungslinien ausgehen sollen, sei gegeben durch das Loth PP′ und die Entfernung AP′, und zwar sei PP′ = d, AP′ = e. Von P ziehe man eine beliebige Gerade, etwa PB, als erste Theilungslinie, berechne den

Inhalt J des Dreiecks ABC, ferner die Inhalte der einzelnen Theilstücke, nämlich:

$$J_1 = \frac{m}{s} \cdot J$$

$$J_2 = \frac{n}{s} \cdot J$$

$$J_3 = \frac{p}{s} \cdot J \text{ u. s. w.}$$

Wäre nun PD die zweite Theilungslinie, also BPD das erste Theilstück, so wäre:

$$d \cdot Bd = 2\,J_1$$

$$Bd = \frac{2\,J_1}{d}.$$

Sobald die Theilungslinien die Verlängerung von BA erreichen, wie z. B. PN, muß man sie nach der Seite AC hin bestimmen. Wäre z. B. PD die letzte innerhalb BA fallende Theilungslinie, und sollte $J_r = \frac{r}{s} J$ der an PD angrenzende Theil werden, und die danach zu bestimmende Theilungslinie fiele nach N, so müßte man den Inhalt des Dreiecks DPA von J_r abrechnen und den Rest

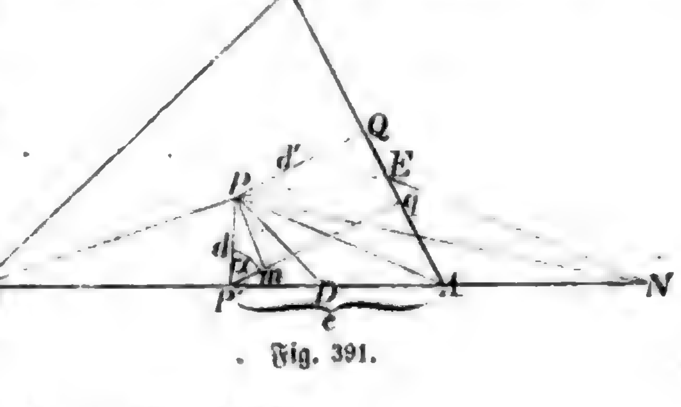


Fig. 391.

$$J_r - DPA = \text{Dr. } APN$$

auf AC übertragen. Da das Dreieck ABC gegeben ist, so kann man immer AB = c als bekannt ansehen, weil es entweder wirklich gegeben ist, oder doch aus den gegebenen Stücken berechnet werden kann. Dann ist

$$AD = c - BD$$

$$\text{Dr. } APD = \frac{d \cdot AD}{2}$$

$$APN = J_r - \frac{d \cdot AD}{2} = J_r - \frac{d\,(c - BD)}{2}$$

$$= \frac{r + m}{s} \cdot J - \frac{dc}{2}.$$

Ist nun PQ = d' der senkrechte Abstand des Punktes P von AC, AE = x die Basis des dem Dreieck PAN gleichen, aber auf AC übergetragenen Dreiecks (APE), so ist:

$$d' \cdot x = 2 \cdot APN = \frac{2\,(r + m)}{s} \cdot J - dc$$

$$x = \frac{2\,(r + m) \cdot J}{d's} - \frac{dc}{d'}.$$

Das Loth d' kann aus den bekannten Größen des Dreiecks ABC berechnet werden. Zieht man nämlich P'q ⫲ PQ und Pm ⫲ AC, so ist W. PP'q = ABC = α und PQ = d' = P'q — P'm = c · sin α — d · cos α. Also hat man:

$$x = \frac{2\,(r + m) \cdot J - dcs}{s\,(c \cdot \sin \alpha - d \cdot \cos \alpha)},$$

wodurch die Lage der Theilungslinie PE bestimmt ist.

§. 325. **Aufgabe.** Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer Seite desselben parallel laufen, in mehrere Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen m, n, p, q .... verhalten.

Auflösung. 1) Durch Construction. ABC (Fig. 392) sei das gegebene Dreieck; BC die Seite, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen. Theile AC von A aus nach dem Verhältniß m : n : p : q ....; über AC als Durchmesser schlage einen Halbkreis, errichte in den Theilpunkten F, E, D die Lothe FF', EE', DD', und mache AF'' = AF', AE'' = AE', AD'' = AD'; ziehe F''M, E''N, D''P alle parallel BC, so sind F''M, E''N, D''P die verlangten Theilungslinien.

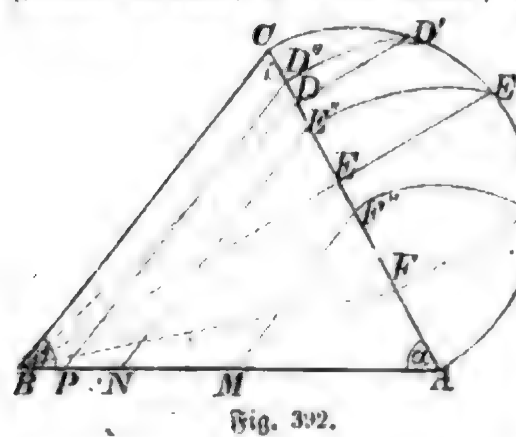


Fig. 392.

Beweis. Ziehe BD, BE, BF; da AC nach dem Verhältniß m : n : p : q getheilt ist, so ist

Dreieck ABF : FBE : EBD : DBC = m : n : p : q,

und durch die ausgeführte Construction sind blos die Linien BF, BE, BD nach §. 320 BC parallel gelegt worden.

2) Durch Rechnung. Es sei AC = a gegeben, und man setze AF'' = x, AE'' = x', AD'' = x'', so sind x, x', x'' zu suchen. Man setze der Kürze halber m + n + p + q = s, so muß werden:

Dr. AMF'' : ABC = $AF''^2 : AC^2 = x^2 : a^2$ = m : s,
Dr. ANE'' : ABC = $AE''^2 : AC^2 = x'^2 : a^2$ = (m + n) : s,
Dr. APD'' : ABC = $AD''^2 : AC^2 = x''^2 : a^2$ = (m + n + p) : s.

Also ist:

$$x = a\sqrt{\frac{m}{s}};\quad x' = a\sqrt{\frac{m+n}{s}};\quad x'' = a\sqrt{\frac{m+n+p}{s}}.$$

Oder man bestimme den Inhalt J des Dreiecks ABC, sowie die Inhalte der Theile, nämlich:

$$J_1 = \frac{m}{s} \cdot J; \quad J_2 = \frac{n}{s} J; \quad J_3 = \frac{p}{s} \cdot J; \quad J_4 = \frac{q}{s} J.$$

Sind dann die Winkel α, β, γ des Dreiecks ABC gefunden, so ist:

$$\frac{x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \sin\beta} = J_1; \; x = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin\beta \cdot J_1}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}} = \sqrt{\frac{2\, m \sin\beta \cdot J}{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}}.$$

$$\frac{x'^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\beta} = J_1 + J_2; \; x' = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin\beta \cdot (J_1 + J_2)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(m + n) \sin\beta \cdot J}{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}}$$

$$\frac{x''^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\beta.} = J_1 + J_2 + J_3; \; x'' = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin\beta\,(J_1 + J_2 + J_3)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(m + n + p) \cdot \sin\beta \cdot J}{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}}.$$

§. 326. **Aufgabe.** Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer gegebenen Linie parallel laufen, in mehrere Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m, n, p, q .... verhalten.

Auflösung. 1) Durch Construction. ABC (Fig. 393) sei das gegebene Dreieck, MN die Linie, der die Theilungslinien parallel werden sollen. Ziehe CD ∦ MN; theile AB nach dem gegebenen Verhältniß m : n : p : q in den Punkten E, F, G. Ueber BD beschreibe einen Halbkreis, ebenso auch einen Halbkreis über AD; errichte die Lothe EE′, FF′, GG′; mache Ae = AE′, Af = AF′, Bg = BG′; ziehe ee′, ff′, gg′ alle parallel mit CD; so sind Aee′, ee′f′f, ff′g′g, gg′B die verlangten Theilungsstücke.

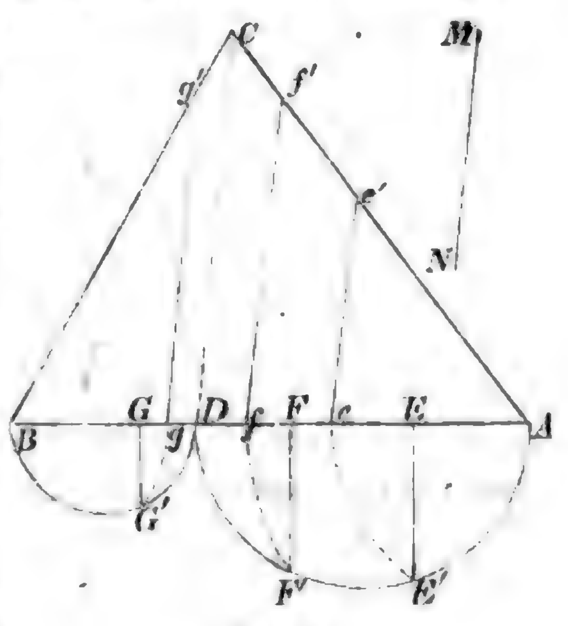


Fig. 393.

Beweis. Ziehe CE, CF, CG, so stehen die Dreiecke ACE, ECF, FCG, GCB in dem Verhältniß m : n : p : q, und durch die fernere Construction sind blos die Seiten CE, CF, CG nach §. 320 der Linie MN parallel gelegt worden.

2) Durch Rechnung. Man ziehe CD parallel mit der gegebenen Linie MN und bestimme AD = d. Das Maß der Seite AB sei = c und m + n + p + q = s. Sind dann ee′, ff′, gg′ die verlangten Theilungslinien, so verhält sich:

$$\text{Dr. } Aee' : ABC = m : s.$$
$$\text{Dr. } Aff' : ABC = (m + n) : s.$$
$$\text{Dr. } Agg' : ABC = (m + n + p) : s.$$

Ferner ist:

$$\text{Dr. } ABC : ACD = c : d.$$
$$\text{Dr. } ABC = \frac{c}{d} \cdot ACD.$$

Setzt man diesen Werth statt Dr. ABC in obige Gleichungen, so erhält man:

$$\text{Dr. } Aee' : \frac{c}{d} \cdot ACD = m : s.$$
$$\text{Dr. } Aff' : ACD = (m + n) \cdot \frac{c}{d} : s.$$
$$\text{Dr. } Agg' : ACD = (m + n + p) \cdot \frac{c}{d} : s.$$

Aber

$$\text{Dr. } Aee' : ACD = Ae^2 : d^2$$
$$\text{Dr. } Aff' : ACD = Af^2 : d^2$$
$$\text{Dr. } Agg' : ACD = Ag^2 : d^2.$$

Folglich:

$$Ae^2 : d^2 = m \cdot \frac{c}{d} : s$$
$$Af^2 : d^2 = (m + n) \cdot \frac{c}{d} : s$$
$$Ag^2 : d^2 = (m + n + p) \cdot \frac{c}{d} : s.$$

Demnach:

$$Ae = \sqrt{\frac{mcd}{s}}.$$
$$Af = \sqrt{\frac{(m + n)\, cd}{s}}$$
$$Ag = \sqrt{\frac{(m + n + p)\, cd}{s}}.$$

Oder man berechne, wie in der vorigen Aufgabe, den Inhalt J des Dreiecks ABC, sowie den der Theilstücke, nämlich:

$$J_1 = \frac{m}{s} \cdot J; \quad J_2 = \frac{n}{s} \cdot J; \quad J_3 = \frac{p}{s} \cdot J; \quad J_4 = \frac{q}{s} \cdot J.$$

Heißen dann die Winkel bei A und D beziehlich α und δ, so ist:

$$J_1 = \frac{Ae^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta}{2 \cdot \sin(\alpha + \delta)}.$$

$$J_1 + J_2 = \frac{Af^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta}{2 \cdot \sin(\alpha + \delta)}$$ u. s. w. Daher:

$$Ae = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin(\alpha + \delta)}{\sin\alpha \cdot \sin\delta} \cdot J_1}; \quad Af = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin(\alpha + \delta)}{\sin\alpha \cdot \sin\delta}\,(J_1 + J_2)}$$

u. s. w.

§. 327. **Aufgabe.** Ein Viereck durch Linien, die von einer Ecke ausgehen, in mehrere Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m, n, p, q, r .... verhalten.

Auflösung. 1) Durch Construction. ABCD (Fig. 394) sei das gegebene Viereck; es sollen die Theillinien von der Ecke C ausgehen. Verwandle ABCD in ein Dreieck. Zu diesem Zwecke ziehe AC, dann DE $\parallel$ AC, verlängere BA bis zum Durchschnitt in E, ziehe CE, so ist Viereck ABCD = Dreieck BCE (§. 313).

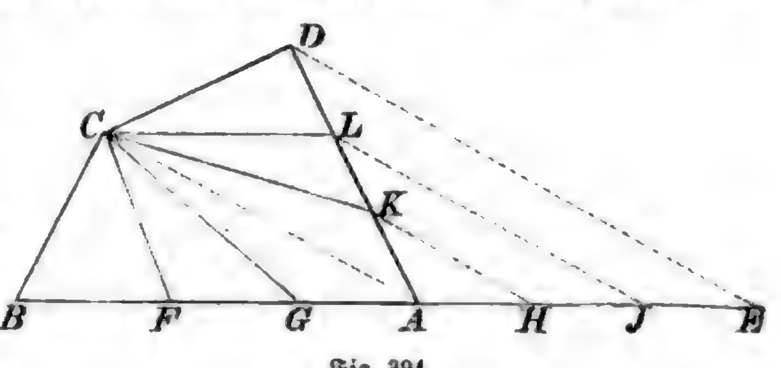


Fig. 394.

Theile die Seite BE nach dem gegebenen Verhältniß m : n : p : q : r in den Punkten F, G, H, J, ziehe CF, CG, so haben die Dreiecke BCF und FCG die verlangte Größe; GCH, HCJ, JCE würden auch die richtige Größe bekommen, aber da Theile derselben außerhalb des Vierecks liegen, so müssen diese noch in die Figur hineingeschafft werden. Ziehe deshalb HK $\parallel$ AC, auch JL $\parallel$ AC, endlich die Linien CK, CL, so sind das Viereck AGCK und die Dreiecke KCL und LCD die noch gesuchten Theile, denn, da AC $\parallel$ HK, so ist Dreieck ACH = ACK, und weil AC $\parallel$ JL, ist Dreieck ACJ = ACL, folglich HCJ = KCL u. s. w.

2) Durch Rechnung. Man berechne den Inhalt J des Vierecks ABCD (Fig. 395) und denjenigen der einzelnen Theile J_1, J_2, J_3 u. s. w. Dann bestimme man das Loth CE = h von C auf AB. Ist nun CF eine der Theillinien, so ist:

$$h \cdot BF = 2\, J_1$$

also

$$BF = \frac{2\, J_1}{h}.$$

Fig. 395.

Oder man drücke den Inhalt des Dreiecks CBF mittels der Seiten BF, BC = b und des Winkels β aus, so ist:

$$b \cdot BF \cdot \sin \beta = 2\, J_1$$

$$BF = \frac{2\, J_1}{b \cdot \sin \beta}.$$

In derselben Weise bestimmen sich alle Theilpunkte auf der Seite AB; gerade ebenso verfährt man aber mit denen, welche auf AD fallen.

§. 328. **Aufgabe.** Ein Viereck durch Linien, die von einem in einer Seite liegenden Punkte ausgehen, nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Es sei ABCD (Fig. 396) das gegebene Viereck, P der

Punkt in der Seite AB, von dem die Theilungslinien ausgehen sollen; m, n, p, q, r mögen die Verhältnißzahlen der einzelnen Theile sein. Verwandle das Viereck ABCD in ein Dreieck; ziehe AC und durch D die Gerade DE ∦ AC, so ist Dreieck BCE = Viereck ABCD. Theile die Seite BE nach dem gegebenen Verhältniß in den Punkten M, N, Q, R; ziehe CP und dann MM′, NN′, QQ′, RR′ alle parallel mit CP.

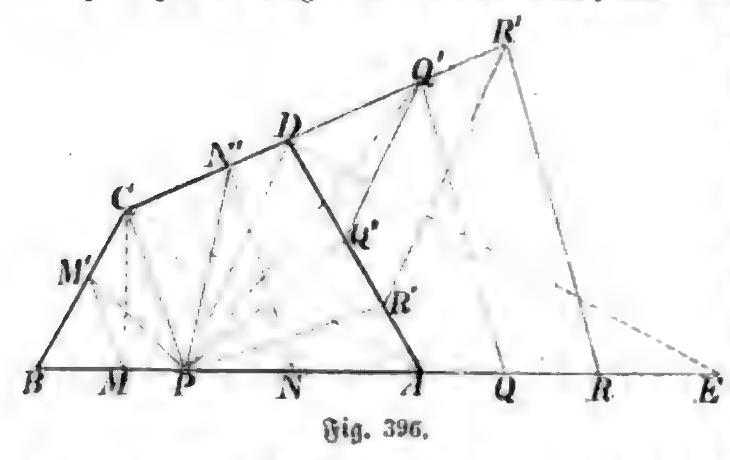


Fig. 396.

Endlich ziehe PM′, PN′, so sind BPM′, M′PN′ solche Stücke, wie sie durch die Aufgabe verlangt werden.

Beweis. Zieht man CM, CN ....., so sind BCM, MCN richtige Theilungsstücke. Da MM′ ∦ CP, so ist Dr. CMM′ = MPM′, also Dreieck BCM = BM′P. Ferner ist MCP = M′CP, NCP = N′CP, also MCN = M′PN′.

Zieht man PQ′, so wird N′PQ′ ein richtiges Theilstück; denn es ist:

Dr. PCQ = PCQ′, weil QQ′ ∦ CP,
Dr. PCN = PCN′, weil NN′ ∦ CP.
Dr. NCQ = N′PQ′.

Ziehe Q′Q″ ∦ PD; ziehe auch PQ″, so ist, wie oben gezeigt:

Dr. NCQ = N′PQ′.
Nun ist auch Dr. PDQ′ = PDQ″
Dr. NCQ = N′PQ″,

wenn man das gemeinsame Stück N′PD hinzunimmt. Ferner ist:

Dr. PCR = PCR′
Dr. PCQ = PCQ′
Dr. QCR = Q′PR′
Dr. PDR′ = PDR″
Dr. QCR = Q″PR″.

§. 329. **Aufgabe.** Ein Viereck durch Linien, welche von einem innerhalb desselben gegebenen Punkte ausgehen, nach gegebenen Verhältnissen in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. Es sei gegeben das Viereck ABCD (Fig. 397); im Innern desselben der Punkt P; das Viereck von P aus nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p, q, r .... zu theilen.

Man verwandle das Viereck ABCD in ein Dreieck, das seine Spitze in P hat, und dessen eine Seite in die Richtung von AB fällt. Durch D ziehe DV ∦ AC, so ist Viereck ABCD = Dreieck BCV. Dann ziehe man

Cp ‡ BA, ziehe BP bis sie Cp in p schneidet, so ist wieder Dr. BCV = BpV. Nun ziehe man pW ‡ PV und PW, so ist Dr. BPW = Dr. BpV; denn Dr. PpV = PVW, also auch Viereck ABCD = Dr. BPW.

Nun theile man BW nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p ...., z. B. in den Punkten E, F, G; ziehe PE, PF, PG; so sind BPE, EPF, FPG, GPW Theilungsstücke von der geforderten Größe, nur daß die letzten drei nicht ganz im Viereck liegen. Um sie in das Viereck hineinzubringen ziehe man PA und FH ‡ PA, so ist Dr. PAF = PAH, also EPF = EPHA ein richtiges und richtig gelegenes Theilstück. Dann ziehe man GJ ‡ PA und PJ, so ist APG = APJ; da nun APF = APH, so ist FPG = PHJ. Aber PHJ liegt nicht ganz im Vierecke; das außerhalb liegende Stück muß also noch hineingebracht werden;

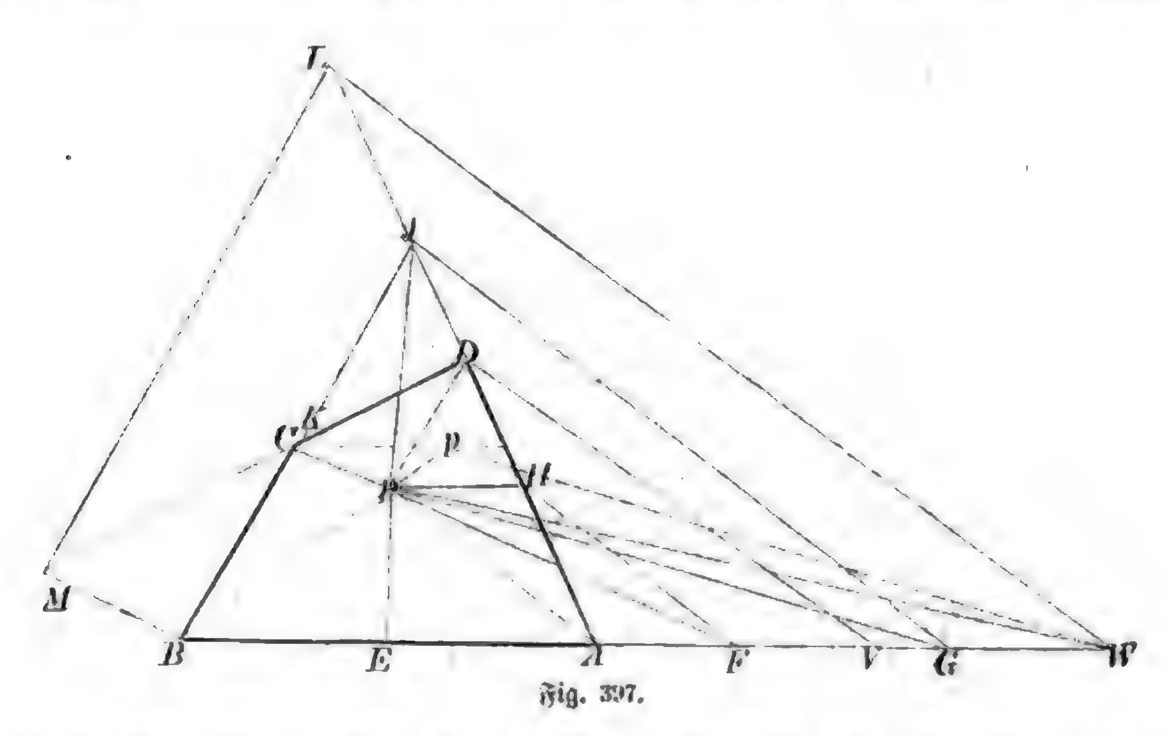


Fig. 397.

dies geschieht wieder ebenso wie bisher: man zieht PD und dann JK ‡ PD, und PK, so ist Dr. PDJ = PDK, also PHJ = PHDK. Der vom Vierecke noch übrig bleibende Theil BCKP muß nun dem letzten Theile GPW gleich sein. Dies bietet ein Mittel dar, die bisherige Construction einer Controle zu unterwerfen. Man construire nämlich wie bisher, um diesen Theil GPW ins Viereck hineinzutragen; ist die Zeichnung genau gemacht, so muß die letzte Theillinie mit BP zusammenfallen. Man ziehe also WL ‡ PA; sie trifft die Verlängerung von AD und muß deshalb auf DC reducirt werden; man ziehe LM ‡ PD; sie trifft wieder die Verlängerung von DC und muß deshalb auf CB reducirt werden; man ziehe daher durch M eine Parallele mit PC; sie trifft, bei genauer Zeichnung, auf B, also fällt die Theillinie mit PB zusammen, und die vier Theilstücke sind demnach: BPE, AEPH, DHPK, CKDP.

§. 330. **Aufgabe.** Ein Trapez von einem in einer der parallelen Seiten liegenden Punkte aus in Theile nach gegebenem Verhältniß zu theilen.

Auflösung. ABCD (Fig. 398) sei das gegebene Trapez, AB ∦ CD; P sei der in AB gegebene Punkt; die Theile sollen sich verhalten wie die Zahlen m, n, p ....

Man setze AB = a, CD = b, BC = c, AD = d, AP = e.

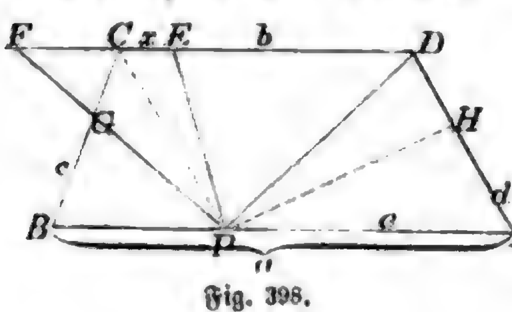


Fig. 398.

PE sei diejenige Theilungslinie, welche ein Stück PBCE, der Verhältnißzahl m entsprechend, abschneidet, so daß, wenn wir im ganzen drei Theile, die sich wie m : n : p verhalten, annehmen, BPCE : PEDA = m : n + p ist. Setze CE = x. Dann ist:

$$\text{ABCD} : \text{PBCE} = a + b : a - e + x;$$

oder:

$$m + n + p : m = a + b : a - e + x;$$

also:

$$x = \frac{m\,(a + b)}{m + n + p} - (a - e).$$

Ist $a - e > \frac{m\,(a + b)}{m + n + p}$, so wird der Werth von x negativ; dies deutet an, daß der absolut genommene Werth von x von C aus, nicht nach D hin, sondern in entgegengesetzter Richtung auf die Verlängerung von DC über C hinaus aufgetragen werden muß, etwa wie PF, wo dann die Seite BC durch die Theilungslinie (in G) geschnitten wird. Man ziehe dann PC, setze BG = y, so ist:

$$\text{ABCD} : \text{CBP} = a + b : a - e,$$
$$\text{CBP} : \text{GBP} = c : y$$
$$\text{ABCD} : \text{GBP} = (a + b) \cdot c : (a - e) \cdot y.$$
$$\text{ABCD} : \text{GBP} = m + n + p : m$$
$$(a + b)\, c : (a - e)\, y = m + n + p : m$$
$$y = \frac{(a + b) \cdot cm}{(m + n + p) \cdot (a - e)}.$$

Es kann auch der Fall eintreten, daß x > b wird; dann fällt die entsprechende Theilungslinie auf die Seite AD, wie PH; ist dann AH = z und zieht man DP, so ist:

$$\text{ABC} : \text{APD} = a + b : e$$
$$\text{APD} : \text{APH} = d : z$$
$$\text{ABCD} : \text{APH} = (a + b)\, d : ez.$$

Nun ist $\text{ABCD} : \text{BCDHP} = m + n + p : m$

also: $\text{ABCD} : \text{APH} = m + n + p : n + p$

$$(a + b)\, d : ez = m + n + p : n + p$$

$$z = \frac{(a + b)(n + p) d}{e (m + n + p)}.$$

Ist das erste Stück der Figur so bestimmt, so sucht man ganz in derselben Weise ein Stück, das der Verhältnißzahl $m + n$ entspricht; sind dann überhaupt nur drei Stücke gefordert, so findet sich das dritte als Rest; sind deren mehrere abzuschneiden, so muß man das dritte so bestimmen, daß es der Verhältnißzahl $m + n + p$ entspricht u. s. w. In Verbindung mit den erst bestimmten Theilungslinien bestimmen sich dann allemal die der Zahl n oder p u. s. w. entsprechenden Theilungsstücke.

§. 331. **Aufgabe.** Ein Trapez durch Linien, welche den parallelen Seiten parallel laufen, nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p .... in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. ABCD (Fig. 399) sei das gegebene Trapez, AB ‡ CD; es soll nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p .... getheilt werden und die Theilungslinien sollen mit AB und CD parallel sein.

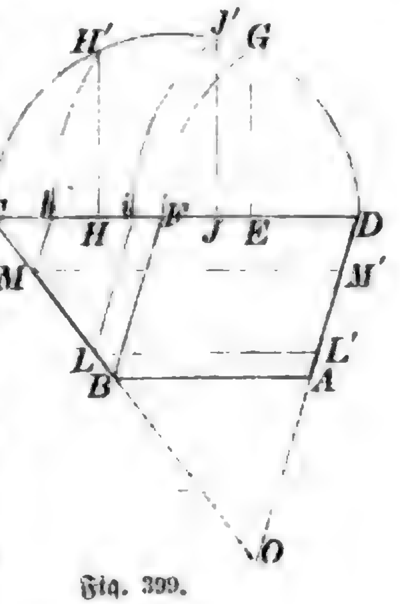


Fig. 399.

Ueber der größern der parallelen Seiten, CD, beschreibe einen Halbkreis; ziehe BF ‡ AD, beschreibe aus D mit DF den Bogen FG; fälle von G ein Loth GE auf CD und theile CE nach dem Verhältniß der Zahlen m, n, p in drei Theile. H und J seien die Theilpunkte. In H und J errichte die Lothe HH′ und JJ′. Von D aus trage die Entfernungen DJ′ und DH′ auf DC ab, DJ′ = Di, DH′ = Dh; ziehe iL ‡ AD und hM ‡ AD, dann MM′ und LL′, beide parallel mit CD, so sind CDM′M, MM′L′L und LL′AB die verlangten Theilstücke.

Beweis. Man verlängere DA, CB bis zur Convergenz in O, so ist:

$$\text{Dr. } COD \sim MOM' \sim LOL' \sim BOA,$$

und nach der Construction ist:

$$AB = DF = DG.$$
$$LL' = Di = DJ'.$$
$$MM' = Dh = DH'.$$

Also ist: $\text{Dr. } LOL' : \text{Dr. } BOA = LL'^2 : BA^2 = DJ'^2 : DG^2$
$$= DC \cdot DJ : DC \cdot DE$$
$$= DJ : DE.$$
$$\text{Dr. } LOL' - BOA : \text{Dr. } BOA = DJ - DE : DE.$$
$$LL'AB : \text{Dr. } BOA = EJ : DE.$$
$$= p : DE.$$

Gerade so beweist man, daß:

$$MM'AB : \text{Dr. } BOA = EH : DE = n + p : DE$$
$$MM'AB - LL'AB : \text{Dr. } BOA = p : DE$$
$$MM'LL' : \text{Dr. } BOA = p : DE$$
$$ABCD : \text{Dr. } BOA = EC : DE = m + n + p : DE$$
$$ABCD - MM'AB : \text{Dr. } BOA = m : DE$$
$$MM'CD : \text{Dr. } BOA = m : DE.$$

$$LL'AB : MM'AB : ABCD = p : n + p : m + n + p.$$
$$LL'AB : MM'L'L : CDM'M = p : n : m.$$

§. 332. **Aufgabe.** Von einem Trapeze ein Stück von gegebenem Inhalte so abzuschneiden, daß die Theilungslinie den parallelen Seiten der Figur parallel laufe.

Auflösung. ABCD (Fig. 400) sei das gegebene Trapez, AB ∦ CD: die abzuschneidende Fläche soll den Inhalt f haben und der Seite CD anliegen; auch sei das Trapez seinem Inhalte nach gegeben durch die Seiten AB = a, CD = c und die Höhe CE = h.

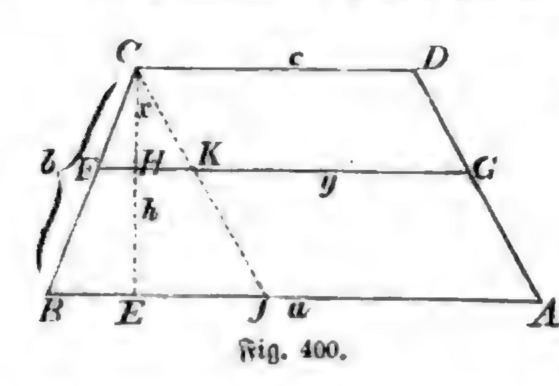


Fig. 400.

Wir nehmen vorläufig an, die mit CD parallele Gerade FG sei die gesuchte Theilungslinie, so daß also CDGF = f werde. Man setze den Abstand der Linie FG von CD, also die Höhe CH = x, die Länge der Linie FG = y und ziehe CJ ∦ DA; so ist: AJ = CD, also BJ = a — c; GK = CD, also FK = y — c, und, weil FK ∦ BJ:

$$BJ : FK = CE : CH,$$

oder

$$a - c : y - c = h : x,$$

woraus

$$1)\quad x = \frac{h\,(y - c)}{a - c}.$$

Es kommt jetzt also nur noch darauf an, eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten y zu finden. Man hat aber für den Inhalt des Trapezes CDGF den Ausdruck:

$$\frac{CD + FG}{2} \cdot CH \text{ oder } \frac{c + y}{2} \cdot x;$$

dieser Inhalt soll aber = f werden, also ist:

$$2)\quad \frac{c + y}{2} \cdot x = f.$$

Dies mit (1) verbunden liefert die Gleichung:

$$\frac{c + y}{2} \cdot \frac{y - c}{a - c} \cdot h = f,$$

oder $$3)\quad \frac{h \cdot (y^2 - c^2)}{2\,(a - c)} = f,$$

woraus $$4)\quad y = \sqrt{\frac{2\,f\,(a - c)}{h} + c^2}$$

folgt; setzt man diesen Werth in (1), so erhält man:

$$5)\quad x = \frac{h}{a - c}\left[- c + \sqrt{\frac{2\,f\,(a - c)}{h} + c^2}\right].$$

Somit wäre die Aufgabe gelöst; aber die für x und y gefundenen Ausdrücke sind für die numerische Berechnung mittels der Logarithmentafeln nicht bequem. Man zieht es aus diesem Grunde vor, den Radicanden der Wurzel so umzuwandeln, daß man dafür einen Hülfswinkel einführen kann, wodurch man denn statt der Summen ein Product erhält, welches zur Logarithmenberechnung geeigneter ist.

Zu diesem Zwecke erinnere man sich, daß man einen Ausdruck wie $\sqrt{p^2 + q^2}$ in $\sqrt{p^2\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$ oder $p\sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$ umwandeln kann; hat man dann noch die trigonometrische Formel

$$\sec\varphi^2 = 1 + \operatorname{tg}\varphi^2$$

gegenwärtig, so wird man einsehen, daß $\frac{q}{p}$ der Tangente eines Winkels φ gleichgesetzt werden kann, indem sich φ eben aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}$$

bestimmt, sobald q und p in Zahlen gegeben sind, so daß φ als eine bekannte Größe zu betrachten ist. Dann wird aber

$$\sqrt{p^2 + q^2} \text{ oder } p \cdot \sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}} = p\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = p\sqrt{\sec\varphi^2}$$
$$= p \cdot \sec\varphi,$$

welches, da φ bekannt, leicht zu berechnen ist. In unserm Ausdrucke (4), nämlich in:

$$y = \sqrt{\frac{2\,f\,(a - c)}{h} + c^2}$$

betrachten wir nun c^2 als das eben gebrauchte p^2 und $\frac{2\,f\,(a - c)}{h}$ als q^2 und bekommen, bei gleicher Umwandlung wie oben:

$$y = c \cdot \sqrt{\frac{2\,f\,(a - c)}{c^2 h} + 1};$$

setzen wir dann $\frac{2\,f\,(a - c)}{c^2 h} = \operatorname{tg}\varphi^2$, also

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2 f (a - c)}{h}},$$

so wird, wie oben gezeigt:

$$y = c \cdot \sec \varphi = \frac{c}{\cos \varphi},$$

und
$$x = \frac{h}{a - c} [- c + c \cdot \sec \varphi]$$

oder
$$6) \quad x = \frac{c h}{a - c} (\sec \varphi - 1).$$

Auch diese Formel enthält noch eine Differenz, muß also noch eine angemessene Umwandlung erfahren; wir gehen hierbei von der bekannten Gleichung

$$\cos \varphi = 1 - 2 \cdot \sin {}^1/_2 \varphi^2$$

aus, woraus
$$2 \sin {}^1/_2 \varphi^2 = 1 - \cos \varphi$$

folgt; den Ausdruck links multipliciren wir mit $\cos {}^1/_2 \varphi$ und dividiren ihn auch wieder durch $\cos {}^1/_2 \varphi$, so erhalten wir, durch Trennung von $\sin {}^1/_2 \varphi^2$ in zwei Factoren:

$$2 \cdot \sin {}^1/_2 \varphi \cdot \cos {}^1/_2 \varphi \cdot \frac{\sin {}^1/_2 \varphi}{\cos {}^1/_2 \varphi} = 1 - \cos \varphi$$

oder
$$\sin \varphi \cdot \text{tg } {}^1/_2 \varphi = 1 - \cos \varphi.$$

Dividirt man nun links und rechts durch $\cos \varphi$, so gibt dies:

$$\text{tg } \varphi \cdot \text{tg } {}^1/_2 \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} - 1 = \sec \varphi - 1.$$

Also ist dann
$$7) \quad x = \frac{c h}{a - c} \cdot \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } {}^1/_2 \varphi,$$

und diese Formel eignet sich vollkommen zur numerischen Berechnung.

Wir haben in der vorigen Auflösung, der zu Grunde gelegten Figur gemäß, angenommen, daß $a > c$ sei, und das verlangte Trapez vom Inhalte f an der Seite der kleinern Parallelen $CD = c$ abgeschnitten werde. Würde nun verlangt, das Trapez vom Inhalte f sollte an der größern Seite $AB = a$ abgeschnitten werden, so müßten natürlich die Formeln (4) und (5), welche vor Einführung des Winkels φ gewonnen worden, auch für diesen Fall noch gelten, nur daß darin a und c mit einander zu vertauschen wären. Dann erschiene aber die negative Differenz $c - a$ in dem Ausdrucke und es würden sich demnach die Formeln für y und x umgestalten in:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{a^2 - \frac{2 f (a - c)}{h}} \\ \text{und} \quad x &= \frac{h}{a - c} \cdot \left[a - \sqrt{a^2 - \frac{2 f (a - c)}{h}}\right]. \end{aligned}\right\} (8)$$

Da nun $\sqrt{p^2 - q^2} = p\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}$, so kann, vorausgesetzt, daß $q < p$ sei, $\frac{q}{p} = \sin\varphi$ gesetzt werden, wo dann $\sqrt{p^2 - q^2} = p\sqrt{1 - \sin\varphi^2} = p \cdot \cos\varphi$ wird. Wenden wir dies auf unsern Ausdruck in (8) an, so erhalten wir:

$$\sqrt{a^2 - \frac{2f(a-c)}{h}} = a\sqrt{1 - \frac{2f(a-c)}{a^2h}},$$

und

$$\frac{2f(a-c)}{a^2h} = \sin\varphi^2,$$

also

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2f(a-c)}{h}} = \sin\varphi$$

gesetzt, wandelt die Ausdrücke um in:

$$\left.\begin{aligned} y &= a \cdot \cos\varphi \\ \text{und} \quad x &= \frac{2ah}{a-c} \cdot \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2. \end{aligned}\right\} (9)$$

Um diese für den Feldmesser so wichtige Aufgabe auch in ihrer Anwendung zu zeigen, wollen wir die gewonnenen Formeln auf ein Zahlenbeispiel anwenden.

Es sei a = 86 R., c = 58 R., h = 39 R., also der Inhalt des Trapezes $= \frac{86 + 58}{2} \cdot 39 = 2808$ Q.-R. Es soll an der Seite c ein Trapez vom Inhalte f = 1200 Q.-R. so abgeschnitten werden, daß die Theilungslinie mit a und c parallel laufe.

Es ist a — c = 86 — 58 = 28 R., also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{58}\sqrt{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 28}{39}}.$$

log 2400	= 3,3802112		
log 28	= 1,4471580		
	4,8273692		
log 39	= 1,5910646		
	3,2363046		
2)	1,6181523		
log 58	= 1,7634280		
log tg φ	= 9,8547243	φ =	35° 35′ 27″
		½ φ =	17 47 43.

$$
\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \varphi &= 9{,}8547243 \\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}5064698 \\
\log c &= 1{,}7634280 \\
\log h &= \underline{1{,}5910646} \\
& 2{,}7156867 \\
\log (a - c) &= \underline{1{,}4471580} \\
\log x &= 1{,}2685287 \quad x = 18{,}55789 \text{ R.}
\end{aligned}
$$

In der Anwendung wird man $x = 18{,}6$ R. nehmen.

Der Werth von y findet sich durch folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\log c &= 1{,}7634280 \\
\log \cos \varphi &= \underline{9{,}9101941} \\
\log y &= 1{,}8532339 \quad y = 71{,}3237 \text{ R.}
\end{aligned}
$$

Um die Rechnung zu prüfen, berechne man den Inhalt f des so abgeschnittenen Trapezes. Es ist aber $c = 58$ R.

$$
\begin{aligned}
y &= \underline{71{,}3} \;\text{„} \\
& 129{,}3 \\
2) & \\
\frac{c + y}{2} &= 64{,}6 \;\text{„}
\end{aligned}
$$

Dies multiplicirt mit der Höhe 18,6 gibt 1199,7 R., also fast genau 1200 R. oder f, wie es verlangt wurde.

Sollte ein Trapez von dem angegebenen Inhalte an der längern Seite a abgeschnitten werden, so müßte man sich, zur Bestimmung von y und x, der Formeln (9) bedienen.

Der Ausdruck: $\sqrt{\dfrac{2f(a-c)}{h}}$

bleibt auch für den vorliegenden Fall derselbe wie oben, wir entnehmen daher den Logarithmus desselben der vorigen Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\log \sqrt{\frac{2f(a-c)}{h}} &= 1{,}6181523 \\
\log a &= \underline{1{,}9344985} \\
\log \sin \varphi &= 9{,}6836538 \quad \varphi = 28^\circ\, 51'\, 36'' \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}3965428 \quad \tfrac{1}{2}\varphi = 14 \;\; 25 \;\; 48. \\
& \underline{\phantom{9{,}39654}2} \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2 &= 8{,}7930856 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log a &= 1{,}9344985 \\
\log h &= \underline{1{,}5910646} \\
& 2{,}6196787 \\
\log (a - c) &= \underline{1{,}4471580} \\
\log x &= 1{,}1725207 \quad x = 14{,}8772 \text{ R.}
\end{aligned}
$$

$$\log a = 1{,}9344985$$
$$\log \cos \varphi = 9{,}9424058$$
$$\log y = 1{,}8769043 \quad y = 75{,}319 \text{ R.}$$
$$a = 86 \text{ R.}$$
$$y = 75{,}3 \text{ „}$$
$$2)\ \underline{161{,}3 \text{ „}}$$
$$80{,}6 \text{ „}$$
$$x = 14{,}9 \text{ „}$$

also $f = 1200{,}9$ Q.-R., fast genau wie verlangt.

Es kommt jetzt noch darauf an, die so bestimmte Theilungslinie auf das trapezförmige Feld überzutragen. Man könnte natürlich auch im Felde das Loth CE fällen, x = CH von C aus darauf abmessen und durch H eine Parallele mit BH legen. Es würde aber diese Operation, im Felde ausgeführt, nur wenig Genauigkeit gewähren. Man könnte auch die Construction auf dem Plane ausführen, dann CF und DG nach dem Maßstabe abmessen und aufs Feld übertragen. Am genauesten dürfte aber das Resultat werden, wenn man CF und DG berechnet und auf dem Felde absteckt. Zu diesem Zwecke müßte aber BC gemessen werden, da in der That die Figur durch a, c und h erst ihrem Inhalte, aber nicht ihrer Gestalt nach bestimmt ist. Es sei also BC gemessen und = b gefunden, so ist:

$$CF : BC = CH : CE$$
$$CF : b = x : h$$
$$CF = \frac{bx}{h}.$$

Dann berechne man CK auf folgende Weise:

$$BE^2 = b^2 - h^2$$
$$BE = \sqrt{b^2 - h^2}$$
$$EJ = BJ - BE = a - c - \sqrt{b^2 - h^2}$$
$$HK : EJ = x : h$$
$$HK = \frac{(a - c - \sqrt{b^2 - h^2}) \cdot x}{h}$$
$$CK = \sqrt{x^2 + HK^2},$$

wo für x und HK die schon gefundenen Werthe zu setzen sind; diesen Werth von CK trage man von D aus auf DA ab; ist G der so gefundene Punkt, so stecke man die Gerade FG ab.

§. 333. **Aufgabe.** Ein Viereck durch Linien, welche mit einer Seite desselben parallel laufen, nach gegebenem Verhältniß in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. 1) Durch Construction. ABCD (Fig. 401) sei das ge-

gebene Viereck, es soll in zwei Theile getheilt werden, welche sich wie m : n verhalten; die Theilungslinien sollen mit der Seite AD parallel laufen.

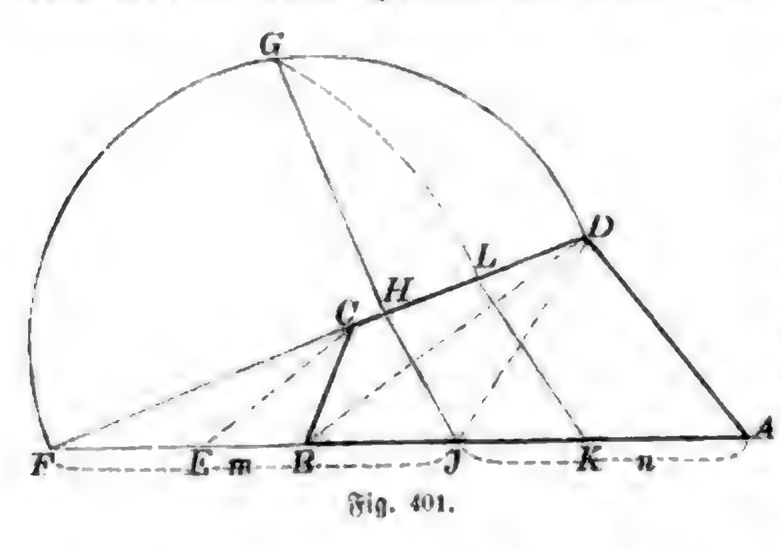


Fig. 401.

Ziehe DB und CE $\parallel$ DB, verlängere DC und AB bis zu ihrem Durchschnitt in F. Theile EA in J in dem gegebenen Verhältniß m : n, ziehe DJ, dann JH $\parallel$ AD. Ueber DF beschreibe einen Halbkreis, errichte HG senkrecht zu DF, mache FL = FG; ziehe LK $\parallel$ DA; so ist

$$BCLK : ADLK = m : n.$$

Beweis. Viereck ABCD = Dreieck EDA.

$$EDJ : ADJ = m : n.$$
$$\text{Dr. } EDJ = BCDJ;$$
$$\overline{BCDJ : ADJ = m : n.}$$

Nun wird im Dreieck FDJ die Seite DJ parallel gelegt mit AD, wonach:

$$\text{Dr. } FDJ = FLK, \text{ also auch } BCDJ = BCLK;$$
$$\overline{BCLK : ADLK = m : n.}$$

Dieselbe Auflösung bleibt in der Hauptsache gültig, wenn das Viereck in mehrere Theile nach gegebenem Verhältniß getheilt werden soll. Sollten die Theilungslinien mit einer gegebenen Linie MN parallel gehen, so lege man die Linien HJ, LK, statt daß sie vorhin mit AD parallel liefen, jetzt parallel mit MN.

2) Durch Rechnung. Man berechne den Inhalt des Vierecks, sowie den jedes Theils; letztere Inhalte seien J_1, J_2, J_3 .... Gesetzt nun, die Theilungslinien sollten mit AB (Fig. 402) parallel laufen, und es sei FG eine solche Theilungslinie, CL = h das Perpendikel von C auf AB, die Seite AB = a, CK $\parallel$ AB, auch CK = b, FG = y und der senkrechte Abstand der Parallelen AB und FG gleich x, so ist:

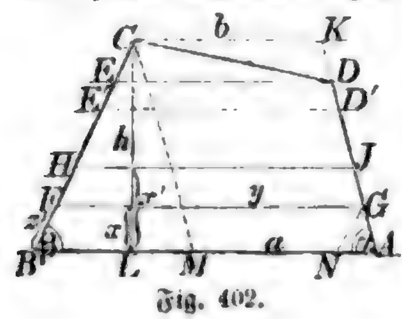


Fig. 402.

$$1)\ (a + y)\,x = J_1$$
$$2)\ (a - b) : (y - b) = h : (h - x)$$
$$3)\ y = \frac{ah - ax + bx}{h};$$

(3) in (1) substituirt, gibt:

$$(a - b) x^2 - 2ah\, x = -2h \cdot J_1$$

$$4)\ x = \frac{ah \pm \sqrt{a^2h^2 - 2h \cdot J_1 \cdot (a - b)}}{a - b},$$

wo jedoch die Wurzel nur **negativ** zu nehmen ist: denn ah ist das Rechteck aus der Grundlinie a und Höhe h, $a - b = BM$, wenn $CM \mp AK$ gezogen ist, also:

$$\frac{ah}{a - b} > CL,$$

während x nur ein Theil dieser Linie sein kann.

Um x', d. h. die Höhe der zweiten Theillinie über AB zu finden, setze man in dem Ausdrucke (4) $J_1 + J_2$ statt J_1, und so mit den folgenden Theilen. Fällt eine Theillinie wie ED gerade in die Ecke D, so muß das Dreieck ECD noch (nach §. 325) getheilt werden. Fällt dagegen eine Theillinie wie E'D', so muß E'CDD' nochmals als Viereck behandelt werden.

Man kann aber die Rechnung auch trigonometrisch führen, wenn die Winkel $DAB = \alpha$ und $CBA = \beta$ gemessen sind. Zieht man $GN \mp BF$, so ist, wenn noch $BF = GN = z$ gesetzt wird:

$$AN = \frac{z \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$BN = a - AN = a - \frac{z \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Dr. } AGN = \frac{z^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

$$BFGN = BN \cdot x = \left(a - \frac{z \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}\right) \cdot z \cdot \sin \beta.$$

$$= az \cdot \sin \beta - \frac{z^2 \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

$$ABFG = \frac{z^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \sin \alpha} + az \cdot \sin \beta - \frac{z^2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{2az \sin \alpha \cdot \sin \beta - z^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \sin \alpha} = J_1.$$

$$z^2 - \frac{2a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = - \frac{2 \cdot J_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)},$$

$$z = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \pm \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sin \alpha^2}{\sin(\alpha + \beta)^2} - \frac{2 J_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}}$$

$$= \frac{a \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \cdot \sin \alpha^2 - 2 J_1 \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}}{\sin(\alpha + \beta)},$$

wo sich im allgemeinen nicht entscheiden läßt, ob das + oder − Zeichen vor der Wurzel zu nehmen sei, weil dies ganz vom Werthe von a abhängt, da

$$a \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \gtrless z \text{ sein kann.}$$

Sollten die Theilungslinien nicht mit einer Seite des Vierecks, sondern mit einer andern der Lage nach gegebenen Linie parallel laufen, so verfahre man gerade ebenso, nur daß man bei der Construction die Linie JH mit der gegebenen Linie parallel legt, ebenso KL und alle andern Theilungslinien. Um diese Aufgabe durch Rechnung zu lösen, suche man den Inhalt des Vierecks und bestimme auch den Inhalt jedes der Theile J_1, J_2, J_3 ...., ziehe durch eine Ecke eine Linie parallel der gegebenen Geraden; diese schneidet vom Viereck ein Dreieck ab, dieses theile man, soweit sein Flächeninhalt reicht, in der vorgeschriebenen Weise nach §. 326, dann fahre man fort, nach §. 333 das noch übrige Viereck zu theilen.

§. 334. **Aufgabe.** Ein Viereck ist durch eine Gerade in zwei Vierecke getheilt; man soll eine andere Gerade so ziehen, daß von jedem der beiden Vierecke, in welche das Ganze schon getheilt ist, Stücke von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden.

Auflösung. ABCD (Fig. 403) sei durch die Gerade EF in die Vierecke ABEF und CDFE getheilt; GH sei die neue Theilungslinie. Verlängere DC, BA, bis die Verlängerungen mit denen von EF in K und L zusammentreffen. Da das Viereck ABCD und die Gerade EF gegeben sind, so kann man KL, sowie die Dreiecke CEK und AFL als bekannte Größen betrachten. Es sei KL = a, W. CKE = α, W. ALF = β. Man bestimme den Inhalt p des Dreiecks KJG, und den Inhalt q des Dreiecks LJH, und setze JK = x, W. GJK = φ; dann ist:

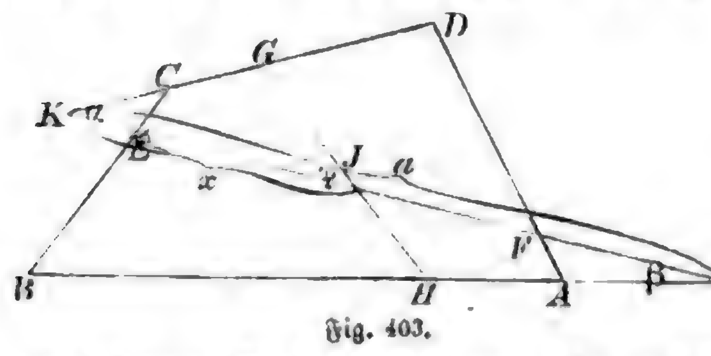


Fig. 403.

$$p = \frac{x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \sin(\alpha + \varphi)}; \quad x^2 = \frac{2p \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha \cdot \sin\varphi}.$$

$$q = \frac{(a - x)^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \sin(\beta + \varphi)}; \quad (a - x)^2 = \frac{2q \cdot (\beta + \varphi)}{\sin\beta \cdot \sin\varphi}.$$

$$x^2 = \frac{2p(\sin\alpha \cos\varphi + \cos\alpha \cdot \sin\varphi)}{\sin\alpha \cdot \sin\varphi} = 2p(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\alpha).$$

$$(a - x)^2 = \frac{2q(\sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi)}{\sin\beta\sin\varphi} = 2q(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\beta).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{2p} = \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\alpha. \\ \dfrac{(a-x)^2}{2q} = \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\beta. \end{array}\right\} \quad \frac{x^2}{2p} - \frac{(a-x)^2}{2q} = \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta,$$

oder:
$$\frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = \cot\beta - \cot\alpha.$$
$$\frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot$$
$$p(a-x)^2 - q\cdot x^2 = \frac{2pq\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$(p-q)x^2 - 2ap\,x = \frac{2pq\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} - a^2 p.$$
$$x = \frac{a}{p-q}\left[p \pm \sqrt{pq + \frac{2p(p-q)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{a^2\cdot\sin\alpha\sin\beta}}\right]$$
$$= \frac{a\sqrt{p}}{p-q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}\cdot\sec\psi),$$
wenn man $\frac{2p(p-q)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{pq\cdot a^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \mathrm{tg}\,\psi^2$ setzt.

Aus der Gleichung:
$$x^2 = 2p\cdot(\cot\varphi + \cot\alpha)$$
findet man: $\cot\varphi = \frac{x^2}{2p} - \cot\alpha,$

wenn man für x noch obigen Werth sich gesetzt denkt.

Für $\alpha = \beta$ ist $\alpha - \beta = 0$, also auch $\sin(\alpha-\beta) = 0$, also $x = \frac{a}{p-q}\cdot[p \pm \sqrt{pq}]$.

Dieser Fall tritt ein, wenn AB $\#$ CD, also wenn das Viereck ein Trapez ist.

Für $p = q$ liefert die Formel, weil dann 0 im Nenner erscheint, keinen brauchbaren Werth. Dann liefert aber die Gleichung:
$$(p-q)x^2 - 2ap\,x = \frac{2pq\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - a^2 p$$
diese andere:
$$-2ap\,x = \frac{2p^2\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - a^2 p$$
oder $x = \frac{a}{2} - \frac{p\cdot\sin(\alpha-\beta)}{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$

Ist dann hier auch noch $\alpha = \beta$, so erhält man:
$$x = \frac{a}{2}.$$

Hat das Viereck ABCD eine solche Form, daß die Verlängerungen von AB und CD beide dieselbe Verlängerung von EF schneiden, z. B. die über F hinaus (Fig. 404), so ist:

$$\text{Dreieck } KJG = \frac{x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \sin(\alpha + \varphi)} = p,$$

$$\text{Dreieck } LJH = \frac{(a + x)^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \sin(\beta + \varphi)} = q,$$

Gleichungen, aus denen die Unbekannten x und φ gerade so wie oben gefunden werden können.

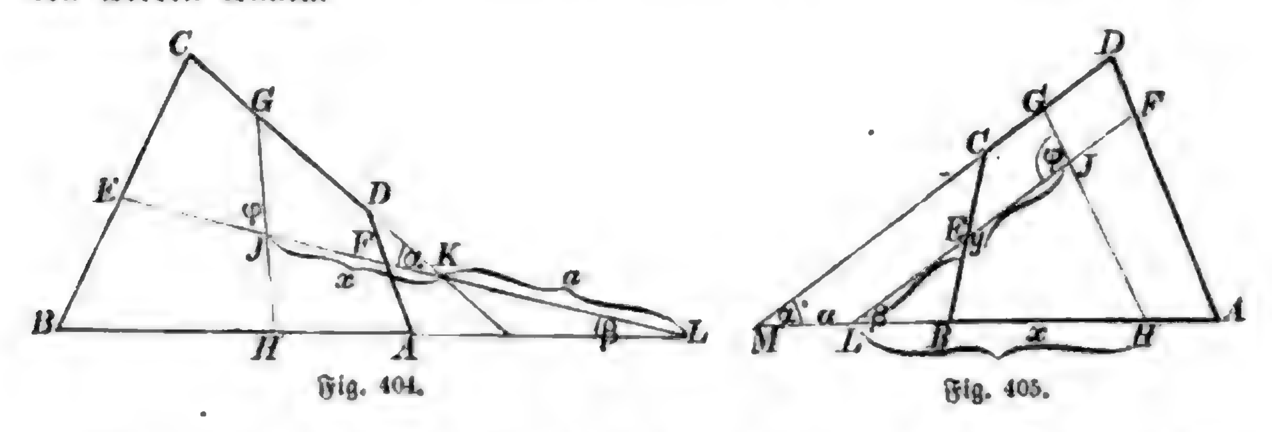


Fig. 404. Fig. 405.

Ist die Linie EF $\nparallel$ CD, wie in Fig. 405, so verlängere man CD und EF bis zum Durchschnitt mit AB in L und M; setzt man dann ML = a und W. AMD = α als bekannt voraus, LH = x, so können die Dreiecke BEL und BCM als bekannt angenommen werden, weil sie sich aus den als bekannt anzusehenden Seiten und Winkeln des Vierecks ABCD bestimmen lassen. Es sei Dreieck MGH = p, Dreieck LJH = q, so ist:

$$(a + x)^2 : x^2 = p : q$$

$$a + x : x = \sqrt{p} : \sqrt{q}$$

$$a : x = \sqrt{p} - \sqrt{q} : \sqrt{q}$$

$$x = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} = \frac{a}{p - q} \cdot (q + \sqrt{pq}).$$

Dadurch ist der Punkt L der Linie EF bestimmt; um noch einen zweiten Punkt in der Linie EF zu bestimmen, setze man LJ = y; dann ist:

$$xy \cdot \sin\beta = 2q$$

$$y = \frac{2q}{x \cdot \sin\beta} = \frac{2q(p - q)}{a(q + \sqrt{pq}) \cdot \sin\beta}$$

$$= \frac{2}{a \sin\beta} \cdot \frac{q \cdot (p - q)}{\sqrt{q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})}$$

$$= \frac{2}{a \cdot \sin\beta} \cdot \sqrt{q} \cdot (\sqrt{p} - \sqrt{q})$$

$$= \frac{2(-q + \sqrt{pq})}{a \cdot \sin\beta}.$$

Sind die Seiten AB, CD des Vierecks unter sich und mit der Linie EF parallel, wie Fig. 406, und ist p der Inhalt, den das Viereck CGJE,

q der, welchen BEJH bekommen soll, so ist, wenn a den Abstand der Parallelen AB, EF, b den Abstand der Parallelen CD, EF bezeichnet:

1) $(x + y)\ a = 2\ q;\ ax = 2\ q - ay$

2) $(y + z) \cdot b = 2\ p;\ bz = 2\ p - by$

3) $z - y : y - x = b : a$

Aus (3) folgt:

$$bz - by : ay - ax = b^2 : a^2$$

$$[(2\ p - by) - by] : [ay - (2\ q - ay)] = b^2 : a^2$$

$$p - by : ay - q = b^2 : a^2$$

$$a^2p - a^2by = ab^2y - b^2q.$$

$$(ab^2 + a^2b)\ y = a^2p + b^2q$$

$$y = \frac{a^2p + b^2q}{ab^2 + a^2b} = \frac{a^2p + b^2q}{ab\ (a + b)}.$$

Fig. 406.

$$x = \frac{2\ q - ay}{a},$$

$$x = \frac{2\ q}{a} - \frac{a^2p + b^2q}{ab\ (a + b)} = \frac{2\ bq\ (a + b) - a^2p - b^2q}{ab\ (a + b)}$$

$$= \frac{2\ abq + b^2q - a^2p}{ab\ (a + b)}.$$

§. 335. **Aufgabe.** Von einer gegebenen unregelmäßigen Figur ein Stück von gegebenem Inhalte so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit einer gegebenen Geraden parallel laufe.

Auflösung. ABC.....K (Fig. 407) sei die gegebene Figur, OP die Linie, mit welcher die Theilungslinie parallel werden soll, q der Inhalt des abzuschneidenden Stücks. In einem nahe an der Figur gelegenen, sonst beliebigen Punkte O errichte man ein Loth OZ zur Geraden OP, so daß dasselbe außerhalb der Figur falle; durch alle Ecken der Figur ziehe man Parallelen mit OP, z. B. Aa, bBb′, cCc′ u. s. w., zuletzt kk′K, welche die Gerade OZ in den Punkten a, b, c....k treffen, so geben die Abstände ab, bc, cd.....ka bezieh-lich die Höhen des Dreiecks AKk′

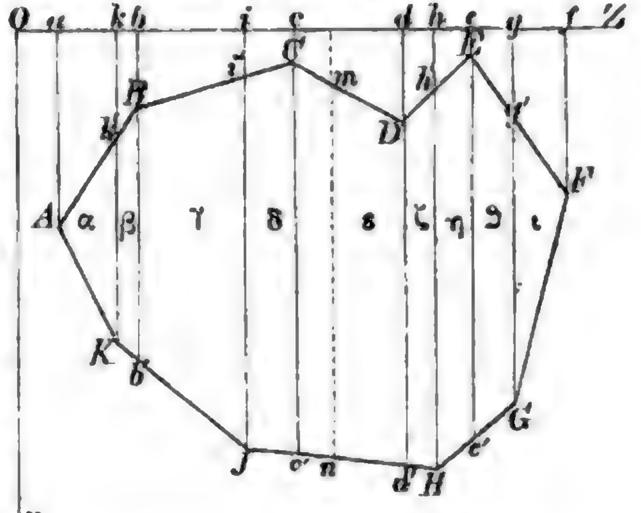


Fig. 407.

und der Trapeze Kk′Bb, Bb′Ji′..... an; dann messe man auch die Parallelen Kk′, Bb′, Ji′....., soweit sie innerhalb der Figur fallen, und berechne daraus die Inhalte aller Trapeze, in welche die Figur durch die Pa-

rallelen zerlegt wird, nebst dem Inhalte der Dreiecke AKk' und FGg'. Heißen nun die von links nach rechts auf einander folgenden Flächen der Reihe nach α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι, so bestimme man durch Addition:

$$\alpha = J_1$$
$$\alpha + \beta = J_2$$
$$\alpha + \beta + \gamma = J_3$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = J_4$$
u. s. w.,

so sind die Inhalte J_1, J_2, J_3, J_4 .... jetzt bekannte Größen. Dann suche man unter diesen Inhalten J_1, J_2, J_3 ..... denjenigen, welcher zu q der nächstkleinere ist; es sei dies J_4, so muß die gesuchte Theilungslinie, die wir vorläufig unter mn vorstellen, zwischen Cc' und Dd' fallen, und die Differenz $q - J_4$ bezeichnet das Flächenstück, welches man von dem Trapeze Cc'd'D abschneiden und zu J_4 zusetzen muß, um der Forderung zu genügen. Da $q - J_4$ eine bekannte Größe ist, so kann dies durch das Verfahren des §. 331 leicht ausgeführt werden.

Wären Theile des Umfangs der gegebenen Figur krummlinig, so würde man solche Stücke aussuchen, welche als geradlinige Begrenzung angesehen werden könnten, und an den Grenzpunkten solcher Umfangsstücke Parallelen mit OP legen, so daß die ganze Figur dann doch wieder in Trapeze zerlegt wäre.

Es kann diese Aufgabe zweckmäßig angewendet werden, kleinere Felder in Schläge zu theilen, wenn die Grenzlinien unter einander parallel werden sollen.

§. 336. **Aufgabe.** Im Innern eines Ackerstücks befindet sich ein Gewässer; das Ackerstück soll unter mehrere Interessenten so vertheilt werden, daß alle mit ihren Antheilen an das Wasser anstoßen.

Auflösung. ABCDE (Fig. 408) sei das zu vertheilende Ackerstück, a, b, c, d, e das Gewässer im Innern desselben. Der Acker soll unter vier Interessenten nach dem Verhältniß m : n : p : q vertheilt werden.

Im Innern von abcde nehme man einen beliebigen Punkt O an und ziehe von O nach allen Ecken A, B, C .... der äußern Figur OA, OB, OC ...; die Theilungslinien schneiden das Ufer des Gewässers in a, b, c, d, e. Nun bestimme man den Inhalt der Dreiecke OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, und auch den Inhalt der Räume Oab, Obc, Ocd, Ode, Oea; endlich auch die Differenzen

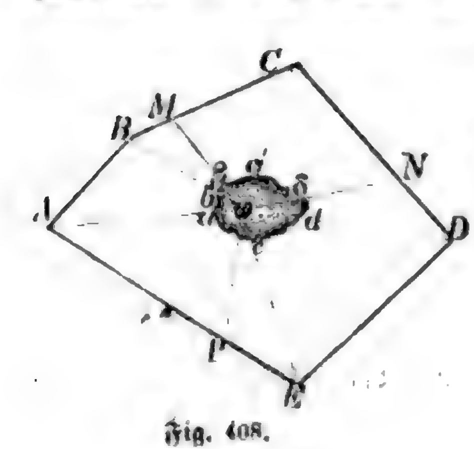


Fig. 408.

OAB — Oab = AabB,
OBC — Obc = BbcC,
OCD — Ocd = CcdD u. s. w.

Dann berechne man die Summen:

$$AabB = S_1,$$
$$AabB + BbcC = S_2,$$
$$AabB + BbcC + CcdD = S_3 \text{ u. s. w.}$$

Man berechne dann die Inhalte der nach dem vorgeschriebenen Verhältniß $m : n : p : q$ zu bildenden Theile; diese Inhalte seien J_1, J_2, J_3, J_4. Soll J_1 von der Linie Aa an gerechnet abgeschnitten werden, so vergleiche man J_1 mit den Summen S_1, $S_2 \ldots$, und bestimme, welche von den letztern die nächstkleinere zu J_1 sei, so fällt die Theilungslinie in das nächstfolgende der vorläufig abgeschnittenen Stücke $AabB$, $BbcC \ldots$ Gesetzt, J_1 sei größer als S_1, aber kleiner als S_2, so fiele die richtige Theilungslinie zwischen aB und cC. Um ihre Lage zu bestimmen, berechne man $J_1 - S_1$ und schneide von der Figur $BbcC$ nach §. 335 ein an Bb sich anlegendes Stück $= J_1 - S_1$ ab. Fällt die so bestimmte Theilungslinie in βM, so ist $Aa\beta M$ der erste, der Verhältnißzahl m entsprechende Theil.

Um die Lage der nächstfolgenden Theilungslinien zu finden, berechne man $J_1 + J_2$; vergleiche diesen Inhalt wieder mit den Summen S_1, S_2, $S_3 \ldots$, so findet man, zwischen welche zwei der Linien Aa, Bb, $Cc \ldots$ die neue Theilungslinie fallen muß; gesetzt, es sei $J_1 + J_2 > S_2$, aber $J_1 + J_2 < S_3$, so fällt die Linie zwischen Cc und Dd; man berechne also $J_1 + J_2 - S_2$, und schneide von der Figur $CcdD$ ein Stück gleich dieser Differenz ab; es sei dieses $Cc\delta N$, so wird $Aabc\delta NCBA = J_1 + J_2$, also $M\beta c\delta NCM = J_2$ sein.

Wie man zur Bestimmung der folgenden Theile fortzufahren hat, sieht man jetzt leicht ein; es mag nur noch bemerkt werden, daß das Verfahren, abgesehen von der Leichtigkeit der Ausführung, auch den Vortheil hat, daß in den erst bestimmten Theilen etwa begangene Fehler ohne allen Einfluß auf die folgenden Theile sind.

§. 337. **Aufgabe.** Ein Grundstück enthält Acker von verschiedener Bonität; derselbe soll unter mehrere Interessenten nach gegebenen Werthverhältnissen getheilt werden.

Auflösung. $ABCDEF$ (Fig. 409) enthalte die drei Theile α, β, γ; ein Morgen von α habe den Werth p, von β den Werth q, von γ den Werth r; α enthalte a Morgen, β b Morgen, γ c Morgen. Es soll das Ganze unter drei Interessenten so vertheilt werden, daß sich die Werthe der Antheile wie $P : Q : R$ verhalten.

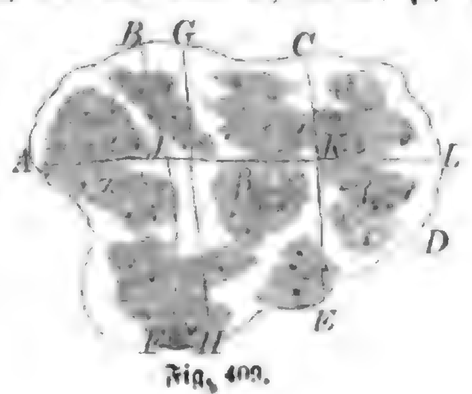


Fig. 409.

a Morgen von α haben den Werth ap;
b „ „ β „ „ „ bq;
c „ „ γ „ „ „ cr;

Der Werth des ganzen Grundstücks beträgt somit: $ap + bq + cr = \omega$. Heißen die Antheile der drei Interessenten beziehlich x, y, z, so ist also:

$$x = \frac{P}{P + Q + R} \cdot \omega,$$

$$y = \frac{Q}{P + Q + R} \cdot \omega,$$

$$z = \frac{R}{P + Q + R} \cdot \omega.$$

Fände sich nun der Werth von $x < \alpha$, so müßte der erste Interessent noch ein Stück von β dazu haben; der Inhalt dieses Stücks sei λ, so ist sein Werth $= q \cdot \lambda$, und es muß sein:

$$ap + q\lambda = x$$

$$\lambda = \frac{x - ap}{q},$$

während der Werth von x schon bekannt ist. Man schneide also von β noch ein Stück vom Inhalte $\frac{x - ap}{q}$ ab und lege es zu α, etwa die Fläche BGHF, so bekommt der erste das Stück ABGHF. Wäre α oder der Werth $ap > x$, so müßte man ein Stück von α abschneiden. In derselben Weise findet man die Antheile der beiden andern Interessenten.

Sollte jeder Interessent von allen drei Stücken einen Theil haben, so möge der erste den Theil t von α, u von β, v von γ bekommen, dann ist der Werth dieser Theile $pt + qu + rv$. Dieser Werth muß der Größe x gleich sein, oder:

$$pt + qu + rv = \frac{P}{P + Q + R} \cdot \omega,$$

$$pt + qu + rv = \mu \cdot ap + \mu \cdot bq + \mu \cdot cr,$$

wenn man

$$\frac{P}{P + Q + R} = \mu$$

setzt. Da die Gleichung drei Unbekannte t, u, y hat, so ist sie unbestimmt. Es wird ihr aber genügt, wenn man den ersten Summanden links dem ersten Summanden rechts, den zweiten dem zweiten, den dritten dem dritten gleichsetzt; dann ist:

$$t = \mu \cdot a,$$

$$u = \mu \cdot b,$$

$$v = \mu \cdot c.$$

Man gebe also dem Stücke ABJ den Inhalt t, BCKJ den Inhalt u, und CKL den Inhalt v, so bezeichnet ABCL den vollen Antheil des ersten Interessenten, und in gleicher Weise findet man den Antheil des zweiten, während der Rest der des dritten ist.

§. 338. **Aufgabe.** An einem Grundstücke haben mehrere Interessenten Theil, ihre Antheile liegen aber zerstreut umher. Sie kommen überein, ihre zerstreut liegenden Aecker so auszutauschen, daß ein jeder das Seinige in einem einzigen Stück zusammen bekomme. Diese Permutation so durchzuführen, daß keiner der Interessenten Nutzen oder Schaden habe.

Auflösung. Es sei ABCDEGF (Fig. 410) das ganze Ackerstück; dasselbe bestehe aus den Antheilen α, β, γ, δ, ε, wovon α und δ dem Interessenten A, β und ε dem B gehören, γ aber dem C allein zukommt.

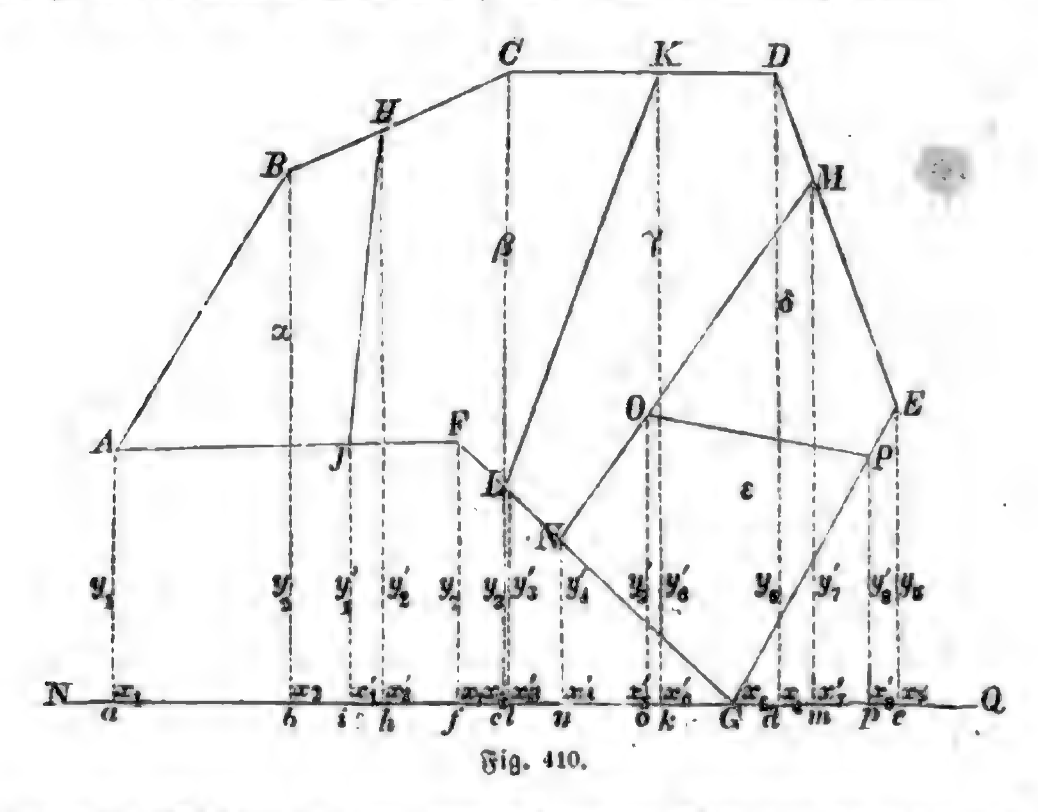


Fig. 410.

Das erste Geschäft bei der vorzunehmenden Permutation und Zusammenlegung ist die genaue Inhaltsbestimmung des Ganzen und der einzelnen Theile α, β, γ, δ, ε, welches beides nach den in den §§. 302—307 gelösten Aufgaben ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann.

Nun wird man natürlich die Theilung durch gerade ungebrochene Linien zu bewerkstelligen suchen, weil diese die zur Bearbeitung des Ackers bequemsten Formen geben, ja es kann auch wünschenswerth sein, daß die Theillinien mit einander parallel laufen und sogar eine bestimmte Richtung haben. Wir wollen, um die Aufgabe möglichst umfassend zu machen, annehmen, die Richtung der Theilungslinien sei durch die Gerade XY gegeben, mit der alle neu entstehenden Grenzen parallel laufen sollen.

Man entwerfe nun einen genauen Grundriß des ganzen Ackerstücks nach

einem nicht zu kleinen Maßstabe, in welchen jedoch die alten Grenzen der Antheile α, β, γ, δ, ε nicht aufgenommen zu werden brauchen; theile dann das Ganze im Grundrisse nach Anleitung des §. 335 nach dem Verhältniß von $\alpha + \delta : \beta + \varepsilon : \gamma$. Man erhält dadurch im Risse die Theilungspunkte U, V, R, W, welche nun noch auf das Feld übergetragen werden müssen, was leicht geschieht, wenn man ihre Entfernung von den nächsten Eckpunkten mittels Zirkel und Maßstab genau bestimmt und dann auch auf dem Felde abmißt.

Hätte die Figur keine, oder doch nur theilweise scharf bestimmbare Ecken, oder wäre sie krummlinig, so müßte man bei der Aufnahme des Feldes an geeigneten Punkten Pfähle einschlagen und diese mit auf den Riß bringen; solche Punkte können dann bei der Eintheilung und Festsetzung der Theilpunkte U, V, R, W statt der mangelnden Ecken als Anhaltepunkte der Messung dienen. Will man bei dem ganzen Geschäfte nicht blos von der Kette Gebrauch machen, so kann man die im Risse gefundenen Theilpunkte U, V, R, W auch mittels des Meßtisches auf das Feld übertragen.

Da diese Aufgabe eine der häufiger vorkommenden ist und zugleich mehrere der vorangegangenen in sich begreift, so wollen wir sie noch an einem speciellen Zahlenbeispiele durchführen.

Das Feld ABCDEGF (Fig. 410) enthalte die einzelnen Stücke α = ABHJ, β = JHCKLF, γ = LKDMN, δ = MEPO, ε = OPGN.

Man nehme das Feld auf, gleichviel ob mit der Kette oder andern Werkzeugen und fertige eine Karte davon in einem möglichst großen Maßstabe an, welche auch die alte Eintheilung in sich begreift; dann ermittele man den Flächeninhalt F des ganzen Feldes und seiner einzelnen Theile α, β, γ, δ, ε. Zu diesem Zwecke lege man die Absciſſenachse NQ zu Grunde; wir legen sie hier durch den Punkt G, man könnte sie auch mit einer Seite der Figur zusammenfallen lassen. Nun fälle man aus allen Ecken der Figur Ordinaten auf NQ, wie Aa, Bb, Cc u. s. w., messe diese Ordinaten und die Abscissen ab, ac, ad u. s. w. nach dem Maßstabe der Figur, so erhält man für den Inhalt F der ganzen Figur folgenden Ausdruck:

$$F = [aABb + bBCc + cCDd + dDEe] \\ - [aAFf + fFG + GEe].$$

Bei fFG und GEe könnte man auch die Trapezform beibehalten, wenn man den mit G zusammenfallenden Punkt g sich dächte und dann fFGg und gGEe schriebe, da Gg nachgehends doch = 0 gesetzt würde. Nennt man dann die Ordinaten der Punkte A, B, C .... der Reihe nach y_1, y_2, y_3 ..... und ihre Abscissen x_1, x_2, x_3 ....., so erhält man für den Inhalt folgenden Ausdruck:

$$F = \left[\frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) + \frac{y_3 + y_4}{2}(x_4 - x_3) + \frac{y_4 + y_5}{2}(y_5 - y_4)\right] - \left[\frac{y_7 + y_1}{2}(x_7 - x_1) + \frac{y_7 + y_6}{2}(x_6 - x_7) + \frac{y_5 + y_6}{2}(x_5 - x_6)\right].$$

Hat nun die Messung folgende Maße ergeben:

Ordinaten.		Abscissen.		Halbe Ordinatensummen.		Abscissendifferenzen.		Producte.
y_1	12,7	x_1	0	$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$	19,5	$x_2 - x_1$	8,6	167,7
y_2	26,3	x_2	8,6	$\frac{1}{2}(y_2 + y_3)$	28,9	$x_3 - x_2$	10,3	297,67
y_3	31,5	x_3	18,9	$\frac{1}{2}(y_3 + y_4)$	31,25	$x_4 - x_3$	13,8	431,25
y_4	31	x_4	32,7	$\frac{1}{2}(y_4 + y_5)$	22,95	$x_5 - x_4$	6,0	137,7
y_5	14,9	x_5	38,7	$\frac{1}{2}(y_5 + y_6)$	7,45	$x_5 - x_6$	8,0	59,6
y_6	0	x_6	30,7	$\frac{1}{2}(y_6 + y_7)$	6,5	$x_6 - x_7$	13,8	89,7
y_7	13	x_7	16,9	$\frac{1}{2}(y_7 + y_1)$	12,85	$x_7 - x_1$	16,9	217,165

so berechnen sich daraus leicht die halben Summen der Ordinaten und die Differenzen der Abscissen, sowie die Producte dieser Größen, wie die folgenden Columnen obenstehender Tafel sie geben. Daraus erhält man den Inhalt F der ganzen Figur durch die von der Formel vorgezeichnete Zusammenstellung:

167,70	217,165
297,67	89,700
431,25	59,600
137,70	366,465
1034,320	
366,465	
F = 667,855.	

In derselben Weise werden nun die Inhalte der einzelnen Ackertheile α, β .... berechnet; wir haben, wie aus der Figur zu sehen, die Ordinaten und Abscissen der hier neu hinzukommenden Punkte mit y_1', x_1', y_2', x_2' .... benannt. Man erhält hier folgende Formeln:

$$\alpha = [aABb + bBHh] - [aAJi + iJHh]$$

$$= \left[\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_2'}{2} \cdot (x_2' - x_2)\right] - \left[\frac{y_1 + y_1'}{2} \cdot (x_1' - x_1) + \frac{y_1' + y_2'}{2} \cdot (x_2' - x_1')\right]$$

$$\beta = [iJHh + hHCc + cCKk] - [iJFf + fFLl + lLKk]$$

$$= \left[\frac{y_1' + y_2'}{2} \cdot (x_2' - x_1') + \frac{(y_2' + y_3)}{2} (x_3 - x_2') + \frac{y_3 + y_6'}{2} \cdot (x_6' - x_3)\right]$$

$$- \left[\frac{y_1' + y_7}{2} (x_7 - x_1') + \frac{y_7 + y_3'}{2} (x_3' - x_7) + \frac{y_3' + y_6'}{2} \cdot (x_6' = x_3')\right]$$

$$\gamma = [lLKk + kKDd + dDMm] - [lLNn + nNMm]$$

$$= \left[\frac{y_3' + y_6'}{2} \cdot (x_6' - x_3') + \frac{y_6' + y_4}{2} (x_4 - x_6') + \frac{y_4 + y_7'}{2} \cdot (x_7' - x_4)\right]$$

$$- \left[\frac{y_3' + y_4'}{2} \cdot (x_4' - x_3') + \frac{y_4' + y_7'}{2} \cdot (x_7' - x_4')\right].$$

$$\delta = [oOMm + mMEe] - [oOPp + pPEe]$$

$$= \left[\frac{y_5' + y_7'}{2} \cdot (x_7' - x_5') + \frac{y_7' + y_5}{2} \cdot (x_5 - x_7')\right]$$

$$- \left[\frac{y_5' + y_8'}{2} \cdot (x_8' - x_5') + \frac{y_8' + y_5}{2} (x_5 - x_8')\right]$$

$$\varepsilon = [nNOo + oOPp] - [nNG + GPp]$$

$$= \left[\frac{y_4' + y_5'}{2} \cdot (x_5' - x_4') + \frac{y_5' + y_8'}{2} \cdot (x_8' - x_5')\right]$$

$$- \left[\frac{y_4' + y_6}{2} (x_6 - x_4') + \frac{y_6 + y_8'}{2} (x_8' - x_6)\right].$$

Hat nun die Messung die in den ersten Columnen folgender Tafel stehenden Werthe für die Ordinaten und Abscissen ergeben, so berechnet man daraus leicht die Zahlen der nachfolgenden Columnen.

Ordinaten.		Abscissen.		Halbe Ordinatensumme.		Abscissendifferenz.		Producte der beiden letzten Columnen.
y_1'	12,8	x_1'	11,9	$\frac{1}{2}(y_1' + y_2')$	20,7	$x_2' - x_1'$	1,3	26,91
y_2'	28,6	x_2'	13,2	$\frac{1}{2}(y_1 + y_1')$	12,75	$x_1' - x_1$	11,9	151,725
y_3'	11,1	x_3'	19,4	$\frac{1}{2}(y_1' + y_7)$	12,9	$x_7 - x_1'$	5,0	64,5
y_4'	8,2	x_4'	22,1	$\frac{1}{2}(y_2' + y_3)$	30,05	$x_3 - x_2'$	5,7	171,285
y_5'	14,8	x_5'	26,6	$\frac{1}{2}(y_2 + y_2')$	27,45	$x_2' - x_2$	4,6	126,27
y_6'	31,2	x_6'	27,5	$\frac{1}{2}(y_3' + y_4')$	9,65	$x_4' - x_3'$	2,7	26,055
y_7'	26,1	x_7'	34,4	$\frac{1}{2}(y_3' + y_6')$	21,15	$x_6' - x_3'$	8,1	171,315
y_8'	12,1	x_8'	37,2	$\frac{1}{2}(y_7 + y_3')$	12,05	$x_3' - x_7$	2,5	30,125
				$\frac{1}{2}(y_4' + y_5')$	11,5	$x_5' - x_4'$	4,5	51,75
				$\frac{1}{2}(y_4' + y_6)$	4,1	$x_6 - x_4'$	8,6	35,26
				$\frac{1}{2}(y_4' + y_7')$	17,15	$x_7' - x_4'$	12,3	210,945
				$\frac{1}{2}(y_5' + y_7')$	20,45	$x_7' - x_5'$	7,8	159,51
				$\frac{1}{2}(y_5' + y_8')$	13,45	$x_8' - x_5'$	10,6	142,57
				$\frac{1}{2}(y_6' + y_4)$	31,1	$x_4 - x_6'$	5,2	161,72
				$\frac{1}{2}(y_7' + y_4)$	28,55	$x_7' - x_4$	1,7	48,535
				$\frac{1}{2}(y_6' + y_3)$	31,35	$x_6' - x_3$	8,6	269,61
				$\frac{1}{2}(y_7' + y_5)$	20,5	$x_5 - x_7'$	4,3	88,15
				$\frac{1}{2}(y_8' + y_5)$	13,5	$x_5 - x_8'$	1,5	20,25
				$\frac{1}{2}(y_8' + y_6)$	6,05	$x_8' - x_6$	6,5	39,325

Berechnung der einzelnen Theile.

α.

```
  167,70          151,725
  126,27           26,910
  ------          -------
  293,97          178,635
  178,635
  -------
α = 115,335.
```

β.

```
    26,91          64,5
   171,285         30,125
   269,61         171,315
   -------        -------
   467,805        265,940
   265,940
   -------
β = 201,865.
```

γ.

```
  171,315          26,055
  161,720         210,945
   48,535         -------
  -------         237,000
  381,570
  237,000
  -------
γ = 144,570.
```

δ.

```
   159,51         142,57
    88,15          20,25
   ------         ------
   247,66         162,82
   162,82
   ------
δ =  84,84.
```

ε.

51,75	35,26
142,57	39,325
194,32	74,585
74,585	
ε = 119,735.	

Es ist demnach:

$\alpha =$ 115,335
$\beta =$ 201,865
$\gamma =$ 144,570 — Nun war oben gefunden:
$\delta =$ 84,840 — F = 667,885
$\varepsilon =$ 119,735 — 666,345
Summa = 666,345. Differenz = 1,510.

Diese Differenz macht 0,22 Procent der ganzen Fläche aus, liegt also innerhalb der erlaubten Fehlergrenze, welche 1 Procent beträgt.

Die Antheile der einzelnen Interessenten berechnen sich nun hieraus wie folgt:

$\alpha =$ 115,335	$\beta =$ 201,865	C = $\gamma =$ 144,570.
$\delta =$ 84,840	$\varepsilon =$ 119,735	
A = 200,175	B = 321,600	

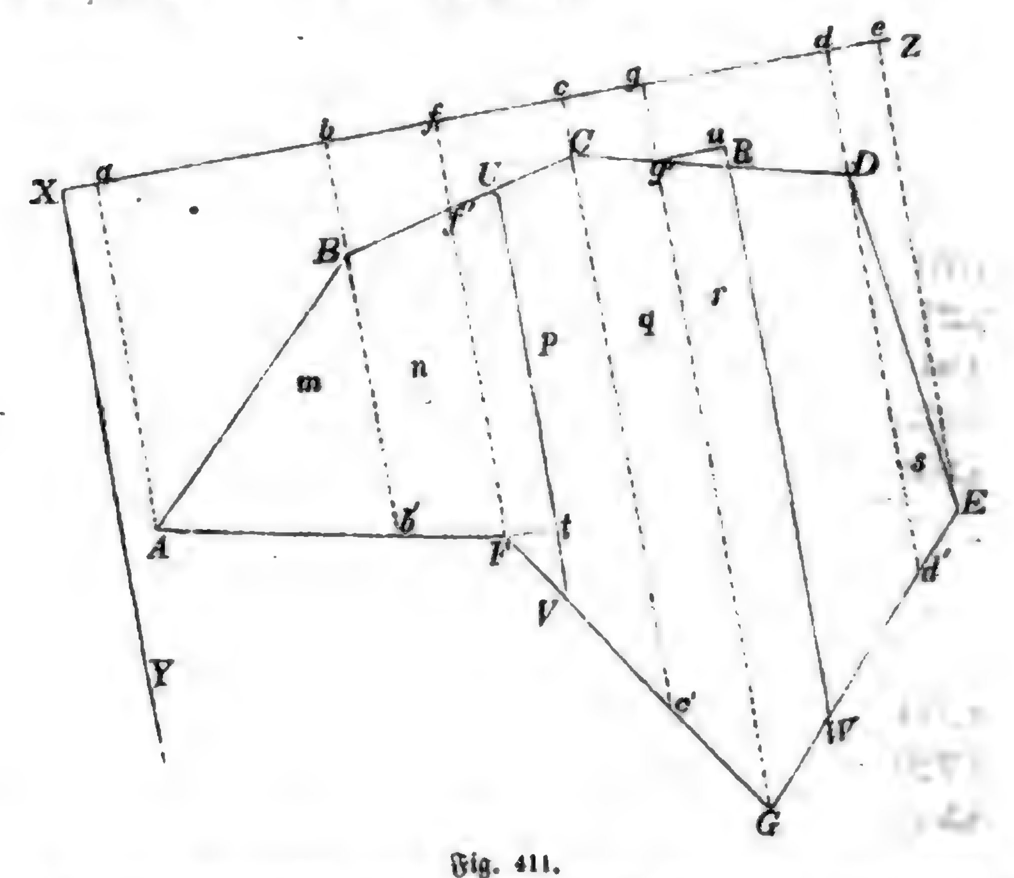


Fig. 411.

Um die Lage der neuen Theilungslinien zu berechnen, entwerfen wir das Polygon ABCDEGF in Fig. 411 noch einmal ohne die alten Scheide-

grenzen der Parcellen, und verfahren nun damit nach Anleitung des §. 335 mit Zuhülfenahme der Formeln des §. 332. Es sei also XY die Linie, mit welcher die neuen Grenzen parallel werden sollen, XZ eine Normale zu XY, so ziehen wir die Geraden Aa, bBb′, ff′F u. s. w., sämmtlich parallel mit XY (nach §. 335), wodurch das Polygon in Trapeze und Dreiecke zerlegt wird; diese Figuren mögen der Reihe nach m, n, p, q, r, s heißen. Um ihre Inhalte zu finden, messe man die Linien Bb′, Ff′, Cc′, Gg′, Dd′ nach dem Maßstabe, sowie auch die gegenseitigen Abstände ab, bf, fc, cg, gd, de je zweier Parallelen, welches letztere sicherer dadurch erreicht wird, daß man die Abstände jeder Parallelen von der Geraden XY mißt, also Xa, Xb, Xf u. s. w., und ab, bf, fc u. s. w. daraus berechnet, weil sich dann ein an einer Stelle begangener Fehler nicht auf die folgenden Abstände fortpflänzt. Berechnet man dann aus den Resultaten dieser Messungen auch noch den Inhalt der einzelnen Trapeze und Dreiecke, so erhält man folgende Zusammenstellung in tabellarischer Uebersicht:

Ordinaten.		Abscissen.		Parallelen.		Flächeninhalte.	
		Xa	2,5				
Bb′	13,9	Xb	13,7	ab	11,2	m	77,84
Cc′	26,9	Xc	24,9	bf	5,0	n	78,00
Dd′	19,9	Xd	38,2	fc	6,2	p	129,00
		Xe	40,5	cg	4,2	q	124,32
Ff′	16,1	Xf	18,7	gd	9,1	r	237,51
Gg′	32,3	Xg	29,1	de	2,3	s	22,885
						Summa	669,555

Es war . . . . F = 667,855

Differenz = 1,7

was etwa 0,25 Proc. der ganzen Fläche ausmacht, also noch weit unter der erlaubten Fehlergrenze liegt.

Es ist m = 77,84
n = 78,00
m + n = 155,84
p = 129,00
m + n + p = 284,84
q = 124,32
m + n + p + q = 409,16
r = 237,51
m + n + p + q + r = 646,67

A = 200,175
B = 321,600
A + B = 521,775
A = 200,175
m + n = 155,84
44,335
A + B = 521,775
m + n + p + q = 409,16
112,615.

A bekommt demnach $m + n$ und noch 44,335 Quadratruthen von p; die erste Grenzlinie fällt also so weit innerhalb des Trapezes p, daß sie an der Parallelen Ff' 44,335 Quadratruthen abschneidet. $A + B$ bekommen zusammen $m + n + p + q$ und noch 112,615 Quadratruthen von r. Sind UV und RW die beiden gesuchten Grenzlinien, so sind jetzt noch ihre normalen Abstände beziehlich von Ff' und Gg' zu berechnen, welches nach den Formeln des §. 332 geschieht. Die Elemente zu dieser Rechnung sind, nach der Bezeichnung des §. 332 und auf die Fig. 411 angewendet, für UV:

$c = Ff' = 16{,}1$ $\qquad$ $a - c = Cc' - Ff' = 10{,}8.$

$a = Cc' = 26{,}9$ $\qquad$ Inhalt $f = 44{,}335.$

$h = fc = 6{,}2$

Hier soll das Trapez vom gegebenen Inhalte an der kleinern Parallele Ff' abgeschnitten werden, man muß sich daher der Formeln (7) des §. 332 bedienen. Wir bekommen daher folgende Rechnung:

$\log 2 = 0{,}3010300$	$\log \operatorname{tg} \varphi = 9{,}8875785$
$\log f = 1{,}6467467$	$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = 9{,}5328250$
$\log (a - c) = 1{,}0334238$	$\log c = 1{,}2068259$
$2{,}9812005$	$\log h = 0{,}7923917$
$\log h = 0{,}7923917$	$1{,}4196211$
$2{,}1888088$	$\log (a - c) = 1{,}0334238$
2) $1{,}0944044$	$\log x = 0{,}3861973$
$\log c = 1{,}2068259$	$x = 2{,}43331$ R.
$\log \operatorname{tg} \varphi = 9{,}8875785$	
$\varphi = 37° \; 39' \; 56''$	$\log c = 1{,}2068259$
$\tfrac{1}{2}\varphi = 18° \; 49' \; 58''$	$\log \cos \varphi = 9{,}8975194$
	$\log y = 1{,}3093065$
	$y = 20{,}384.$

Der Werth von y wird berechnet, um zur Controle der Rechnung den Inhalt des abgeschnittenen Trapezes mit dem gegebenen zu prüfen.

$Ff' = 16{,}1$
UV oder $y = 20{,}4$
$36{,}5$
$18{,}25$
$h = x = 2{,}4$
$f = 43{,}8$ Q.-R.
Differenz $0{,}2$ „

Soll nun die Grenzlinie UV in den Plan eingezeichnet werden, so errichte man etwa in F ein Loth Ft auf Ff', mache Ft = x = 2,4 R. und ziehe VtU ╪ Ff', so stellt ABUVF den Antheil des A vor.

Um die zweite Grenzlinie RW zu finden, muß man von dem Trapeze r ein Stück = 112,615 Quadratruthen abschneiden, und zwar an Gg' grenzend; Gg' ist aber > Dd'; folglich muß die Rechnung nach den Formeln (9) des §. 332 geführt werden. Die Elemente der Rechnung sind hier, bei gleicher Bezeichnung wie im §. 332:

$$a = Gg' = 32{,}3\,R. \qquad a - c = 12{,}4\,R.$$
$$c = Dd' = 19{,}9\ „ \qquad f = 112{,}615\,Q.\text{-}R.$$
$$h = gd = 9{,}1\ „$$

Die Rechnung selbst wird wie folgt:

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log f &= 2{,}0515963 \\
\log (a-c) &= 1{,}0934217 \\
&\ 3{,}4460480 \\
\log h &= 0{,}9590414 \\
2)\ &\ 2{,}4870066 \\
&\ 1{,}2435033 \\
\log a &= 1{,}5092025 \\
\log \sin \varphi &= 9{,}7343008 \\
\varphi &= 32^\circ\, 50'\, 44'' \\
1/2\, \varphi &= 16^\circ\, 25'\, 22''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin 1/2\, \varphi &= 9{,}4513609 \\
&\ 2 \\
\log \sin 1/2\, \varphi^2 &= 8{,}9027218 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log a &= 1{,}5092025 \\
\log h &= 0{,}9590414 \\
&\ 1{,}6719957 \\
\log (a-c) &= 1{,}0934217 \\
\log x &= 0{,}5785740 \\
x &= 3{,}78943\ R. \\
\log a &= 1{,}5092025 \\
\log \cos \varphi &= 9{,}9243494 \\
\log y &= 1{,}433519 \\
y &= 27{,}1364\ R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gg' &= 32{,}3 \\
y &= 27{,}1 \\
2)\ &\ 59{,}4 \\
&\ 29{,}7 \\
x &= 3{,}8 \\
f &= 112{,}86 \\
\text{wahrer Werth} &= 112{,}62
\end{aligned}$$

Differenz = 0,24, was wieder etwa 0,2 Proc. beträgt, also reichlich zulässig ist.

Soll nun RW auf den Plan getragen werden, so errichte man etwa in g' ein Loth g'u auf Gg', mache g'u = x = 3,8 R. und ziehe uRW ╪ Gg'.

Wir haben bei der Bestimmung der zweiten Grenze RW die Rechnung von vorn an geführt und von der ganzen Figur die Summe der Antheile des A und B abgeschnitten, und nicht B allein von dem, was übrig blieb, nachdem A abgenommen war; dieses hier befolgte Verfahren hat den Vortheil daß bei der ersten Operation etwa begangene Fehler sich nicht auf die zweite Rechnung fortpflanzen können, was bei dem zweiten Verfahren der Fall sein würde.

Die im Vorhergehenden gelöste Aufgabe faßt zugleich den Fall in sich, wo eine krummlinige Grenze zwischen zwei Grundstücken gerade gelegt werden soll; denn man braucht nur in der Nähe der alten Grenze auf der einen Seite derselben eine gerade Linie abzustecken, welche mit der neuen Grenze (wenn deren Richtung vorgeschrieben sein sollte) parallel ist, das Stück zwischen dieser Linie und der alten Grenze zu vermessen und dessen Inhalt zu bestimmen, dann von der abgesteckten Geraden ab ein Trapez abzuschneiden, welches den berechneten Inhalt hat; die dieses Trapez begrenzende Gerade, welche mit der abgesteckten Linie parallel ist, bildet die neue Grenze der beiden Ackerstücke.

Wir haben bei der Lösung der Aufgabe dieses Paragraphen angenommen, daß sämmtliche zu permutirende Grundstücke von einerlei Bonität seien. Wenn die Fläche, in welcher die Permutation vorgenommen wird, nicht groß ist, so wird dies auch mehrentheils der Fall sein; sind aber die einzelnen Stücke weit zerstreut und nehmen sie zusammen eine große Fläche ein, so wird auch ihre Bonität ungleich sein; dann muß bei der Permutation darauf Rücksicht genommen werden, wozu dann aber die Lösung der Aufgabe des §. 337 die nöthige Anleitung gibt.

Viertes Kapitel.

Verticalmessungen.

§. 339. Bei den im dritten Kapitel ausgeführten Aufnahmen wurde stets die Darstellung der Horizontalprojection einer Anzahl Punkte bezweckt. Weil aber alle Punkte derselben projicirenden Linie, d. h. derselben Verticalen genau dieselbe Horizontalprojection geben, so wird man die genaue Lage eines Punktes aus seiner Horizontalprojection noch nicht folgern können; es würde dazu noch

die Projection des Punktes auf eine Verticalebene, oder sein verticaler Abstand von einer Horizontalebene, deren eigenen Abstand vom Horizonte des betreffenden Ortes man kennte, erforderlich sein.

Der verticale Abstand eines Punktes von einem andern heißt die Höhe jenes Punktes in Bezug auf diesen; ist dieser letztere ein Punkt des Meeresspiegels, so heißt der verticale Abstand jedes andern von ihm seine absolute Höhe; der verticale Abstand eines Punktes von einem andern, der höher oder tiefer liegt als der Meereshorizont, heißt seine relative Höhe. Die Bestimmung der absoluten oder relativen Höhe eines Punktes heißt eine Höhenmessung.

§. 340. Je nach den räumlichen Verhältnissen der zu messenden Punkte verfährt man bei Höhenbestimmungen sehr verschieden und benutzt dabei ebenso verschiedene Instrumente. Das Verfahren heißt das Höhenmessen (im engern Sinne), oder die Hypsometrie, wenn die Höhe der zu messenden Punkte im Verhältniß zu den horizontalen Dimensionen, welche dabei in Anwendung kommen, beträchtlich ist, und die Punkte, deren Höhenunterschied man sucht, in derselben Verticalen liegen; es heißt dagegen das Nivelliren, wenn die Höhenunterschiede nur gering sind, und die Punkte, deren Höhenunterschied man sucht, nicht in derselben Verticalen liegen.

Beim Höhenmessen wird auf zwei verschiedene Arten verfahren: entweder mißt man gewisse Winkel und berechnet daraus die gesuchte Höhe mit Hülfe der Lehrsätze der Trigonometrie; oder man beobachtet gleichzeitig den Stand des Barometers in beiden Stationen (in dem höhern und tiefern Punkt), und berechnet daraus die Höhe. Jenes heißt das trigonometrische, dieses das barometrische Höhenmessen. Hier soll jedoch blos von ersterm die Rede sein; letzteres wird theils in den Lehrbüchern der Physik, theils in eigenen Schriften behandelt.

A. Das trigonometrische Höhenmessen.

§. 341. **Aufgabe.** Die verticale Höhe eines Gegenstandes AB zu messen, vorausgesetzt, daß der Fuß desselben mit einem willkürlich gewählten Standpunkte C in einer Horizontalebene liege und zugänglich sei.

Auflösung. Ist AB (Fig. 412) der Gegenstand, dessen Höhe h gemessen werden soll, C der gewählte Standpunkt in derselben Horizontalen mit B, so messe

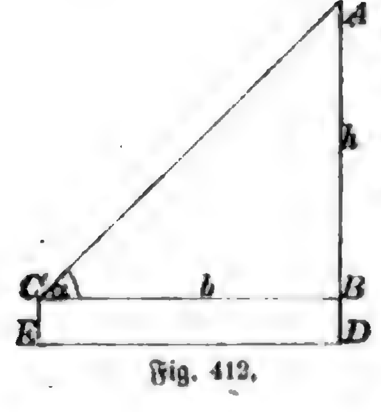


Fig. 412.

man die Standlinie $BC = b$ und den Elevationswinkel $ACB = \alpha$; dann ist:

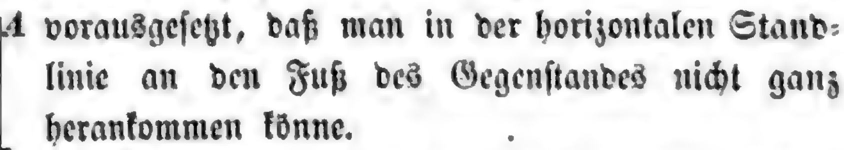
$$h = b \cdot tg\ \alpha.$$

Die Horizontale BC liegt aber in der Höhe des Auges, oder richtiger in der Höhe der Drehungsachse des Fernrohrs; also muß zu der gefundenen Höhe $AB = h$ noch die Höhe $CE = BD = h'$ addirt werden, so daß dann

$$AD = b \cdot tg\ \alpha + h'$$

ist.

§. 342. **Aufgabe.** Die verticale Höhe AB eines Gegenstandes zu messen, vorausgesetzt, daß man in der horizontalen Standlinie an den Fuß des Gegenstandes nicht ganz herankommen könne.



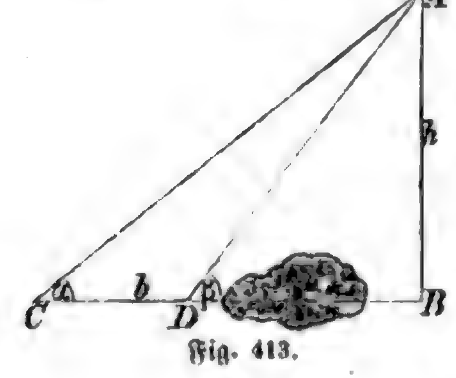


Fig. 413.

Auflösung. AB (Fig. 413) sei die zu messende Höhe, BC eine Horizontale, die Strecke BD aber unzugänglich. Man messe die Linie $CD = b$ und die Winkel $ACD = \alpha$ und $ADB = \beta$, so ist W. $CAD = \beta - \alpha$, also:

$$AD = \frac{b \cdot \sin\ \alpha}{\sin\ (\beta - \alpha)},$$

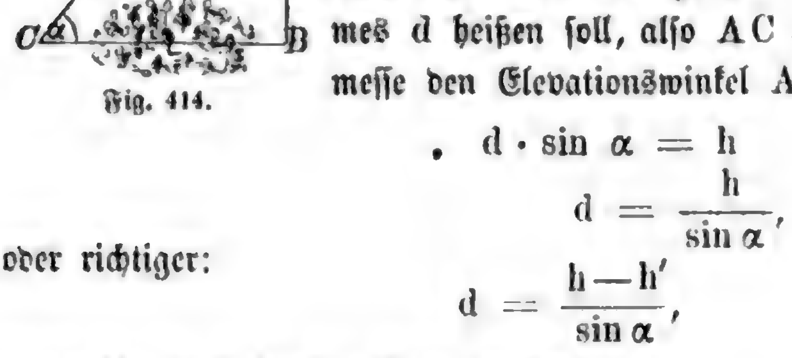
und $$AB = AD \cdot \sin\ \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin\ (\beta - \alpha)},$$

wozu noch die Höhe h' des Winkelmessers zu addiren ist.

§. 343. **Aufgabe.** Die Höhe h eines Thurmes ist bekannt; man soll die directe Entfernung d der Thurmspitze von einem beliebig gegebenen Punkte der Ebene unter der Voraussetzung bestimmen, daß der Fuß des Thurmes von diesem Punkte aus nicht zugänglich sei.

Fig. 414.

Auflösung. AB (Fig. 414) sei der Thurm, C der Ort, dessen Entfernung AC von der Spitze A des Thurmes d heißen soll, also $AC = d$ und $AB = h$. Man messe den Elevationswinkel $ACB = \alpha$, so ist:



$$d \cdot \sin\ \alpha = h$$

$$d = \frac{h}{\sin \alpha},$$

oder richtiger:

$$d = \frac{h - h'}{\sin \alpha},$$

wenn h' die Höhe des Winkelmessers ist.

Mäße man von der Spitze A aus den Tiefenwinkel $BAC = \beta$, so wäre:

$$d \cdot \cos\beta = h,$$

$$d = \frac{h}{\cos\beta}.$$

Man könnte aber natürlich auch aus dem gemessenen Winkel β den Winkel α bestimmen und dann nach der ersten Formel rechnen.

§. 344. **Aufgabe.** Aus der bekannten Höhe h eines Thurms die horizontale Entfernung x eines Punktes von seinem Fuße zu finden, wenn der Fuß von diesem Punkte aus nicht zugänglich ist.

Auflösung. AB (Fig. 414) sei der Thurm, dessen bekannte Höhe = h, C der Punkt in der Horizontalebene, $BC = x$. Man messe den Elevationswinkel $ACB = \alpha$, so ist:

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = h \cdot \operatorname{cotg}\alpha.$$

Wäre β der Tiefenwinkel CAB, so hätte man:

$$x = h \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

§. 345. **Aufgabe.** Die Höhen h, h′ zweier Berge über dem dazwischenliegenden Thale sind bekannt. Man soll die directe Entfernung beider Bergspitzen, sowie die horizontale Entfernung der beiden von den Spitzen gefällten Verticalen finden.

Auflösung. Es sei (Fig. 415) $AC = h$, $BD = h'$; man denke sich die Horizontale BE gezogen und messe den Elevationswinkel $ABE = \alpha$, so ist:

$$AB = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{h - h'}{\sin\alpha},$$

$$BE = \frac{AE}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h - h'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

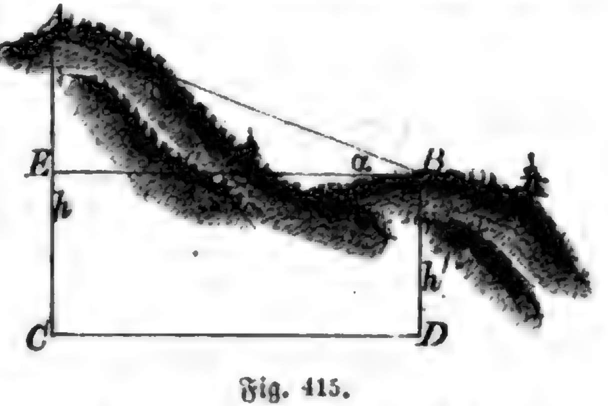


Fig. 415.

§. 346. **Aufgabe.** Die Höhe h des obern Theils eines erhabenen Gegenstandes zu messen, wenn eine horizontale Standlinie an den Fuß desselben geführt und gemessen werden kann.

Auflösung. Es sei AD (Fig. 416) der Gegenstand, $AB = h$ die zu messende Höhe desselben, C ein Punkt in derselben Horizontalebene mit D. Man messe die Elevationswinkel $ACD = \alpha$ und $BCD = \beta$, sowie die Basis $CD = b$; dann ist:

$$AD = b \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

$$BD = b \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

$$AB = AD - BD = b\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

$$h = \frac{b \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

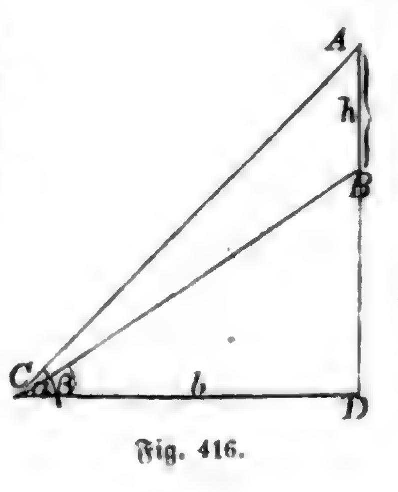


Fig. 416.

§. 347. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn sich nur eine vom Fußpunkte aus schief ansteigende Standlinie, oder nur ein Theil einer solchen in einer Verticalebene mit dem Gegenstande messen läßt, so daß der Fußpunkt tiefer liegt als der Standort.

Erster Fall. Es lasse sich die ganze geneigte Standlinie messen.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 417) der Gegenstand, BC die schief ansteigende Standlinie. Man messe BC $= b$, denke sich durch C eine Horizontale CE, messe den Elevationswinkel ACE $= \alpha$ und den Depressionswinkel BCE $= \beta$, so ist W. ACB $= \alpha + \beta$, und W. CAB $= 90^\circ - \alpha$, folglich sin CAB $= \cos \alpha$. Im Dreieck ABC hat man also:

$$AB : b = \sin(\alpha + \beta) : \cos \alpha$$

$$AB = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}.$$

Fig. 417.

Würde aber die Höhe des Punktes A über dem Horizonte von C verlangt, also die Höhe AE gesucht, so hätte man:

$$BE = b \cdot \sin \beta;$$

$$\text{also: } AE = AB - BE = b \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} - \sin \beta \right]$$

$$AE = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} = b \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta.$$

Zweiter Fall. Es lasse sich von der geneigten Standlinie nur ein Theil messen.

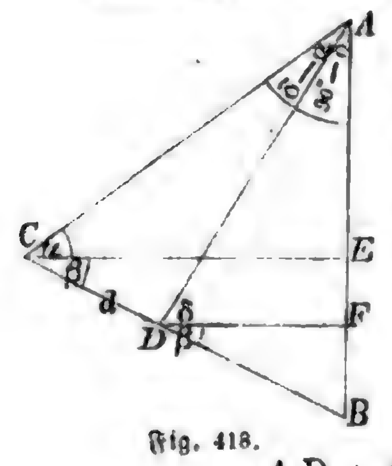


Fig. 418.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 418) die zu messende Höhe, C der Standpunkt, BC die Standlinie, von der sich nur das Stück CD messen läßt. Man messe CD $= d$, denke sich durch C und D die Horizontalen CE, DF, messe W. ACE $= \alpha$, W. BCE $= \beta$ und W. ADF $= \delta$; so ist: W. BDF $= \beta$, W. ADB $= \beta + \delta$, W. CAD $= \delta - \alpha$. Dann ist ferner im Dreieck ACD:

$$AD : d = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\delta - \alpha)$$

$$AD = \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

Da W. ABD $= 90^\circ - \beta$, so hat man im Dreieck ABD:

$$AB : AD = \sin(\beta + \delta) : \cos \beta$$

$$AB = \frac{AD \cdot \sin(\beta + \delta)}{\cos \beta}$$

$$= \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \delta)}{\sin(\delta - \alpha) \cdot \cos \beta}.$$

Da W. BAD $= 90^\circ - \delta$, so ist ferner:

$$BD : AB = \cos\delta : \sin(\beta + \delta),$$

$$BD = \frac{AB \cdot \cos\delta}{\sin(\beta + \delta)}$$

$$= \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\delta}{\sin(\delta - \alpha) \cdot \cos\beta},$$

während $BC = BD + d$.

§. 348. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn sich nur eine vom Fußpunkte schief absteigende Standlinie, oder nur ein Theil derselben, in derselben Verticalebene mit dem Gegenstande messen läßt, so daß der Fußpunkt höher liegt als der Standort.

Erster Fall. Es lasse sich die ganze Standlinie messen.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 419) der zu messende Gegenstand, BC die schief absteigende Standlinie. Man denke sich AB verlängert bis zum Horizonte von C, in D, ziehe die Horizontale CD, messe BC $= b$, W. ACD $= \alpha$, W. BCD $= \beta$, so ist W. ACB $= \alpha - \beta$, und in dem Dreieck ABC ist:

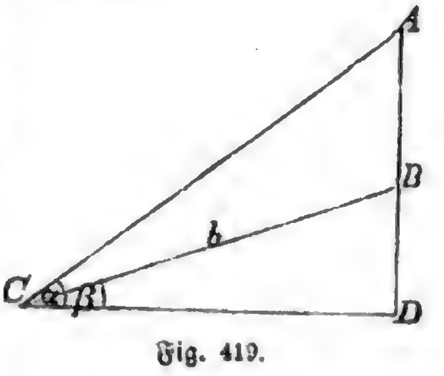


Fig. 419.

$$AB : BC = \sin(\alpha - \beta) : \cos\alpha,$$

$$AB = \frac{b \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

Wollte man die Höhe des Punktes A über dem Horizonte von C wissen, so müßte man noch

$$BD = b \cdot \sin\beta$$

hinzusetzen, also wäre dann:

$$AD = b \cdot \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha} + \sin\beta\right)$$

$$= \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} = b\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\beta.$$

Zweiter Fall. Es lasse sich von der geneigten Standlinie nur ein Theil messen.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 420) die zu messende Höhe, BC die Standlinie, von der sich jedoch nur das Stück CD messen läßt. Man denke sich AB verlängert bis zum Horizonte von C, in F, ziehe die Horizontalen DE, CF, messe CD $= d$; W. ACF $= \alpha$, W. BCF $= \beta$ und W. ADE $= \delta$; so ist: W. BDE $= \beta$, W. ADB $= \delta - \beta$, W. DAE $= 90^\circ - \delta$, W. CAB $= 90^\circ - \alpha$, W. ABD $= 90^\circ + \beta$, W. CAD $=$ CAB $-$ DAB $= \delta - \alpha$, und im Dreieck ADC ist:

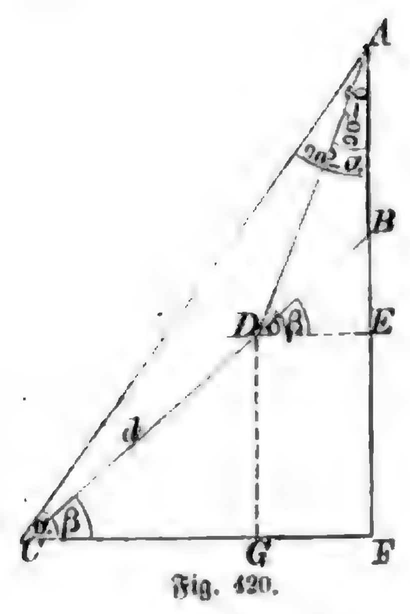


Fig. 420.

$$AD : d = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\delta - \alpha)$$

$$AD = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

Ferner ist im Dreieck ABD:

$$AB : AD = \sin(\delta - \beta) : \cos\beta$$

$$AB = \frac{\sin(\delta - \beta)}{\cos\beta} \cdot AD$$

$$= \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\delta - \beta)}{\sin(\delta - \alpha) \cdot \cos\beta}.$$

Sollte die Höhe von A über dem Horizonte von D gefunden werden, so hätte man:

$$AE = AD \cdot \sin\delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin\delta}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

Und sollte die Höhe von A über dem Horizonte von C bestimmt werden, so müßte man zu AE noch EF oder DG hinzusetzen, während

$$DG = d \cdot \sin\beta,$$

also:

$$AF = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin\delta + \sin(\delta - \alpha) \cdot \sin\beta}{\sin(\delta - \alpha)}$$

$$= \frac{d \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\delta - \beta)}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

Soll die Standlinie BC gefunden werden, so ist:

$$BC = BD + d$$

$$\text{und } BD = \frac{AD \cdot \cos\delta}{\cos\beta}$$

$$= \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos\delta}{\sin(\delta - \alpha) \cdot \cos\beta}.$$

§. 349. **Aufgabe.** Eine verticale Höhe zu messen, wenn man weder eine horizontale noch schiefe Standlinie, noch Theile davon, in einer durch die zu messende Höhe gelegten Verticalebene messen kann.

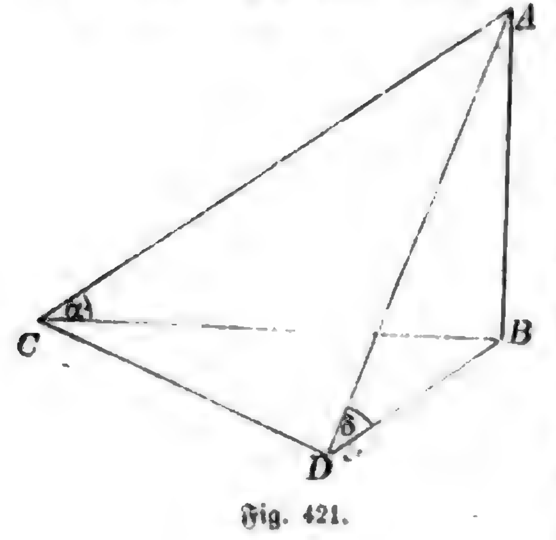


Fig. 421.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 421) die zu messende Höhe. Man messe eine Seitenstandlinie CD, die womöglich ganz oder doch mit einem ihrer Endpunkte in der durch B gelegten Horizontalebene liegt; es sei CD = d, und wenigstens C im Horizonte von B. Dann messe man noch die Horizontalwinkel BCD und BDC, so läßt

sich aus den gemessenen drei Stücken die Länge von BC berechnen, und es findet sich dann, wenn, wie angenommen, BC horizontal ist:

$$AB = BC \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Läge C nicht, aber D im Horizonte von B, so würde man im Dreiecke BCD statt BC dann BD berechnen, und

$$AB = BD \cdot \operatorname{tg} \delta$$

erhalten.

§. 350. **Aufgabe.** Eine verticale Höhe zu messen, wenn man weder eine horizontale noch schiefe Standlinie, noch Theile davon in einer durch den Fußpunkt der Höhe gelegten Verticalebene benutzen, auch keine Hülfsstandlinie finden kann, die auch nur mit einem ihrer Endpunkte in der Horizontalebene von B läge.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 422) die zu messende Höhe. Durch ihren Fußpunkt B denke man sich eine Horizontalebene Bcd gelegt; ist nun CD die schief geneigte Standlinie, so fälle man von C und D Lothe Cc, Dd auf die Horizontalebene Bcd, welche letztere in c und d treffen; cBd stellt dann den auf den Horizont reducirten schiefen Winkel CBD vor, Bcd den reducirten Winkel BCD, und Bdc den reducirten Winkel BDC. Von C aus denke man noch eine Horizontale

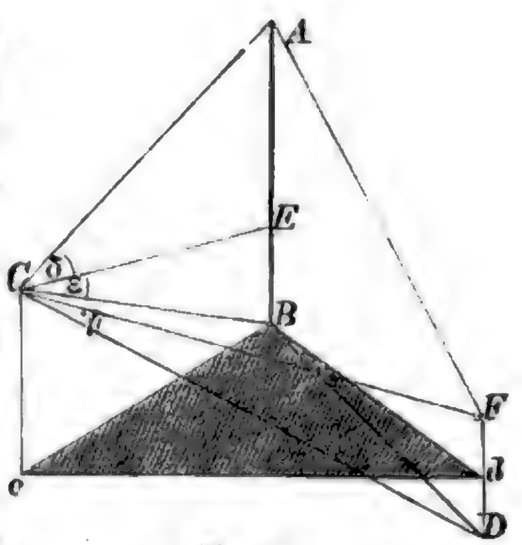


Fig. 422.

CE, welche die Höhe AB in E trifft, und eine Horizontale CF, welche das Loth Dd in F trifft, und zwar, im Falle der Fig. 422, wo C über, D unter der durch B gelegten Horizontalebene gedacht wird, in der Verlängerung über d hinaus; ECF stellt ebenfalls den auf den Horizont reducirten Winkel BCD vor. Nun messe man die Horizontalwinkel Bcd, Bdc, den Verticalwinkel DCF, den Elevationswinkel ACE und den Depressionswinkel ECB, sowie die schiefe Gerade CD. Es sei CD = a; W. Bcd = α, Bdc = β, DCF = γ, ACE = δ, BCE = ε, so ist im rechtwinkeligen Dreieck DCF:

$$CF = a \cdot \cos \gamma,$$
$$\text{oder: } cd = a \cdot \cos \gamma,$$

denn CcdF ist ein Rechteck; daher wieder im Dreieck Bcd, in welchem nun cd und die Winkel α und β bekannt sind,

$$Bc = \frac{a \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)},$$

oder, weil CcEB ein Parallelogramm ist:

$$CE = \frac{a \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Im rechtwinkeligen Dreiecke ACE ist ferner:

$$AE = CE \cdot tg\,\delta,$$

und im rechtwinkeligen Dreiecke BCE:

$$BE = CE \cdot tg\,\varepsilon;$$

aber $AB = AE + BE,$

also: $AB = CE\,(tg\,\delta + tg\,\varepsilon)$

$$= \frac{a \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin(\delta + \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\delta \cdot \cos\varepsilon}.$$

§. 351. **Aufgabe.** Die Höhe eines senkrecht stehenden Gegenstandes ist bekannt; man soll von der Spitze desselben die Länge einer geraden Linie finden, welche mit dem Fuße in derselben Horizontalebene liegt.

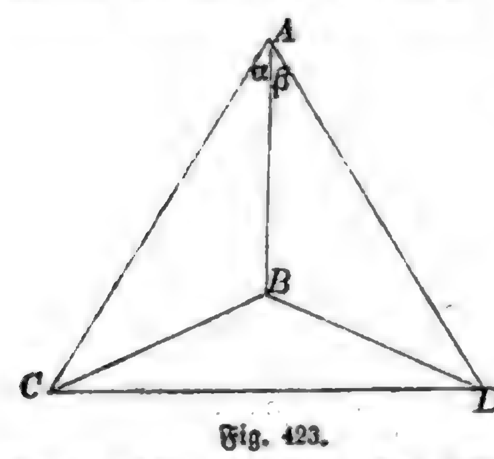


Fig. 423.

Auflösung. AB = h (Fig. 423) sei der Gegenstand, CD die mit B in einer Horizontalebene liegende Linie. Man messe W. BAC = α, BAD = β und CAD = γ, so hat man im rechtwinkeligen Dreieck ABC:

$$AC = h \cdot \sec\alpha,$$

und im Dreieck ABD:

$$AD = h \cdot \sec\beta;$$

dann wieder im Dreieck ACD:

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2\,AC \cdot AD \cdot \cos\gamma}$$

$$= h\sqrt{\sec\alpha^2 + \sec\beta^2 - 2\sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \cos\gamma}.$$

§. 352. **Aufgabe.** Eine senkrechte Höhe kann aus drei in gerader Linie liegenden Standpunkten, die mit dem Fußpunkte der Höhe in derselben Horizontalebene liegen, gesehen werden; man soll die Höhe und die Entfernung der drei Standpunkte vom Fuße bestimmen.

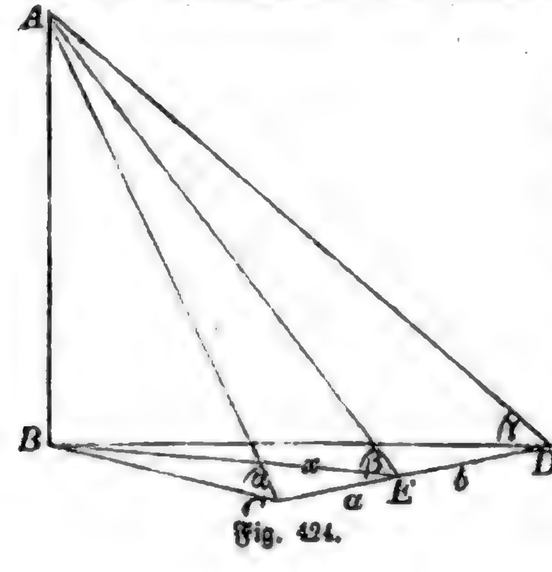


Fig. 424.

Auflösung. AB (Fig. 424) sei die Höhe, C, E, D seien die drei Standpunkte in der Horizontalebene von B und unter sich in gerader Linie liegend. Man messe CE = a, DE = b, W. ACB = α, AEB = β, ADB = γ, so hat man im Dreieck BCE, wenn noch BE mit x bezeichnet wird:

1) $BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos BEC.$

Nun ist: $\frac{AB}{BC} = \text{tg}\ \alpha$ und $\frac{AB}{x} = \text{tg}\ \beta$;

folglich: $$\frac{x}{BC} = \frac{\text{tg}\ \alpha}{\text{tg}\ \beta},$$

$$BC = \frac{x \cdot \text{tg}\ \beta}{\text{tg}\ \alpha};$$

also aus (1):

$$\frac{x^2 \cdot \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \alpha^2} = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos BEC,$$

$$2)\ \cos BEC = \frac{a^2 + x^2 - \frac{x^2\ \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \alpha^2}}{2ax}.$$

Ebenso findet man im Dreieck BDE:

$$BD^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cdot \cos BED.$$

$$3)\ \cos BED = \frac{b^2 + x^2 - \frac{x^2\ \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \gamma^2}}{2 \cdot bx}.$$

Aber: $\cos BEC = -\cos BED$,

also auch:

$$\frac{a^2 + x^2 - \frac{x^2\ \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \alpha^2}}{2 \cdot ax} = \frac{-b^2 - x^2 + \frac{x^2\ \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \gamma^2}}{2 \cdot bx},$$

oder:

$$ax^2\,(\text{tg}\ \alpha^2 \cdot \text{tg}\ \gamma^2 - \text{tg}\ \alpha^2\ \text{tg}\ \beta^2) + bx^2 \cdot (\text{tg}\ \alpha^2\ \text{tg}\ \gamma^2 - \text{tg}\ \beta^2\ \text{tg}\ \gamma^2)$$
$$= (a^2b + ab^2) \cdot \text{tg}\ \alpha^2 \cdot \text{tg}\ \gamma^2.$$

$$ax^2 \cdot \frac{\text{tg}\ \alpha^2\ \text{tg}\ \gamma^2 - \text{tg}\ \alpha^2\ \text{tg}\ \beta^2}{\text{tg}\ \alpha^2 \cdot \text{tg}\ \gamma^2} + bx^2 \cdot \frac{\text{tg}\ \alpha^2\ \text{tg}\ \gamma^2 - \text{tg}\ \beta^2\ \text{tg}\ \gamma^2}{\text{tg}\ \alpha^2 \cdot \text{tg}\ \gamma^2}$$
$$= ab\,(a + b).$$

$$ax^2 \cdot \frac{\sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta)}{\sin \gamma^2 \cdot \cos \beta^2} + bx^2 \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha^2 \cdot \cos \beta^2}$$
$$= ab\,(a + b).$$

Bezeichnet man $\frac{\sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta)}{\sin \gamma^2 \cdot \cos \beta^2}$ durch m,

$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma^2 \cdot \cos \beta^2}$ durch n,

und $ab\,(a + b)$ durch p,

so ist:

$$(am + bn)\,x^2 = p$$

$$x = \sqrt{\frac{p}{am + bn}}.$$

Ferner ist noch, da BE in der Horizontalebene liegt, also ABE ein rechter Winkel ist:

$$AB = x \cdot tg\beta,$$
$$BC = \frac{AB}{tg\,\alpha} = \frac{x\,tg\,\beta}{tg\,\alpha},$$
$$BD = \frac{AB}{tg\,\gamma} = \frac{x\,tg\,\beta}{tg\,\gamma}.$$

§. 353. **Aufgabe.** Ein senkrechtstehender Gegenstand wird aus drei Standpunkten, die mit dem Fuß des Gegenstandes in derselben Horizontalebene liegen, gesehen. Man soll die Höhe des Gegenstandes und die Entfernung der drei Standpunkte von seinem Fuße bestimmen.

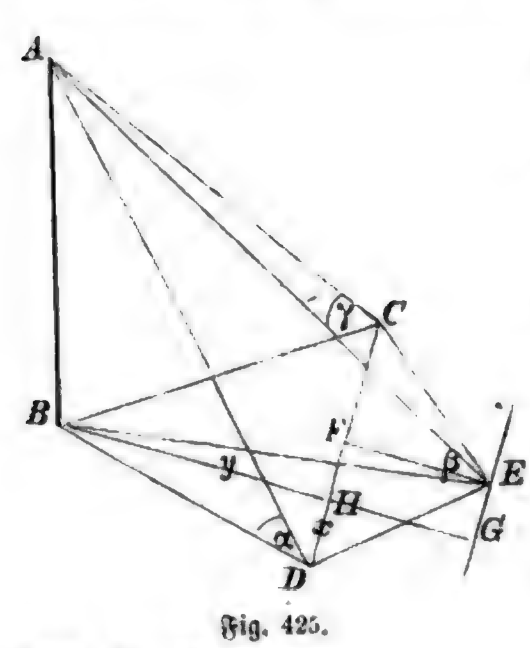


Fig. 425.

Auflösung. AB (Fig. 425) sei der Gegenstand, C D, E seien die drei Standpunkte. Aus B und E fälle man auf CD die Lothe BH, EF, verlängere BH über H hinaus und ziehe EG ‡ CD, messe CD = a, DF = b, EF = GH = c, W. BDA = α, W. BEA = β, W. BCA = γ. Nun sei DH = x, BH = y, so hat man in den rechtwinkeligen Dreiecken ABD und ABE:

$$AB = BD \cdot tg\,\alpha \text{ und } AB = BE \cdot tg\,\beta,$$
also: $$BD \cdot tg\,\alpha = BE \cdot tg\beta,$$
$$BD^2 \cdot tg\,\alpha^2 = BE^2 \cdot tg\,\beta^2.$$

Nun ist aber:

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = y^2 + x^2$$
$$BE^2 = BG^2 + GE^2$$
$$= (BH + HG)^2 + FH^2$$
$$= (y + c)^2 + (b + x^2)$$
$$= x^2 + y^2 + 2cy - 2bx + b^2 + c^2.$$

Also ist:

$$(x^2 + y^2)\,tg\,\alpha^2 = (x^2 + y^2 + 2cy - 2bx + b^2 + c^2) \cdot tg\,\beta^2,$$

oder:

$$1)\ (x^2 + y^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos\,\alpha^2 \cdot \sin\,\beta^2} = 2cy - 2bx + b^2 + c^2.$$

Ebenso findet sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken ABD und ABC:

$$BD^2 \cdot tg\,\alpha^2 = BC^2 \cdot tg\,\gamma^2$$

oder:

$$(x^2 + y^2)\,tg\,\alpha^2 = (BD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DH) \cdot tg\,\gamma^2,$$
$$(x^2 + y^2)\,tg\,\alpha^2 = (x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) \cdot tg\,\gamma^2,$$

$$2)\ (x^2 + y^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\alpha^2 \cdot \sin\gamma^2} = a^2 - 2ax.$$

Eliminirt man nun $(x^2 + y^2)$ aus den Gleichungen (1) und (2) dadurch, daß man jene mit

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\alpha \cdot \sin\gamma^2},$$

diese mit
$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha^2 \cdot \sin\beta^2}$$

multiplicirt und die letzte der daraus entstandenen Gleichungen von der ersten subtrahirt, so ergibt sich:

$$0 = (2cy - 2bx + b^2 + c^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\gamma^2}$$
$$- (a^2 - 2ax) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta^2},$$

oder, wenn man
$$\frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\gamma^2} = A,$$

und
$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta^2} = B$$

setzt:

$$0 = (2cy - 2bx + b^2 + c^2) \cdot A - (a^2 - 2ax) \cdot B.$$
$$y = \frac{bA - aB}{cA} \cdot x + \frac{a^2B - b^2A - c^2A}{2cA},$$

oder, wenn man wieder
$$\frac{bA - aB}{cA} = C$$

und
$$\frac{a^2B - b^2A - c^2A}{2cA} = D$$

setzt:

$$3)\ y = Cx + D.$$

Diesen Werth von y setze man in (2), so erhält man, wenn noch:

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\alpha^2 \cdot \sin\gamma^2} = E$$

gesetzt wird,

$$(x^2 + C^2x^2 + 2CDx + D^2) \cdot E = a^2 - 2ax,$$
$$(C^2 + 1) \cdot Ex^2 + 2(CDE + a) \cdot x = a^2 - D^2E,$$
$$x^2 + 2 \cdot \frac{CDE + a}{(C^2 + 1)E} \cdot x = \frac{a^2 - D^2E}{(C^2 + 1) \cdot E}.$$

Setzt man:

$$\frac{CDE + a}{(C^2 + 1) \cdot E} = F \quad \text{und} \quad \frac{a^2 - D^2E}{(C^2 + 1)E} = G,$$

so bekommt man:

$$x^2 + 2Fx = G$$
$$x = -F + \sqrt{G - F^2}.$$

Setzt man nun diesen Werth von x gleich H, so erhält man aus (3):

$$y = CH + D;$$

dieser Werth werde gleich J gesetzt. Da $AB^2 = (x^2 + y^2)\ \mathrm{tg}\ \alpha^2$, so ist nun:

$$AB = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot \sqrt{H^2 - J^2} = K.$$

$$BC = \frac{K}{\mathrm{tg}\ \gamma}; \quad BE = \frac{K}{\mathrm{tg}\ \beta}; \quad BD = \frac{K}{\mathrm{tg}\ \alpha}.$$

§. 354. **Aufgabe.** ABC (Fig. 426) stellt den Querdurchschnitt eines Bergrückens vor. Es soll eine Straße oder ein Tunnel durch denselben geführt und zu diesem Zwecke die Höhe und Länge des Querschnittes ermittelt werden. Die Spitze des Rückens ist zugänglich, aber im Thale ist nicht schicklicher Raum zur Aufstellung eines Instruments vorhanden.

Auflösung. In der angrenzenden Thalebene suche man zwei Punkte, D und F, welche auf verschiedenen Seiten des Berges, aber mit C in derselben

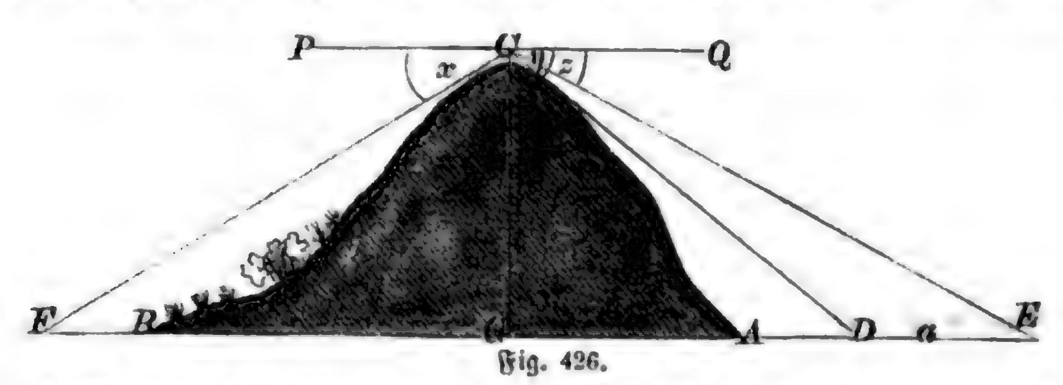


Fig. 426.

Verticalebene und so liegen, daß sie von C aus sichtbar sind. In derselben Verticalebene bezeichne man noch einen von C aus sichtbaren Punkt E, stelle in C den Winkelmesser auf und messe die Depressionswinkel PCF = x, QCD = y und QCE = z, sowie die Standlinie DE = a. Dann ist W. CEG = z, DCE = y − z, daher:

$$CD = \frac{a \cdot \sin z}{\sin (y - z)}.$$

Ferner ist W. CDG = y, also:

$$CG = CD \cdot \sin y \quad \text{und} \quad DG = CD \cdot \cos y;$$

$$CG = \frac{a \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin (y - z)}; \quad DG = \frac{a \cdot \cos y \cdot \sin z}{\sin (y - z)}.$$

Nun ist wieder: W. GFC = x, also:

$$FG = CG \cdot \mathrm{cotg}\ x$$
$$= \frac{a \cdot \sin y \cdot \sin z \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin (y - z)}.$$

$$DF = DG + GF = a \cdot \frac{\sin z \cdot \cos y \sin x + \sin z \sin y \cos x}{\sin x \cdot \sin (y - z)}$$

$$= a \cdot \frac{\sin z \cdot \sin (x + y)}{\sin x \cdot \sin (y - z)}.$$

Sollte blos die Länge von AB ermittelt werden, so müßte man noch AD und BF messen und von DF abziehen.

§. 355. **Aufgabe.** Es soll die Höhe CG (Fig. 427) und die Breite AB des Berges ACDB unter der Voraussetzung gemessen werden, daß man von der Spitze C aus nicht auf beiden Seiten nach dem Fuße sehen könne.

Auflösung. Man nehme wieder, so genau als möglich, die Punkte C, D, E und F so an, daß sie mit A und B in einer Verticalebene liegen, und daß man von C nach A und F, von D nach B und E visiren kann. Dann messe man AF = a und BE = b, sowie die Depressionswinkel ACL = x, FCL = y, JDB = u, JDE = v und den Elevationswinkel CDH = w. Dann ist, wie in der vorigen Aufgabe:

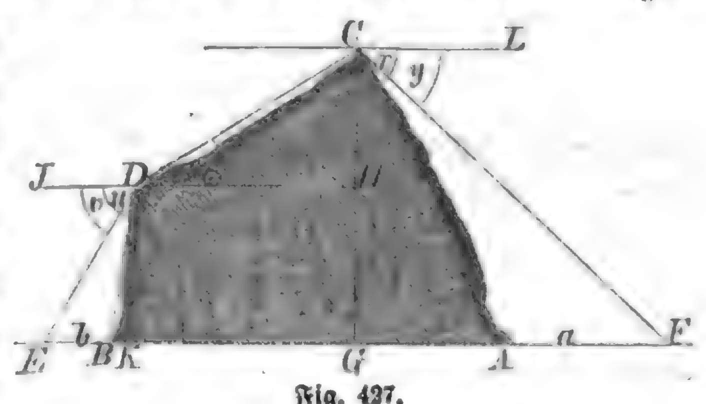


Fig. 427.

$$CG = \frac{a \cdot \sin x \cdot \sin y}{\sin (x - y)}; \quad DK = \frac{b \cdot \sin u \cdot \sin v}{\sin (u - v)}$$

$$AG = CG \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{a \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin (x - y)};$$

$$BK = DK \cdot \operatorname{cotg} u = \frac{b \cdot \cos u \cdot \sin v}{\sin (u - v)};$$

$$CH = CG - DK = \frac{a \cdot \sin x \cdot \sin y}{\sin (x - y)} - \frac{b \cdot \sin u \cdot \sin v}{\sin (u - v)};$$

$$DH = CH \cdot \operatorname{cotg} w;$$

$$AB = AG + HD + KB.$$

§. 356. **Aufgabe.** Durch die Breite eines Berges soll ein Durchstich oder Tunnel gelegt werden. Das Terrain kann zwar auf beiden Seiten als horizontal angenommen werden, jedoch liegt es auf der einen Seite höher als auf der andern. Man soll die Breite und das Steigungsverhältniß finden.

Auflösung. A und D (Fig. 428) mögen zwei Punkte am Fuße des Berges

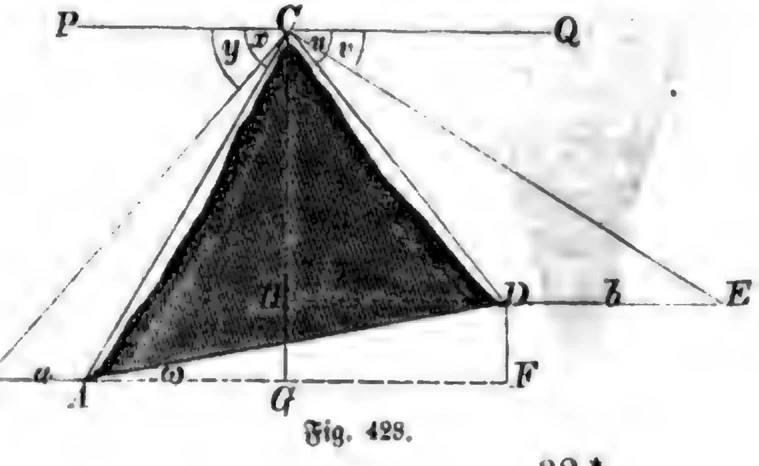


Fig. 428.

sein, A auf der einen, D auf der andern Seite. D liege höher als A. DF sei eine Verticale aus D, AF eine Horizontale aus A, so ist die Länge AD und das Steigungsverhältniß DF : AD zu ermitteln.

Auf dem Rücken des Berges suche man einen Punkt C, der mit A und D in einer Verticalebene liegt; ebenso bestimme man die Punkte B und E so, daß sie in der Verticalebene BCD liegen; man messe dann AB = a, DE = b und die Depressionswinkel x, y, u und v; so findet man ebenso, wie in den zwei letzten Aufgaben:

$$CG = \frac{a \cdot \sin x \cdot \sin y}{\sin (x - y)}; \quad CH = \frac{b \cdot \sin u \cdot \sin v}{\sin (u - v)};$$

$$AG = CG \cdot \text{cotg}\, x; \qquad DH = CH \cdot \text{cotg}\, u;$$

$$DF = CG - CH; \qquad AF = AG + DH;$$

$$AD = \sqrt{AF^2 + DF^2}.$$

Statt dieser letztern Gleichung kann man auch den Winkel DAF = w bestimmen, nämlich:

$$\text{tg}\, w = \frac{DF}{AF};$$

dann ist:

$$AD = \frac{AF}{\cos w} = \frac{DF}{\sin w}.$$

Sind AD und DF gefunden, so hat man auch das Steigungsverhältniß.

B. Einfluß der Krümmung der Erde auf die Verticalmessung.

§. 357. Es ist schon im §. 6 darauf hingedeutet, daß die Krümmung der Erde auf die Resultate der Messungen von verticalen Höhen einen beträchtlichen Einfluß habe. Stellt C (Fig. 429) den Mittelpunkt, ACB einen Sector eines Durchschnitts der Erde vor, die hier als vollkommene Kugel betrachtet werden mag, ist also A ein Punkt der Oberfläche, so ist AB ein Durchschnitt des wahren, die in A an den Erdboden gelegte Tangente AD ein Durchschnitt des scheinbaren Horizonts von A. Liegen B und D in gerader Linie mit dem Mittelpunkte C, so heißt BD der Abstand des scheinbaren Horizontes vom wahren für die Entfernung AB. Liegt A im Niveau des Meeres, so ist der Bogen AB ein Durchschnitt des Meeresniveau mit der Ebene ACB, und B liegt

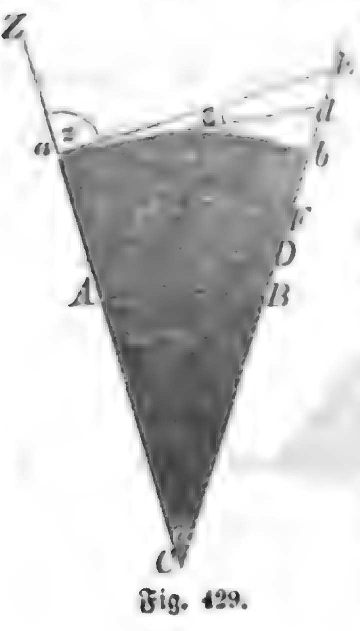


Fig. 429.

ebenfalls im Meeresspiegel. Befindet sich der Punkt a in dem verlängerten Erdhalbmesser CA, so liegt a um die Größe aA höher als A, der mit AB concentrische Bogen ab ist der wahre, die in a an ab gelegte Tangente ad der scheinbare Horizont von a, bd der Abstand des scheinbaren Horizonts vom wahren. Da die tangirende Ebene, also auch ihr Durchschnitt mit einer durch den Mittelpunkt C gelegten Ebene, d. h. die Tangente ad, stets außerhalb der gekrümmten Erdoberfläche fällt, so liegt der scheinbare Horizont stets höher als der wahre.

Es sei nun E (Fig. 429) irgend ein Object in dem verlängerten Erdhalbmesser CB, und über dem scheinbaren Horizonte ad von a gelegen, so ist Eb seine wahre Höhe über dem wahren Horizonte von a, und zwar:

$$Eb = EC - bC = EC - aC.$$

Hat a selbst eine Höhe Aa über dem Meeresspiegel, so ist Eb die relative Höhe von E; liegt dagegen a selbst im Meeresspiegel, so ist Eb die absolute Höhe von E (§. 339). In der Zeichnung ist, der vorhin gemachten Annahme gemäß, Eb die relative, EB die absolute Höhe von E.

Mißt man nun von a aus den Elevationswinkel von E, so gibt das Fernrohr mittels der Libelle die horizontale Lage nach der Richtung der Ebene ad des scheinbaren Horizonts an; bei richtiger Aufstellung des Instruments liegt der Nullpunkt der Theilung in der durch das Centrum des Verticalkreises gelegten Horizontalebene; und bringt man die Ebene des Verticalkreises in die Verticalebene ACB, so fällt die vom Centrum des Instruments nach dem Nullpunkte der Theilung gedachte Gerade in die Richtung der Tangente ad, oder doch in eine damit parallele Gerade. Richtet man dann das Fernrohr auf den Punkt E, so zeigt der Nonius auf dem getheilten Limbus auf die dem Winkel $\varepsilon = daE$ zugehörige Gradzahl; man erhält also ε als Elevationswinkel des Objects E über den Punkt a. Da aber a und b gleiche Entfernung vom Mittelpunkte C, also gleiche Höhe haben, so ist der wahre Elevationswinkel Eab, also der gemessene Winkel um dab zu klein. Aber ad ist Tangente, ab Sehne zum Bogen ab, also ist W. dab gleich dem Peripheriewinkel über derselben Sehne im gegenüberliegenden Abschnitt, oder halb so groß als der Centriwinkel α, d. h.

$$dab = \frac{\alpha}{2}.$$

Jeder gemessene Elevationswinkel ist also stets um die Hälfte des Centriwinkels zu klein, welchen die durch den Standort und das Höhenobject gehenden Erdhalbmesser bilden.

Läge der Punkt F unter dem Horizonte, so erhielte man daF statt baF als Depressionswinkel von F, also den Depressionswinkel um dab oder $\frac{\alpha}{2}$ zu groß.

Elevations- und Depressionswinkel bedürfen daher einer Correction wegen der Krümmung der Erde; bei jenem ist diese Correction eine Vergrößerung, bei diesem eine Verkleinerung des gemessenen Winkels um die Hälfte des zwischen dem Standorte und dem Höhenobjecte enthaltenen Centriwinkels. Diese Verbesserung des gemessenen Höhenwinkels heißt die Correction wegen der Erhöhung des scheinbaren Horizonts über den wahren.

Es leuchtet ein, daß die Zenithdistanz ZaE oder z des Objects E für den Standort a durch die Messung richtig erhalten wird, daher keiner Correction bedarf. Man darf aber nicht schließen, daß nun $90° - z$ den wahren Elevationswinkel gebe, weil nicht ab, sondern ad senkrecht zu CZ steht.

§. 358. **Aufgabe.** Für die bekannte Entfernung zweier Orte die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über den wahren zu finden.

Auflösung. Es sei (Fig. 429) $AC = BC = r$ der Erdhalbmesser, A der Ort des Beobachters im Niveau des Meeres, $AB = e$ sei bekannt, so ist:

$$W.\ ACB = \frac{180 \cdot e}{r \cdot \pi} = \omega \cdot \frac{e}{r} = \alpha \ (§.\ 24).$$

Ist α gefunden, so hat man, weil $W.\ CAD = 90°$,

$$CD = \frac{r}{\cos \alpha} = r \cdot \sec \alpha,$$

oder, da $BC = r$, $BD = CD - BC = r\,(\sec \alpha - 1)$.

Es ist ferner:

$$BD = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) = r \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= r \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha^2}{2}}{1 - 2 \sin \frac{\alpha^2}{2}}.$$

So lange $\frac{\alpha}{2}$ nicht über $1/2°$ oder $30'$ beträgt, kann man $\frac{\alpha}{2}$ für $\sin \frac{\alpha}{2}$ setzen, wodurch man erhält:

$$BD = \frac{1/2\, r\, \alpha^2}{1 - 1/2\, \alpha^2}.$$

Da $1/2\, \alpha^2$ gegen 1 meist nur sehr unbedeutend sein wird, so kann es im Nenner vernachlässigt werden; man bekommt dann:

$$BD = 1/2\, r\, \alpha^2.$$

Ist hier α im Gradmaß ausgedrückt, so muß es noch in Bogenmaß, auf den Radius 1 bezogen, umgewandelt werden; ist dann α die Secundenzahl, so ist $\frac{\alpha}{\omega}$ sein Werth in Bogenmaß (§. 24), und:

$$BD = 1/2\, r \cdot \frac{\alpha^2}{\omega^2}.$$

Setzt man für r den mittlern Erdhalbmesser = 858 geogr. Meilen = 20285700 preuß. Fuß (§. 105), so ist, in Fuß:

$$BD = \frac{10142850}{\omega^2} \cdot \alpha^2$$

$$\log 10142850 = 7{,}0061599$$

$$\log \omega = 5{,}3144251$$

$$\underline{\quad 2 \quad}$$

$$\log \omega^2 = 10{,}6288502 \qquad = \underline{10{,}6288502}$$

$$0{,}3773097 - 4$$

$$BD = 0{,}000238 \cdot \alpha^2.$$

Wäre $\alpha = 1' \, 5'' = 65''$, so hätte man:

$$BD = 0{,}000238 \cdot 65^2 = 1{,}005 \text{ preuß. Fuß.}$$

Ist die geodätische Linie AB nicht durch den Winkel α am Mittelpunkte, sondern in Längenmaß, etwa in Fuß, gegeben, so muß α daraus berechnet werden.

1 Grad des Aequators = 354645 preuß. Fuß (die geogr. Meile zu 23643 preuß. Fuß gerechnet),

1 Minute . . . . = 5910 preuß. Fuß,

1 Secunde . . . . = 98,51 » »

Ist nun die Entfernung AB = e, so hat man in preuß. Fuß:

$$98{,}51 : e = 1'' : x''$$

$$x = \frac{e}{98{,}51} \text{ Sec.}$$

$$BD = \frac{0{,}000238 \cdot e^2}{(98{,}51)^2} = 0{,}000000024565 \cdot e^2.$$

Wenn A selber, wie a, um h über dem Meereshorizonte erhaben ist, so muß man r + h statt r in Rechnung bringen, weil dadurch für ein gegebenes α die Größe e, und für ein gegebenes e die Größe α verändert wird.

Da AB ein Kreisbogen, AC = BC = r der Radius, also 2r der Durchmesser ist, AD Tangente, DB äußerer Abschnitt einer Secante, welche selbst = 2r + BD ist, so hat man auch:

$$DB : AD = AD : 2r + DB.$$

$$DB = \frac{AD^2}{2r + DB} = \frac{e^2}{2r + DB}.$$

DB kann gegen 2r als verschwindend klein angesehen werden, daher ist dann:

$$DB = \frac{e^2}{2r}.$$

Setzt man z. B. e = 1/4 Meile = 5910 Fuß, so hat man:

$$\log e = 3{,}7715875 \qquad r = 20285700$$
$$\times 2 \qquad \log r = 7{,}3071900$$
$$\log (e^2) = 7{,}5431750 \qquad \log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log 2r = 7{,}6082200 \qquad \log 2r = 7{,}6082200$$
$$\log DB = 0{,}9349550 - 1.$$
$$DB = 0{,}860905 \text{ Fuß}.$$

Für $e = \frac{1}{4}$ M. ist $\alpha = 1'$ und die Rechnung nach der frühern Formel gibt:

$$DB = 0{,}000238 \cdot 60^2 = 0{,}8568 \text{ Fuß},$$

was vom ersten Resultate nur um 0,0041 Fuß abweicht.

Wollte man die Proportion

$$DB : AD = AD : 2r + BD$$

oder $$x : e = e : 2r + x$$

d. h. die Gleichung: $$x(2r + x) = e^2$$

ordnungsmäßig nach x auflösen, so bekäme man:

$$x^2 + 2rx = e^2$$
$$x = -r + \sqrt{e^2 + r^2}.$$

Für $e = \frac{1}{4}$ M. erhielte man:

$$r = 858 \text{ M}.$$
$$r^2 = 736164$$
$$e^2 = \tfrac{1}{16} = 0{,}0625$$
$$e^2 + r^2 = 736164{,}0625$$
$$\sqrt{e^2 + r^2} = 858{,}000036 \text{ M}.$$

$x = -r + \sqrt{e^2 + r^2} = 0{,}000036$ M. $= 0{,}85$ Fuß, was mit dem Frühern noch sehr gut übereinstimmt.

Aus der Formel $x = \frac{e^2}{2r}$ läßt sich die Entfernung e berechnen, in welcher x oder BD einen gegebenen Werth bekommt, nämlich:

$$e = \sqrt{2rx}.$$

Für $x = 1$ Fuß liefert diese Formel:

$$e = 6369{,}5 \text{ Fuß}.$$

In 6369,5 F. Entfernung beträgt also die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über den wahren 1 Fuß.

C. Einfluß der terrestrischen Strahlenbrechung auf die Verticalmessungen.

§. 359. Wenn man in A (Fig. 430) nach dem Höhenobjecte D visirt, so gelangt der Lichtstrahl von D aus in einer krummen Linie nach A (§. 71

und 72), und der Beobachter versetzt das Object D in die Richtung der an den letzten, dem Auge nächsten Punkt A jener Curve gelegten Tangente nach D′, also höher als es wirklich ist. Wegen dieser Erhöhung bedürfen daher die gemessenen Höhenwinkel einer Verbesserung; sie heißt die Correction wegen der Refraction oder Strahlenbrechung. Statt der Höhenwinkel mißt man nun gewöhnlich die Zenithdistanzen, da, wenn AH der scheinbare Horizont ist, DAH der mit dem Fehler der Erhöhung des scheinbaren über den wahren Horizont behaftete Höhenwinkel des Objects D ist, und ZAH = 90°, ZAD die Zenithdistanz des Objects D, also DAH + ZAD = 90°, wonach der Höhenwinkel aus der Zenithdistanz sich berechnen läßt. Da aber das Object D wegen der Strahlenbrechung nach D′ versetzt, also um den Winkel DAD′ erhöht erscheint, so wird die Beobachtung statt der wahren Zenithdistanz ZAD die um den Winkel DAD′ = ρ zu kleine scheinbare Zenithdistanz ZAD′ = z geben. Die wahre Zenithdistanz ζ findet sich also durch die Relation:

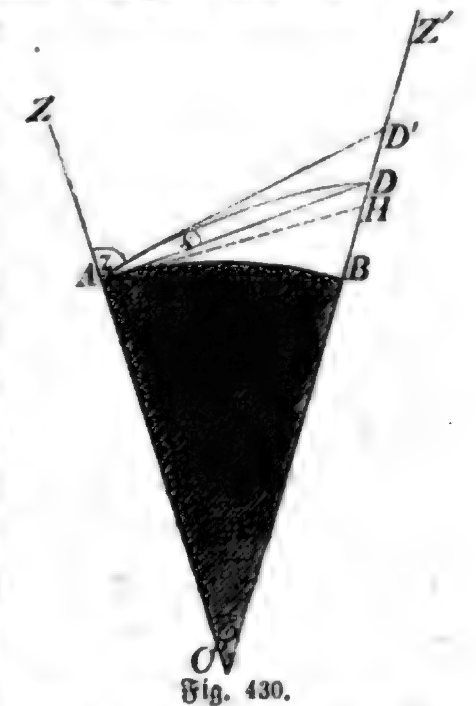


Fig. 430.

$$\zeta = z + \rho,$$

wo ρ die Refraction heißt.

§. 360. **Aufgabe.** Aus den scheinbaren gegenseitigen Zenithdistanzen zweier Orte und ihrer Entfernung von einander die Größe der Refraction zu bestimmen.

Auflösung. Es sei C (Fig. 431) der Mittelpunkt der Erde, D und E seien zwei Orte auf derselben in verschiedenen Höhen, d. h. in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte C; AB sei die geodätische Linie der Punkte D und E, DE′ die scheinbare Gesichtslinie des Punktes E für den Beobachter in D, ED′ die des Punktes D für den Beobachter in E, so ist ZDE′ = z die scheinbare, ZDE = ζ die wahre Zenithdistanz des Punktes E für einen Beobachter in D; ebenso ist Z′ED′ = z′ die scheinbare, Z′ED = ζ' die wahre Zenithdistanz des Punktes D für einen Beobachter in E. Es ist somit EDE′ = ρ die Refraction in D, DED′ = ρ' die in E. Die Entfernung DE sei = e, der dieser Entfernung zugehörige Mittelpunktswinkel DCE = φ. Wenn die Ent-

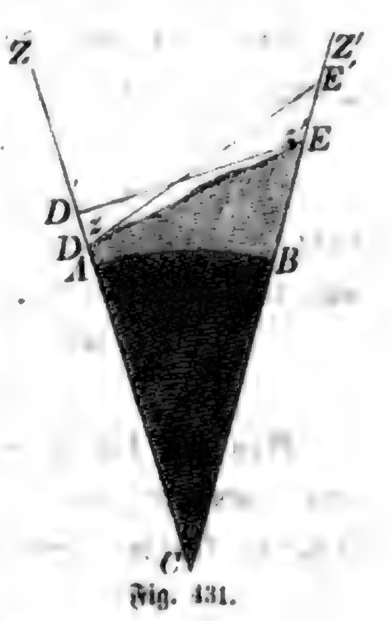


Fig. 431.

fernung e nicht sehr groß ist, so kann man die geodätische Entfernung AB ihr gleich setzen. Dann ist:

$$\varphi = \omega \cdot \frac{e}{r} \text{ Sec. } (\S.\ 24).$$

Ferner ist:

$$\zeta = z + \rho$$
$$\zeta' = z' + \rho'$$
$$\zeta + \zeta' = z + z' + \rho + \rho'.$$

Nun ist aber auch, wenn man EDC = α und DEC = β setzt,

$$\zeta = \beta + \varphi \text{ und } \zeta' = \alpha + \varphi,$$

also:

$$\zeta + \zeta' = 180° + \varphi;$$

folglich:

$$z + z' + \rho + \rho' = 180° + \varphi.$$

Bei gleichzeitiger Beobachtung der scheinbaren Zenithdistanzen in D und E und nicht bedeutendem Höhenunterschiede der Objecte, wird der Zustand der Atmosphäre in D und E nahe gleich sein, man wird also unbedenklich $\rho = \rho'$ setzen können. Dann ist:

$$z + z' + 2\rho = 180° + \varphi$$
$$\rho = 90° + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z + z').$$

Beispiel. Es sei gemessen worden:

e = 93684 Fuß preuß., z = 105° 45′ 38″, z′ = 74° 27′ 30″.

log ω = 5,3144251		90° + ½φ =	90° 8′ 2″,98
log e = 4,9716654	z =	105° 45′ 38″	
E · log r = 2,6928100	z′ =	74 27 30	
log φ = 2,9789005	z + z′ =	180 13 8	
φ = 965″,97		½ (z + z′) =	90 6 34
= 16′ 5″,97		ρ =	0 1 28,98
½φ = 8′ 2″,98.			

Bezeichnet man das Verhältniß der Refraction ρ zum Mittelpunktswinkel φ mit $\varkappa$, so ist:

$$\frac{\rho}{\varphi} = \frac{90° + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z + z')}{\varphi} = \varkappa,$$

also:

$$\rho = \varkappa\varphi.$$

Für das eben berechnete Beispiel ist:

$$\varkappa = \frac{90° + 482'',98 - 90°\ 6'\ 34''}{965'',97} = 0{,}092 \ldots.$$

Man hat für $\varkappa$ einen mittlern Werth aus vielen Beobachtungen abzuleiten versucht, den man als beständigen Coëfficienten in den Rechnungen brauchen könnte; verschiedene Gelehrte sind aber dabei auf ungleiche Werthe gekommen. Gauß hat $\varkappa$ = 0,0653 angenommen, Bessel = 0,0685, Bayer schwankt zwischen 0,0876 und 0,0619. Die Franzosen nehmen $\varkappa$ meist = 0,0643.

Da $\varphi = \omega \cdot \frac{e}{r}$ und $\rho = \varkappa\varphi$, so ist auch

$$\rho = \omega \cdot \frac{e\varkappa}{r},$$

wenn e die geodätische Entfernung der beiden Punkte D und E bedeutet. Will man nach dieser Formel rechnen und $\varkappa$ selbst nicht für den einzelnen Fall bestimmen, sondern einen üblichen Werth dafür annehmen, so braucht man φ gar nicht erst zu kennen, um die Refraction zu finden.

§. 361. **Aufgabe.** Aus den gegenseitigen scheinbaren Zenithdistanzen zweier Orte und ihrer Entfernung von einander die wahren Zenithdistanzen zu finden.

Auflösung. Man berechne

$$\varphi = \omega \cdot \frac{e}{r}.$$

Nun war: $\zeta = z + \rho$ und $\zeta' = z' + \rho'$,

aber, wenn man beide Zenithdistanzen gleichzeitig mißt:

$$\rho = \rho',$$

und zwar für diesen Fall:

$$\rho = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z + z'),$$

also:

1) $\zeta = z + 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z + z') = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z' - z)$,

2) $\zeta' = z' + 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(z + z') = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(z' - z)$.

Beispiel. Es sei $e = 2125$ Toisen, $z = 75^\circ\ 16'\ 30''$, $z' = 104^\circ\ 45'\ 28''$, so ist $\varphi = \omega \cdot \frac{e}{r} = 134'',18$, $\tfrac{1}{2}\varphi = 67'',09$.

$$z + z' = 180^\circ\ 1'\ 58'' \qquad 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi = 90^\circ\ 1'\ 7''$$
$$\tfrac{1}{2}(z + z') = 90\ 0\ 59 \qquad \tfrac{1}{2}(z + z') = 90\ 0\ 59$$
$$\rho = 0\ 0\ 8$$

$$\varkappa = \frac{\rho}{\varphi} = \frac{8}{134} = 0,0597,$$
$$\zeta = z + \rho = 75^\circ\ 16'\ 38'',$$
$$\zeta' = z' + \rho = 104\ 45\ 36.$$

Rechnet man nach den Formeln (1) und (2), so hat man:

$$90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi = 90^\circ\ 1'\ 7'' \qquad z' = 104^\circ\ 45'\ 28''$$
$$\tfrac{1}{2}(z' - z) = 14\ 44\ 29 \qquad z = 75\ 16\ 30$$
$$\zeta = 75\ 16\ 38 \qquad z' - z = 29\ 28\ 58$$
$$\tfrac{1}{2}(z' - z) = 14\ 44\ 29.$$

$$90^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi = 90\ 1\ 7$$
$$\tfrac{1}{2}(z' - z) = 14\ 44\ 29$$
$$\zeta' = 104\ 45\ 36.$$

Die vorige Rechnung zeigt, wie man aus den gegenseitigen scheinbaren Zenithdistanzen zweier Orte und ihrer Entfernung von einander die wahren Zenithdistanzen entweder direct (nach den Formeln 1 und 2), oder mit Hülfe der Refraction ρ und des Coëfficienten $\varkappa$ findet. Hat man nur eine Zenithdistanz gemessen, so muß man für $\varkappa$ einen der üblichen Werthe annehmen und

$$\zeta = z + \varkappa\varphi$$

setzen.

§. 362. **Aufgabe.** **Den rücksichtlich der Refraction verbesserten Höhenunterschied zweier Punkte zu finden.**

1. Aus einer einzigen Zenithdistanz.

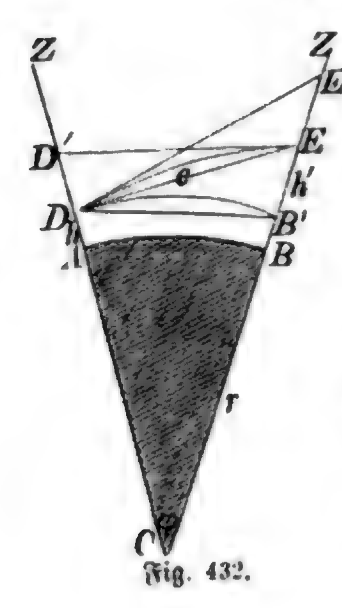


Fig. 432.

Auflösung. Es sei (Fig. 432) $AC = BC = r$ der Erdhalbmesser, AB der Meereshorizont, $AD = h$ die Höhe des Punktes D, $BE = h'$ die des Punktes E, so ist die verlangte Größe $= h' - h$. Ferner sei $ZDE' = z$ die gemessene, also scheinbare Zenithdistanz des Punktes E für den Ort D, ρ die Refraction, also $EDE' = \rho = \varkappa\varphi$; $ZDE = z + \rho = \zeta$. Man hat dann im Dreieck DCE, wo $CD = r + h$, $CE = r + h'$, W. $CDE = 180° - \zeta = 180° - (z + \varkappa\varphi)$;

$$\begin{aligned} r + h : r + h' &= \sin CED : \sin CDE \\ &= \sin (CDE + \varphi) : \sin (180° - CDE) \\ &= \sin (180° - ZDE + \varphi) : \sin (180° - ZDE) \\ &= \sin [180° - (ZDE - \varphi)] : \sin (180° - ZDE) \\ &= \sin (ZDE - \varphi) : \sin ZDE \\ &= \sin (z + \varkappa\varphi - \varphi) : \sin (z + \varkappa\varphi) \\ &= \sin [z + (\varkappa - 1)\varphi] : \sin (z + \varkappa\varphi). \end{aligned}$$

$$h' - h : r + h = \sin (z + \varkappa\varphi) - \sin [z + (\varkappa - 1)\varphi] : \sin [z + (\varkappa - 1)\varphi]$$

$$h' - h = (r + h) \cdot \frac{\sin (z + \varkappa\varphi) - \sin [z + (\varkappa - 1)\varphi]}{\sin [z + (\varkappa - 1)\varphi]}$$

$$h' - h = 2(r + h) \cdot \frac{\cos \left[z + \frac{2\varkappa - 1}{2}\varphi\right] \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin [z + (\varkappa - 1)\varphi]}.$$

Bezeichnet e den zum Centriwinkel φ gehörigen Bogen AB und s die Sehne dieses Bogens, so ist:

$$\tfrac{1}{2} s = r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r}.$$

Wenn aber $\varphi < 30'$, so kann man $s = e$ setzen, also ist dann:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{e}{2r},$$

während e die gemessene Entfernung DE vorstellen kann, da sie von der geodätischen Entfernung AB nicht merklich verschieden sein wird; also ist dann:

$$h'-h = \frac{r+h}{r}\cdot e\cdot\frac{\cos\left[z+\frac{2\varkappa-1}{2}\varphi\right]}{\sin\left[z+(\varkappa-1)\varphi\right]}.$$

Nun ist $\frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$, und $\frac{h}{r}$ jedenfalls gegen 1 verschwindend klein; vernachlässigt man daher den kleinen Bruch $\frac{h}{r}$, so ist:

$$h'-h = e\cdot\frac{\cos\left[z+\frac{2\varkappa-1}{2}\varphi\right]}{\sin\left[z+(\varkappa-1)\varphi\right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da der Winkel φ immer nur sehr klein sein wird, so hat man diese Formel noch dadurch vereinfacht, daß man:

$$\frac{2\varkappa-1}{2}\cdot\varphi = (\varkappa-1)\,\varphi = \varkappa\varphi$$

setzt, wo dann:

$$h'-h = e\cdot\operatorname{cotg}(z+\varkappa\varphi) = e\cdot\operatorname{cotg}\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird.

Verbindet man mit dieser Formel noch die Correction wegen der Erhöhung des scheinbaren Horizonts, so erhält man, je nachdem man nach der genauern Formel (1), oder nach der nur für kleinere Werthe von e (also auch von φ) gültigen (2) rechnet:

$$h'-h = e\cdot\frac{\cos\left[z+\frac{2\varkappa-1}{2}\varphi\right]}{\sin\left[z+(\varkappa-1)\varphi\right]} + \frac{e^2}{2r},$$

oder

$$h'-h = e\cdot\operatorname{cotg}\zeta + \frac{e^2}{2r}.$$

Man kann indeß bei der Lösung dieser Aufgabe aus nur einer Zenithdistanz auch auf folgende Weise verfahren. Durch D (Fig. 432) lege man den mit dem Meereshorizonte AB concentrischen Bogen DB', sowie die Sehne DB', so ist $CD = CB'$, W. $CDB' = CB'D = 90° - \frac{\varphi}{2}$, und W. $B'DE = 180° - (ZDE + CDB') = 180° - \left(\zeta + 90° - \frac{\varphi}{2}\right) = 90° - \left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)$, und W. $DEB' = (\zeta - \varphi)$. Bezeichnet man nun, wie oben, BE mit h', AD mit h, so ist $B'E = h' - h$ und

$$h' - h : DB' = \sin\left[90^\circ - \left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)\right] : \sin(\zeta - \varphi)$$

$$h' - h = DB' \cdot \frac{\sin\left[90^\circ - \left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\sin(\zeta - \varphi)} = DB' \cdot \frac{\cos\left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin(\zeta - \varphi)}$$

$$DB' = 2 \cdot CD \cdot \sin\frac{\varphi}{2},$$

und da CD und CA nur unbedeutend verschieden sein können, so wird man unbedenklich CD = r setzen können; also ist dann:

$$DB' = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Läßt man nun die gemessene Entfernung DE = e für DB′ gelten, so ist auch

$$e = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2},$$

wie oben gesetzt worden, und man erhält auf diesem Wege dieselbe Formel wie in der ersten Auflösung, da $\zeta = z + \varkappa\varphi$. Man kann aber hier auch $\sin\frac{\varphi}{2}$ in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots,$$

in Längenmaß:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{\varphi}{2}}{\omega} - \frac{1/_6 \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3}{\omega^3} + \ldots\ldots,$$

oder, weil $\frac{r\varphi}{\omega} = e$,

$$DB' = 2r \cdot \frac{\frac{\varphi}{2}}{\omega} - 2r \cdot 1/_6 \cdot \left(\frac{\frac{\varphi}{2}}{\omega}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= e - 1/_{24} \cdot \frac{e^3}{r^2} + \ldots\ldots,$$

wo indeß schon das zweite Glied so unbedeutend wird, daß es wol meist vernachlässigt werden darf. Die einfachere Formel (2) der vorigen Auflösung folgt aus dieser für $\varphi = \frac{\varphi}{2} = 0$.

2. Aus zwei Zenithdistanzen.

Auflösung. Sind z, z′ die scheinbaren gemessenen, ζ, ζ' die wahren Zenithdistanzen in den Punkten D, E, so berechne man letztere aus erstern

nach §. 361, bestimme den Winkel φ und daraus die Sehne $DB' = s$, da nun W. $DEC = 180° - \zeta'$ und $EDB' = 90° - \left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)$, so ist:

$$EB' = h' - h = s \cdot \frac{\cos\left(\zeta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \zeta'}.$$

Für Entfernungen der Punkte D und E, die gerade nicht außerordentlich groß sind, kann man $s = o$ setzen; wenn dies nicht zulässig, wird s ebenso, wie oben geschehen, bestimmt.

Gewöhnlich bedient man sich einer Formel, in der der W. φ nicht vorkommt, also auch nicht berechnet zu werden braucht; sie enthält, außer der Entfernung der Punkte, nur die scheinbaren Zenithdistanzen, ist allerdings für die Rechnung bequem, kann aber auch nicht auf große Genauigkeit Anspruch machen. Es ist nämlich (Fig. 432):

W. $ZDE = z + \varkappa\varphi$, also W. $CDE = 180° - (z + \varkappa\varphi)$,
W. $Z'ED = z' + \varkappa\varphi$, also W. $DEC = 180° - (z' + \varkappa\varphi)$,
und W. $DCE = \varphi$.

Also: $360° + \varphi - (z + z') - 2\varkappa\varphi = 180°$

$$2\varkappa\varphi = 180° + \varphi - (z + z')$$

$$\varkappa = \frac{180° + \varphi - (z + z')}{2\varphi}.$$

Nun ist:

$$CE + CD : CE - CD = \text{tg } \tfrac{1}{2}(DEC + CDE) : \text{tg } \tfrac{1}{2}(DEC - CDE),$$

$$CE = r + h',\ CD = r + h;\ \tfrac{1}{2}(DEC + CDE) + \frac{\varphi}{2} = 90°,$$

also:
$$\text{tg } \tfrac{1}{2}(DEC + CDE) = \text{cotg } \frac{\varphi}{2},$$

und
$$\tfrac{1}{2}(DEC - CDE) = \tfrac{1}{2}(z' - z),$$

folglich:

$$2r + h + h' : h' - h = \text{cotg } \frac{\varphi}{2} : \text{tg } \tfrac{1}{2}(z' - z).$$

$$h' - h = (2r + h + h') \cdot \text{tg } \frac{\varphi}{2} \cdot \text{tg } \tfrac{1}{2}(z' - z).$$

Bezeichnet man die Sehne des Bogens AB (im Meereshorizonte) mit s, so ist:

$$s = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r};$$

und da $\frac{\varphi}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man auch $\text{tg } \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi}{2}$ setzen, also ist dann auch:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r},$$

und:

$$h' - h = \left(1 + \frac{h + h'}{2r}\right) \cdot s \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z' - z).$$

Aber $\frac{h + h'}{2r}$ ist offenbar eine verschwindend kleine Größe, also:

$$h' - h = s \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z' - z).$$

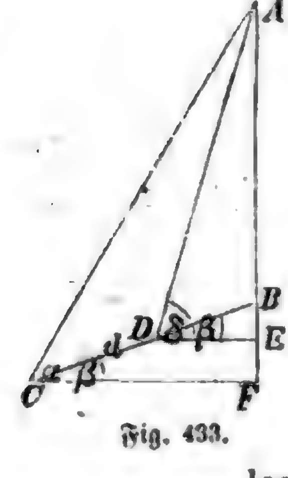


Fig. 433.

Beispiel 1. Aus $d = 1410^t$, $\alpha = 8^\circ\ 15'\ 21''$, $\beta = 3^\circ\ 19'\ 40''$ und $\delta = 10^\circ\ 32'\ 8''$ sei die von der Refraction und der Krümmung der Erde corrigirte Höhe AF (Fig. 433) zu bestimmen. Nach §. 347 hat man folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\log d &= 3{,}1492191\\
\log \sin(\alpha - \beta) &= 8{,}9340173\\
\log \cos \delta &= 9{,}9926161\\
E \cdot \log \sin(\delta - \alpha) &= 1{,}4003554\\
E \cdot \log \cos \beta &= 0{,}0007329\\
\hline
\log BD &= 3{,}4769408\\
BD &= 2998{,}7\\
d &= 1410\\
\hline
s = BC &= 4408^t{,}7.\\
\alpha &= 8^\circ\ 15'\ 21''\\
\varrho &= 18\\
\hline
\alpha - \varrho &= 8\ \ 15\ \ 3\\
\zeta &= 81\ \ 45\ \ 57.\\
\log \operatorname{cotg} \zeta &= 9{,}1613917\\
\log s &= 3{,}6443105\\
\hline
\log(h' - h) &= 2{,}8057022\\
h' - h &= 639{,}296\\
\frac{s^2}{2r} &= 2{,}975\\
\hline
AF = h_1 &= 642^t{,}271.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta &= 4^\circ\ 55'\ 41''\\
\delta - \alpha &= 2\ \ 16\ \ 47\\
\varphi &= \omega \cdot \frac{s}{r}\\
\log \omega &= 5{,}3144251\\
\log s &= 3{,}6443105\\
E \log r &= 3{,}4859029\\
\hline
\log \varphi &= 2{,}4446385\\
\varphi &= 278''{,}38\\
\varkappa &= 0{,}0653\\
\hline
\varrho = \varkappa\varphi &= 18''{,}178.\\
\log s &= 3{,}6443105\\
&\ 2\\
\hline
\log(s^2) &= 7{,}2886210\\
\log 2r &= 6{,}8151271\\
\hline
\log\left(\frac{s^2}{2r}\right) &= 0{,}4734939\\
\frac{s^2}{2r} &= 2{,}975.
\end{aligned}$$

Dasselbe Beispiel mag nun noch nach der frühern vollständigern Formel gerechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 8^\circ\ 15'\ 21''\\
z = \zeta - \rho &= 81\ \ 44\ \ 39\\
\frac{2\varkappa-1}{2}\cdot\varphi &= 2\ \ \ \ 1\\
\hline
z + \frac{2\varkappa-1}{2}\varphi &= 81\ \ 42\ \ 38\\
z &= 81\ \ 44\ \ 39\\
(\varkappa-1)\,\varphi &= 4\ \ 20\\
\hline
z + (\varkappa-1)\,\varphi &= 81\ \ 40\ \ 19
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varkappa &= 0{,}0653\\
2\varkappa &= 0{,}1306\\
1 &= 1{,}0000\\
\hline
2\varkappa - 1 &= -0{,}8694.\\
\frac{2\varkappa-1}{2} &= -0{,}4347.\\
\varphi &= 278'',38\\
\frac{2\varkappa-1}{2}\varphi &= -0{,}4347 \cdot 277{,}45\\
&= -121'',01\\
&= -2'\ 1'',01\\
\varkappa &= 0{,}0653\\
1 &= 1{,}0000\\
\hline
\varkappa-1 &= -0{,}9347\\
(\varkappa-1)\,\varphi &= -0{,}9347 \cdot 278'',38\\
&= -260'',2\\
&= -4'20''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log\cos\left(z + \frac{2\varkappa-1}{2}\varphi\right) &= 9{,}1588863\\
\log s &= 3{,}6443105\\
E \cdot \log\sin\,[z + (\varkappa-1)\,\varphi] &= 0{,}0046040\\
\hline
\log\,(h'-h) &= 2{,}8078008.\\
h'-h &= 642{,}393\\
\frac{e^2}{2r} &= 2{,}975\\
\hline
h_1 &= 645^t{,}368.
\end{aligned}
$$

Beispiel 2. Es sei gemessen worden: $BC = d = 1050^t$ (Fig. 434), W. $\alpha = 6^\circ\ 31'\ 26''$, $\beta = 1^\circ\ 16'\ 17''$. Die Höhe AD zu finden.

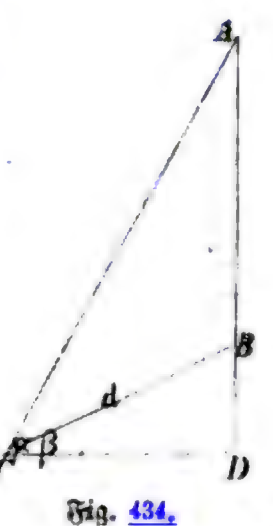


Fig. 434.

Man berechne $CD = d \cdot \cos\beta$. Aber β ist ein Höhenwinkel, muß also wegen der Refraction corrigirt werden; es wird daher erst der W. φ berechnet; diese Rechnung muß hier für die Distanz $BC = d$ geführt werden, weil man CD noch nicht kennt; wegen der Größe von r gegen BC oder CD hat dies aber keinen erheblichen Einfluß auf φ. Es ist nun aber $\varphi = \omega \cdot \frac{d}{r}$.

1. Directe Rechnung.

$\log \omega = 5{,}3144251$
$\log d = 3{,}0211893$
$E \cdot \log r = 3{,}4859029$
$\log \varphi = 1{,}8215173$
$\varphi = 66'',3;\ \varkappa = 0{,}0653.$
$\rho = \varkappa\varphi = 4'',3.$
W. $BCD = \beta - \varkappa\varphi = 1^\circ 16' 12'',7$
$\log \cos BCD = 9{,}9998920$
$\log d = 3{,}0211893$
$\log CD = 3{,}0210813$
$e = CD = 1049^t,7.$
$\frac{e^2}{2r} = 0^t,16866$
$AD = 120{,}023$
$h = 120^t,191.$

$\alpha = 6^\circ\ 31'\ 26''$
$\rho = \quad\quad 4{,}3$
$ACD = 6\ \ 31\ \ 21{,}7$
$AD = CD \cdot \operatorname{tg} ACD$
$\log \operatorname{tg} ACD = 9{,}0581860$
$\log CD = 3{,}0210813$
$\log AD = 2{,}0792673$
$AD = 120^t,023.$
$\log e = 3{,}0210813$
$\quad\quad 2$
$\log e^2 = 6{,}0421626$
$E \cdot \log r = 3{,}4859029$
$E \cdot \log 2 = 9{,}6989700$
$0{,}2270355 - 1$

2. Rechnung nach der Formel (1).

$\alpha. = 6^\circ\ 31'\ 26''$
$90^\circ - \alpha = z = 83\ \ 28\ \ 34$
$\varkappa\varphi = \quad\quad 4{,}3$
$z + \varkappa\varphi = 83\ \ 28\ \ 38{,}3$
$\frac{1}{2}\varphi = \quad\quad 33{,}1$
$z + \frac{2\varkappa - 1}{2}\varphi = 83\ \ 28\ \ 5{,}2$
$\log\cos\left[z + \frac{2\varkappa - 1}{2}\varphi\right] = 9{,}0559749.$
$\log e = 3{,}0210813$
$E \cdot \log\sin[z + (\varkappa - 1)\varphi] = 0{,}0028364$
$\log(h' - h) = 2{,}0798926$
$h' - h = 120^t,196$
$\frac{e^2}{2r} = 0{,}168$
$h = 120^t,364.$

$\varphi = 66'',3$
$\varkappa = 0{,}0653$
$\varkappa\varphi = 4{,}3.$
$z = 83^\circ\ 28'\ 34''$
$\varkappa\varphi = \quad\quad 4{,}3$
$z + \varkappa\varphi = 83\ \ 28\ \ 38{,}3$
$\varphi = \quad\quad 1\ \ 6{,}3$
$z + (\varkappa - 1)\varphi = 83\ \ 27\ \ 32.$

3. Rechnung nach der Formel (2).

$z = 83^\circ\ 28'\ 34''$
$\varkappa\varphi = \quad\quad 4{,}3$
$\zeta = 83\ \ 28\ \ 38{,}3.$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cotg} \zeta &= 9{,}0581858 \\ \log e &= 3{,}0210813 \\ \log (h' - h) &= 2{,}0792671 \\ h' - h &= 120^t{,}023 \\ \frac{e^2}{2r} &= 0{,}168 \\ h &= 120^t{,}191. \end{aligned}$$

D. Reduction gemessener Höhenwinkel auf den richtigen Scheitelpunkt.

§. 363. Kann das Instrument beim Messen der Höhenwinkel nicht genau im Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufgestellt werden, so muß man einen andern schicklichen Punkt zur Aufstellung wählen und den gemessenen Winkel auf den richtigen Scheitelpunkt reduciren. Es sei z. B. vom Punkte A (Fig. 435) aus der Höhenwinkel des Objects B zu bestimmen. Wäre A etwa ein Thurm, dessen Spitze Scheitelpunkt des Höhenwinkels werden soll, so könnte man das Instrument nicht im richtigen Punkte A aufstellen und wäre genöthigt, einen andern Punkt zu diesem Zwecke zu suchen. Der Erleichterung der Rechnung wegen wähle man einen solchen Punkt, der mit A und B in ein und derselben Verticalebene liegt, und, ebenfalls um die für die künftige Berechnung aufzustellenden Formeln möglichst abkürzen zu können, nehme man ihn auch dem gegebenen Punkt A möglichst nahe. C sei der gewählte Punkt; ferner sei A′ der in der Verticalen ZA und in gleicher Höhe mit C liegende Punkt. Wenn es möglich ist, messe man A′C = d; ist A′C nicht meßbar, so messe man AC, bestimme den Winkel ACA′ und berechne daraus d = AC · cos ACA′. Nun denke man in A und C die Lothe AZ, CZ′ errichtet und die Geraden AB, A′B, CB gezogen: so soll die Zenithdistanz ZAB = z gemessen werden, während man direct nur die Zenithdistanz Z′CB = z′ messen kann. Trifft die Lothrechte aus B den Horizont von C in B′, so nenne man e die Entfernung A′B′; man wird in vielen Fällen diese Entfernung auch nicht genau bestimmen können und muß sich dann mit einer möglichst genauen

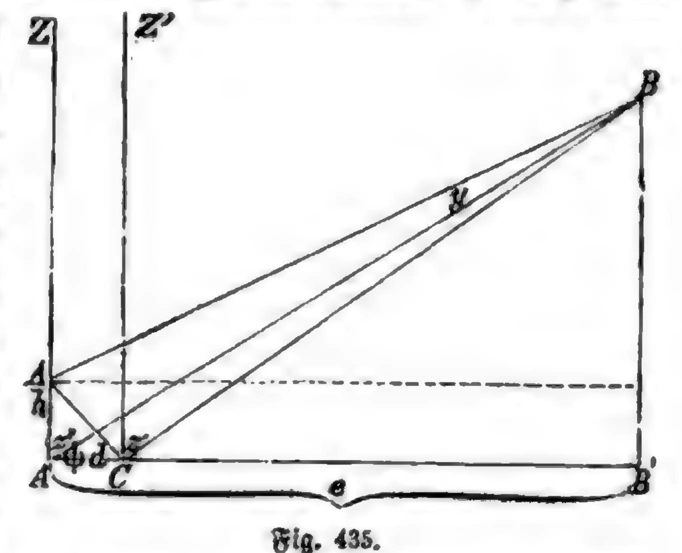


Fig. 435.

Annäherung begnügen. Jedenfalls wird man, wenn nur BB' gegen $A'B'$ nicht sehr groß ist, auch $A'B = e$ setzen können. Ist dann die Zenithdistanz $Z'CB = z'$ bestimmt, so hat man in dem Dreiecke $A'BC$ die drei Stücke $A'C = d$, $A'B = e$ und W. $A'CB = 90^\circ + z'$. Also:

$$d : e = \sin x : \sin (90^\circ + z'),$$

oder:

$$d : e = \sin x : \cos z'$$

$$\sin x = \frac{d}{e} \cdot \cos z'.$$

Da aber der Winkel x stets sehr klein sein wird, so kann man ihn seinem Sinus proportional setzen, d. h.:

$$\sin x = x \cdot \sin 1'';$$

$$\sin 1'' = \frac{1}{\omega}, \text{ also } \sin x = \frac{x}{\omega},$$

und

$$x = \omega \cdot \sin x = \omega \cdot \frac{d}{e} \cdot \cos z'.$$

Im Dreieck ABA' kann $AA' = h$ als bekannt angenommen werden, da man es entweder direct oder indirect bestimmen kann, und AB' darf füglich $= e$ gesetzt werden. Ueberdies ist:

$$90^\circ + \psi + z' + x = 180^\circ$$

$$\psi + z' + x = 90^\circ$$

$$\psi = 90^\circ - z' - x$$

$$z'' = 90^\circ - \psi = z' + x,$$

und

$$e : h = \sin z'' : \sin y$$

oder

$$e : h = \sin (z' + x) : \sin y.$$

$$\sin y = \frac{h}{e} \cdot \sin (z' + x) = \frac{h}{e} \cdot \sin\left(z' + \omega \frac{d}{e} \cdot \cos z'\right).$$

Wegen der Kleinheit von y kann man setzen:

$$\sin y = y \cdot \sin 1''$$

$$y = \frac{\sin y}{\sin 1''} = \omega \cdot \sin y = \frac{\omega}{e} \cdot h \sin \left(z' + \omega \cdot \frac{d}{e} \cos z'\right).$$

Nun ist: $z = z'' + y = z' + x + y$

$$= z' + \frac{\omega}{e} \cdot d \cos z' + \frac{\omega}{e} h \cdot \sin\left[z' + \omega \cdot \frac{d}{e} \cos z'\right].$$

Vernachlässigt man hier $\frac{\omega}{e} \cdot d \cos z'$, weil es gegen z' verschwindend klein ist, so erhält man:

$$z = z' + \frac{\omega}{e} \cdot d \cos z' + \frac{\omega}{e} \cdot h \sin z'$$

$$z = z' + \frac{\omega}{e} (d \cos z' + h \cdot \sin z').$$

Liegt C in A′, so ist d = o und:

$$z = z' + \frac{\omega}{e} \cdot h \sin z'.$$

Und liegt A′ höher als A, so muß h negativ in Rechnung gebracht werden.

Beispiel. Es sei $z' = 88° 38' 17''$, $e = 1008^t$, $d = 3^t$, $h = 1^t,2$, so ist:

log sin z′ = 9,9998773	log cos z′ = 8,3759957
log h = 0,0791812	log d = 0,4771213
0,0790585	0,8531170 — 2
h · sin z′ = 1,19966	d cos z′ = 0,0713045
d cos z′ = 0,07130	
1,27096	
log 1,27096 = 0,1041319	z′ = 88° 38′ 17″
log ω = 5,3144251	4 20
E · log e = 6,9965395	z = 88 42 37.
2,4150965	
Zahl = 260″,07 = 4′ 20″.	

E. Das Nivelliren.

§. 364. Durch das Nivelliren werden Höhenunterschiede zweier oder mehrerer nicht in derselben Verticalen liegenden Punkte, die im Verhältniß zu den Horizontalentfernungen derselben Punkte nicht sehr bedeutend sind, bestimmt. Eine durch das Nivelliren ausgeführte Bestimmung des Höhenunterschiedes solcher Punkte nebst der Darstellung der so ermittelten Raumverhältnisse durch Zeichnung heißt ein Nivellement.

Nivellements werden ausgeführt zum Behufe des Baues von Kunststraßen, Eisenbahnen, Kanalanlagen, Drainirung der Felder und anderer ökonomischer Arbeiten; alle diese Zwecke aber erfordern eine ganz genaue Kenntniß des Höhenunterschiedes sowol der beiden Endpunkte der nivellirten Strecke, als auch aller dazwischenliegenden Punkte; daher Nivellements mit viel größerer Genauigkeit ausgeführt werden müssen, als es durch trigonometrische Höhenbestimmung möglich ist.

§. 365. Der im Verhältniß zur Horizontaldimension immer nur sehr geringe Höhenunterschied der innerhalb des Nivellements begriffenen Punkte heißt das Gefälle oder die Steigung, je nachdem man vom höhern Punkte zum tiefern, oder umgekehrt vom tiefern zum höhern übergeht. Liegen die

Punkte nahe zusammen, d. h. sind sie nicht über 200 — 400 Fuß aus einander, so geschieht die Bestimmung durch eine einmalige Messung und die Operation heißt dann ein einfaches Nivellement; bei größerer Entfernung der Endpunkte muß die Strecke getheilt und die Messung mehrere Male wiederholt werden; eine solche Messung heißt dann ein zusammengesetztes Nivellement.

Man unterscheidet zwei Methoden des Nivellirens; man bestimmt das Gefälle einer zu nivellirenden Distanz entweder aus den Endpunkten, oder aus der Mitte jeder Station, indem man im letztern Falle aus der Mitte nach beiden Endpunkten hin visirt.

§. 366. Liegen die Endpunkte einer zu nivellirenden Strecke weit aus einander, so muß man am Resultate der Messung noch die Correction wegen der Krümmung der Erde und wegen der Refraction anbringen, was hier, wegen der größern Genauigkeit, die durch das Nivelliren erzielt werden soll, um so nöthiger ist, als bei trigonometrischen Höhenbestimmungen. Man kann sich aber die Rechnung hier etwas erleichtern, dadurch, daß man beide Correctionen in eine Formel vereinigt. Es ist nämlich, wenn AD (Fig. 436) der scheinbare Horizont von A ist, W. DAB' = $\frac{1}{2}\varphi$ die Erhebung des scheinbaren Horizonts über den wahren, also B'D die Correction wegen der Krümmung der Erde. Ist dann B der Punkt, dessen Höhe über A gesucht wird, so erhält man, wegen der Refraction, die Höhe ED statt BD über den scheinbaren Horizont, also EB die Correction wegen der Refraction. Die richtige Höhe von B über B' oder A ist demnach:

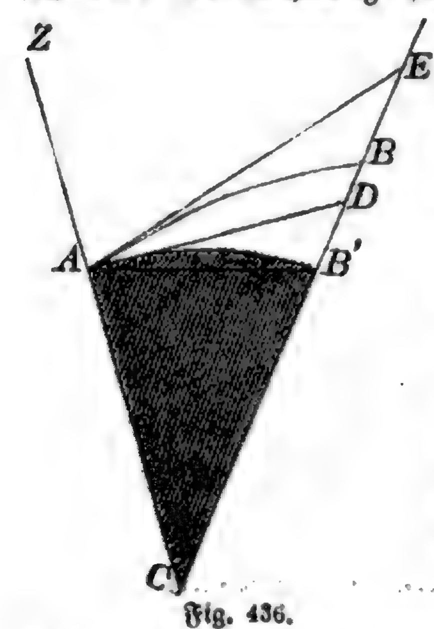


Fig. 436.

$$ED + DB' - EB.$$

ED = h gibt die Messung unmittelbar, die beiden Correctionen betragen also

$$DB' - EB.$$

Nun war:

$$DB' = \frac{e^2}{2r},$$

$$EB = \varkappa\varphi = 0{,}0653 \cdot \varphi,$$

und wenn man die Höhenunterschiede den betreffenden Winkeln DAB' und EAB proportional setzt, was, wegen der Kleinheit der Winkel, hier stets zulässig ist,

$$EB : DB' = 0{,}0653 \cdot \varphi : \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$EB = 0{,}1306. \quad DB' = 0{,}1306 \cdot \frac{e^2}{2r}.$$

$$DB' - EB = \frac{e^2}{2r}(1 - 0{,}1306) = 0{,}8694 \cdot \frac{e^2}{2r}$$

$$= 0{,}4347 \cdot \frac{e^2}{r}.$$

Es ist also zu jeder gemessenen Höhe noch die Größe

$$h = 0{,}4347 \cdot \frac{e^2}{r}$$

zu addiren.

§. 367. **Aufgabe.** Zwischen zwei gegebenen Punkten das Gefälle oder die Steigung zu finden.

1. Durch das Nivelliren aus den Endpunkten.

Auflösung. Ist jeder der Endpunkte A, B (Fig. 437) der zu nivellirenden Strecke vom andern aus sichtbar, so stelle man sich im höher liegenden Standpunkte A′ auf, bringe dort das Nivellirinstrument genau über den Punkt A′ und bestimme damit eine Horizontallinie A″B″. In B lasse man einen Pflock in die Erde schlagen, der oben flach abgesägt wird; auf diesen Pflock stelle ein Gehülfe eine Nivellirlatte BB″, an der man, wenn man ein Instrument mit Fernrohr zur Messung benutzt, auch schon von A″ aus die Höhe des Punktes B″ über dem Pflocke ablesen kann; sonst muß man sich auf die Ablesung des Gehülfen verlassen, indem man dabei ganz so verfährt, wie solches in den §§. 220 fg. beschrieben worden.

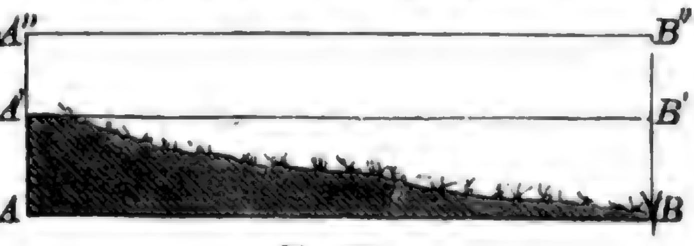


Fig. 437.

Ist nun A′A″ die Instrumentenhöhe = h, die Ablesung an der Nivellirlatte BB″ = H, so ist das Gefälle von A′ bis B:

$$G = H - h,$$

welches, bei größern Entfernungen, noch die Correction wegen der Krümmung der Erde und der Refraction erfahren muß.

Ist ein Endpunkt vom andern aus nicht sichtbar, so theile man die ganze Strecke AF (Fig. 438) in Stationen ab, die womöglich gleich groß sind, und von denen jede von ihren Endpunkten aus leicht übersehbar ist. Eine Länge von 20 Ruthen wird sich in den meisten Fällen gut dazu eignen; wenn die letzte Station etwas

Fig. 438.

länger oder kürzer wird, so schadet das nicht. Dann bestimmt man vom Anfangspunkte der Linie aus das Gefälle $G_1 = H_1 - h$ der ersten Station; darauf ebenso das Gefälle der zweiten Station $G_2 = H_2 - h$ u. s. w. Man hat dann im Ganzen:

$$G = (H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_n) - n \cdot h,$$

weil die Instrumentenhöhen überall als gleich angenommen werden können. Wäre das wegen verschiedener, durch das Terrain bestimmter Aufstellung nicht der Fall, so müßte man, statt nh, die Summe aller Instrumentenhöhen von der Summe der sämmtlichen Lattenhöhen abziehen. Zu dem Endresultate wird dann noch die Correction $\pm K$ (§. 365) gefügt, je nachdem A höher oder tiefer liegt als F.

2. Durch das Nivelliren aus der Mitte.

Auflösung. Man theile das ganze zu vermessende Terrain wie oben in Stationen von gleicher Weite ab, die indeß hier zweimal so groß als beim Nivelliren aus den Endpunkten sein können, stelle sich mit dem Instrumente in der Mitte a (Fig. 439) der ersten Station AB auf, visire nach den in A und B aufgestellten Latten, lese die respectiven Höhen $A\alpha = r_1$ und $B\beta = v_1$ ab, so ist:

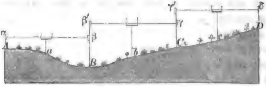


Fig. 439.

$$G_1 = v_1 - r_1.$$

Ist nun $v_1 > r_1$, d. h. liegt A höher als B, so ist das Gefälle positiv; ist $v_1 < r_1$, liegt also A tiefer als B, so ist das Gefälle negativ, bezeichnet also eine Steigung von A nach B hin. Liegen beide Stationen A, B tiefer als a (Fig. 440), so ist $G = \pm (B\beta - A\alpha) = \pm (v_1 - r_1)$, je

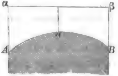


Fig. 440.

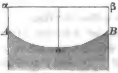


Fig. 441.

nachdem $v_1 \gtrless r_1$ ist, während G immer einen positiven Ausdruck bezeichnet. Liegen beide Stationen höher als a (Fig. 441), so ist $G = \pm (B\beta - A\alpha) = \pm (v_1 - r_1)$. Liegt endlich A tiefer und B höher als a, so tritt eben der Fall ein, wo $G = -(v_1 - r_1) = r_1 - v_1$. So wie bei der ersten Station bestimmt man das Gefälle aller folgenden und hat dann

$$G_1 = v_1 - r_1$$
$$G_2 = v_2 - r_2$$
$$G_3 = v_3 - r_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$G_n = v_n - r_n$$

$$G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n = (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n) - (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n)$$
$$G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n = G.$$
$$G = (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n) - (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n).$$

Man findet das Gefälle zwischen dem ersten und letzten Punkte, wenn man von der Summe der vordern Lattenhöhen die Summe der hintern (rückwärts genommenen) abzieht.

§. 368. Bei sehr wechselndem Terrain, das bald steigt, bald fällt, wird man die Stationen nicht alle gleich nehmen können, vielmehr wird man die höchsten und tiefsten Punkte zu Anfangs- und Endpunkten der Stationen nehmen müssen.

Das ganze Resultat der Messung wird in eine sogenannte Nivellementstabelle eingetragen, welche für ein Nivellement aus den Endpunkten nach folgendem Schema eingerichtet ist:

Nummer der Station.	Länge der Station.		Instrumentenhöhe.		Höhe der Zielscheibe.		Steigung.		Senkung.	
	Ruthen	Fuß	Fuß	Zoll	Fuß	Zoll	Fuß	Zoll	Fuß	Zoll
1	20		4	1	5	4			1	3
2	20		3	11	5	8			1	9
3	13	8	3	10	4	11			1	1
			11	10	15	11			4	1
					11	10				
				Senkung	4	1				

Bei der Nivellementstabelle für ein Nivellement aus der Mitte bleibt die Instrumentenhöhe weg, dagegen werden statt der Columne „Höhe der Zielscheibe" zwei Columnen mit den Ueberschriften: „Vordere Lattenhöhe" und „Hintere Lattenhöhe", eingeführt.

Man sieht leicht ein, daß das Verfahren durchaus keine Aenderung erleidet, wenn die zu vermessende Linie nicht gerade ist, sondern ein- oder mehrmals Winkel oder Biegungen macht.

Flußnivellements werden auf dem angrenzenden Uferterrain ausgeführt. Es stelle ABC (Fig. 442) den Lauf des Flusses vor. Ist das Ufer fest,

so kann man durch directe Messung seine Höhe über dem nebenstehenden Wasserspiegel an verschiedenen Stellen bestimmen und dann an geeigneten

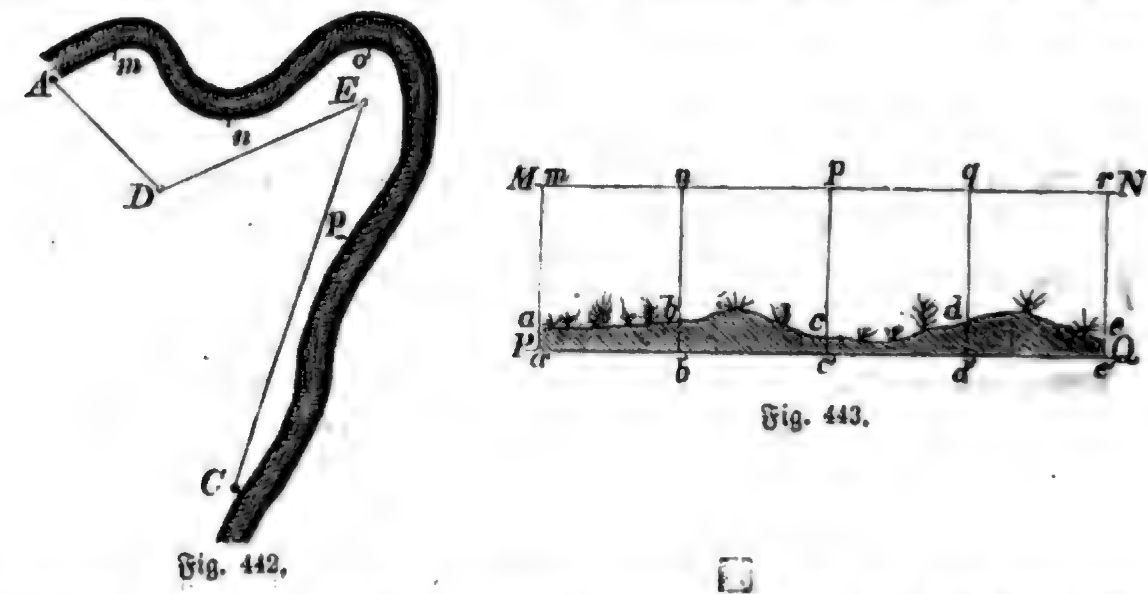


Fig. 442.

Fig. 443.

Stationen A, m, n, o, p, C Pfähle einschlagen, um die Ziellatten daraufzusetzen und das Nivellement wie gewöhnlich auszuführen. Ist PQ (Fig. 443) der Wasserspiegel, abcde das Ufer, MN eine beliebige Horizontale, so würde man aa′, bb′, cc′, dd′, ee′ zu bestimmen haben, dann durch das Nivellement am, bn, cp, dq, er finden, also auch die Abstände a′m, b′n, c′p, d′q, e′r u. s. w., hieraus aber auch wieder das Gefälle des Flusses.

Ist dies unausführbar, so muß man auf dem nächstanliegenden festen Terrain, aber so nahe am Flusse, als der Grund gangbar ist, an verschiedenen Stellen D, E, F u. s. w. Löcher eingraben, bis das Grundwasser zu Tage kommt; dieses steht mit dem Wasserspiegel im Flußbette allemal im Niveau; schlägt man dann Pfähle ein und sägt sie im Niveau des Wassers oder doch alle um eine gleiche Höhe über dem Wasser ab, so hat man daran die Stützpunkte für die Ziellatten und kann im Uebrigen wie gewöhnlich verfahren.

Uebrigens verdient noch bemerkt zu werden, daß Flußnivellements, wegen ihrer volkswirthschaftlichen und technischen Benutzung, in der Regel den höchsten Grad der Genauigkeit erfordern, der nur mit den besten Instrumenten, die sorgfältig berichtigt sein müssen, und mit den besten Methoden der neuern Geodäsie zu erreichen ist, da es einen großen Unterschied in der Benutzung einer Wasserkraft macht, ob der Strom auf 100 Ruthen 3 oder 4 Zoll Gefälle habe. Es werden also hierbei nicht selten Winkel von wenigen Secunden zur Beobachtung kommen, woraus man die Anforderungen, welche an das zu benutzende Instrument zu stellen sind, ermessen wird.

Soll ein Nivellement zum Zwecke eines Straßenbaues unternommen werden, so steckt man die Richtung in der Mittellinie des neuen Straßenzugs ab, und gibt sämmtlichen Pfählen eine gleiche Höhe von etwa 3 Zoll über der Erde, um die Ziellatten auf sie aufsetzen zu können. Die Stationen werden

nur etwa 10 Ruthen lang genommen, bei wechselndem Terrain selbst noch kürzer; das Nivelliren geschieht dann von der Mitte jeder einzelnen Station aus. In der Nivellementstabelle werden alle Stationspunkte auf eine über dem höchsten Punkte der ganzen Strecke liegende Horizontale bezogen, also wird in der Tabelle angegeben, wie viel Fuß, Zoll und Linien jeder Punkt unter dieser willkürlich angenommenen Horizontallinie liege; im Uebrigen kann sie ebenso, wie oben gezeigt worden, eingerichtet werden.

Nivellements, die nach der Richtung einer vorgeschriebenen geraden oder krummen, oder einer aus mehreren geraden Linien ausgeführt werden, heißen Längennivellements. Bei vielen Erdarbeiten ist aber eine Kenntniß des Terrains seitwärts von der abgesteckten Linie nöthig; man errichtet dann an verschiedenen Punkten Lothe zur Hauptlinie, nivellirt in der Richtung dieser Lothe und nennt dies dann ein Quernivellement. Bei der Anlage von Straßen, Chausseen, Eisenbahnen, neuen Flußbetten u. s. w. kommen solche häufig vor.

§. 369. Jedes ausgeführte Nivellement muß um so mehr einer sorgfältigen Prüfung unterworfen werden, als hier kleine Abweichungen von den wahren Höhenverhältnissen in der Natur viel mehr in Betracht kommen als bei allen andern Messungen. Es bleibt hier aber kein anderer Weg übrig, als das ganze Nivellement noch einmal vorzunehmen; stimmt das zweite mit dem ersten überein, so sind beide als richtig anzusehen; abweichende Stellen werden zum dritten Male nivellirt. Es empfiehlt sich aber, bei der Prüfung in entgegengesetzter Richtung zu nivelliren, oder noch besser, vom Endpunkte des ersten Nivellements aus auf einem ganz andern Wege nach dem Anfangspunkte hin zurückzunivelliren, um die Lage des Anfangs- und Endpunktes festzustellen; dann aber, auch selbst wenn diese richtig befunden worden, noch einzelne Stationen zu prüfen. Ergibt sich der Höhenunterschied des Anfangs- und Endpunktes bei der Prüfung verschieden von der ersten Messung, so müssen die Fehler der Zwischenstationen vollständig herausgefunden und corrigirt werden.

Das preußische Feldmesser-Reglement von 1858 gestattet folgende Abweichungen bei der Prüfung eines Nivellements:

§. 30. Die Messung wird als richtig angesehen, wenn bei der Revision die Differenzen nicht größer gefunden werden, als:

c) bei Höhenmessungen

auf	10	Ruthen	Länge	0,212	Zoll	oder	2,5	Linien,	
„	50	„	„	0,474	„	„	5,7	„	
„	100	„	„	0,671	„	„	8,0	„	
„	500	„	„	1,500	„	„	1 Zoll	6,0	Linien.
„	1000	„	„	2,121	„	„	2 „	1,5	„
„	1500	„	„	2,598	„	„	2 „	7,2	„
„	2000	„	„	3,000	„	„	3 „	—	„

Die mecklenburg-schwerinsche Feldmesser-Ordnung von 1854 schreibt darüber Folgendes vor:

§. 32. Bei Nivellements dürfen die noch zulässigen Fehler, je nach dem Zwecke des Nivellements, resp. 2 und 4 Zoll auf die Meile nicht übersteigen. Die größere Genauigkeit — innerhalb eines Fehlers von 2 Zoll auf die Meile — muß überall erreicht werden, wo der Zweck des Nivellements dieselbe erfordert, oder wo sie von dem, in dessen Auftrag das Nivellement ausgeführt wird, ausdrücklich verlangt wird.

Für andere horizontale Entfernungen, die größer oder kleiner sind als eine Meile, sind die Grenzen der zulässigen Fehler nicht den Entfernungen, sondern vielmehr den Quadratwurzeln dieser Entfernungen proportional anzunehmen, so daß also die Grenzen jener Fehler sich für die in der nachstehenden Uebersicht gewählten Entfernungen folgendermaßen stellen:

Entfernung.	Zulässiger größter Fehler bei scharfem Nivellement.	Zulässiger größter Fehler bei weniger scharfem Nivellement.
1/16 Meile	0,5 Zoll	1,0 Zoll
1/8 "	0,7 "	1,4 "
1/4 "	1,0 "	2,0 "
1/2 "	1,4 "	2,8 "
1 "	2,0 "	4,0 "
2 "	2,8 "	5,6 "
3 "	3,5 "	6,9 "
4 "	4,0 "	8,0 "

F. Berechnung des Auf- und Abtrags beim Straßenbau.

§. 370. Die Abstände der Terrainpunkte von der Haupthorizontalen werden in dem Profile des Nivellements mit schwarzen Linien aufgetragen und heißen daher schwarze Maße oder schwarze Zahlen, auch wol Terrainzahlen. Die Abstände der Punkte des beabsichtigten Straßenzugs, welche bald größer, bald kleiner als die Terrainzahlen sind, je nachdem das projectirte Planum der neuen Straße unter oder über dem natürlichen Terrain läuft, heißen Entwurfszahlen. Die Entwurfszahlen werden ebenfalls schwarz

ins Profil eingetragen, dagegen schreibt man die Unterschiede der Terrain- und Entwurfszahlen roth ein, weshalb diese dann **rothe Maße** oder **rothe Zahlen** heißen.

Stellt **abcdef** (Fig. 444) das natürliche Terrain vor, während a″bc″de″f das projectirte Planum, XX′ die Haupthorizontale sein soll, so ist das Maß

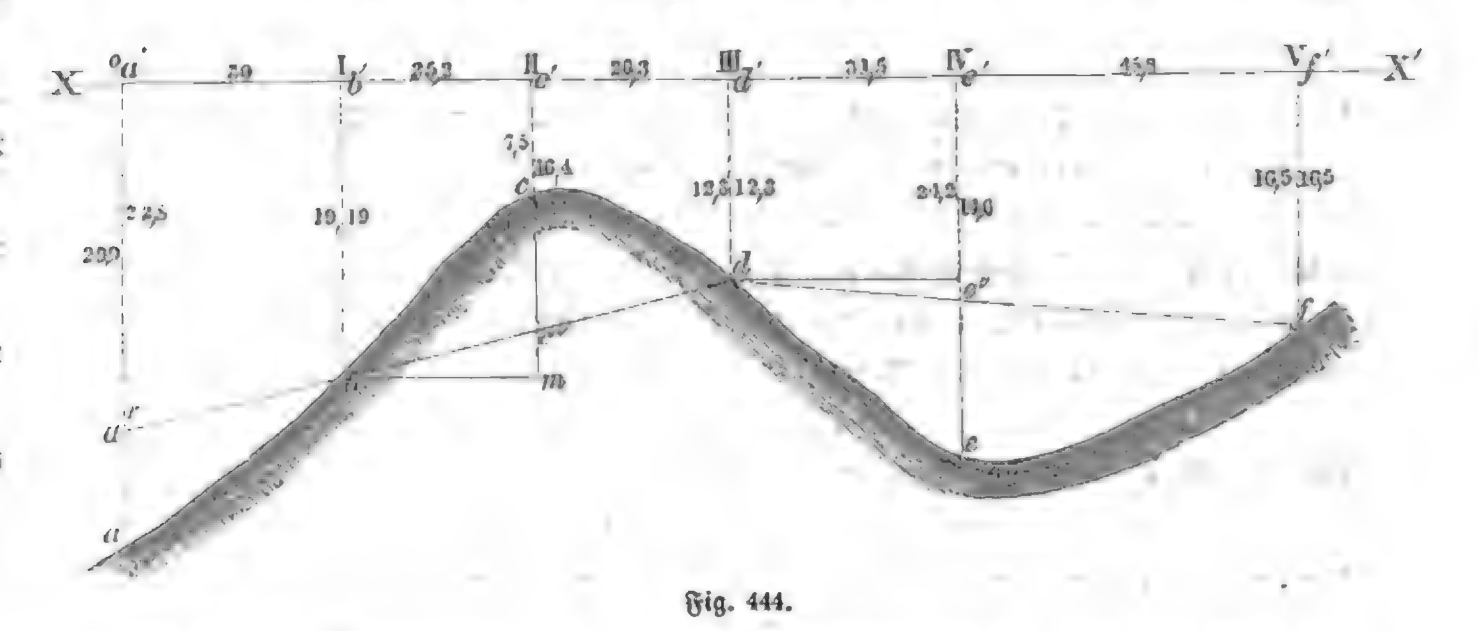


Fig. 444.

von aa′ die Terrainzahl, das von a′a″ die Entwurfszahl, und das Maß von aa′ — a′a″ die rothe Zahl. In b fällt das projectirte Planum mit dem natürlichen Terrain zusammen, bb″ ist also zugleich das Maß der Terrain- und Entwurfszahl und die rothe Zahl ist $= 0$; in c ist die rothe Zahl $= c'c'' - c'c = cc''$. Bezeichnen wir künftig die Terrainzahlen mit t, t′, t″ ....., die Entwurfszahlen mit e, e′, e″ ....., und die rothen Zahlen mit r, r′, r″ ....., so ist allemal:

$$r = \pm (t - e),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das projectirte Planum über oder unter der natürlichen Terrainfläche läuft. Die Punkte, wo $t = e$, also $r = 0$ ist, wie b, d und f, heißen **Durchgangspunkte**. In den Punkten, wo $t > e$, muß, um das Planum herzustellen, ein **Auftrag** oder **Aufschutt** stattfinden, da, wo $t < e$, ein **Abtrag**, jenes zwischen a und b, d und f, dieses zwischen b und d. Zur Berechnung des Kubikinhalts des **Auf-** und **Abtrags** werden uns hauptsächlich die rothen Zahlen dienen. Wir wollen daher zunächst zeigen, wie man diese aus den direct zu messenden Elementen berechnen kann.

§. 371. Nachdem man das natürliche Terrain nivellirt und ein Profil davon entworfen hat, wird man eine Ansicht seines Gefälles haben und einen vorläufigen Entwurf des neuen Straßenzugs mit der Rücksicht machen können, daß

1) das gesetzlich zulässige Steigungsverhältniß nicht überschritten werde, und

2) zur Herstellung dieses Zugs der möglichst geringe Auf- und Abtrag erforderlich sei.

Es sei diese so festgestellte Neigung des Wegs zwischen b und c = μ, d. h. auf 1 Ruthe steige oder falle die Straße μ R., so ziehe man bm horizontal; dann ist:

$$1 : \mu = bm : c'm$$
$$c'm = bm \cdot \mu.$$

Nun ist cc' als Terrainzahl für c aus dem Nivellement bekannt, und c'm = bb' als Terrainzahl für b ebenfalls bekannt, also cm = c'm = cc', und die rothe Zahl $cc'' = cm - c''m = c'm - cc' - bm \cdot \mu$. Heißen dann die Stationsdistanzen a'b', b'c', c'd' .... der Reihe nach d, d', d'' ...., und behält man für die übrigen Größen die oben festgestellten Zeichen bei, so ist für den Abtrag in der Station c:

$$r'' = t' - t'' - d' \cdot \mu.$$

Für den Auftrag in der Station e dagegen ist:

$$r^{IV} = t^{IV} - t''' - d''' \cdot \mu.$$

Bezeichnet man also mit r, t, d die obengenannten Größen für irgend eine Station, mit r', t', d' dieselben Größen für die nächstfolgende Station, so hat man zur Berechnung der rothen Zahlen der letztern Station die Formel:

$$r' = \pm (t' - t) - d \cdot \mu,$$

wo das + Zeichen für den Auftrag, das − Zeichen für den Abtrag gilt. Läßt man in Fig. 444 die beigeschriebenen Zahlen für die Stationen b und c gelten, so ist t = 19, t' = 7,5, d = 25,2, und da hier Abtrag stattfinden muß:

$$r' = -(7,5 - 19) - 25,2 \cdot \mu = 11,5 - 25,2 \cdot \mu.$$

Nimmt man nun das Steigungsverhältniß des neuen Planums etwa zu 0,03 an, so ist $25,2 \cdot \mu = 0,75$, also $r' = 11,5 - 0,75 = 10,75$. Für die Station e dagegen ist, weil hier Auftrag stattfindet, wenn man hier $\mu = 0,05$ setzt,

$$r' = 24,2 - 12,3 - 31,5 \cdot 0,05,$$

oder

$$r' = 11,9 - 1,575 = 10,325.$$

§. 372. Man denke sich nun den projectirten Straßenzug durch verticale Ebenen, welche auch auf den Seitenkanten der Straße senkrecht stehen, durchschnitten, etwa so, wie die Nivellirstationen dieselbe durchschneiden; die Mittelpunkte aller dieser Schnitte mit dem projectirten Planum denke man sich durch eine Linie verbunden, so daß diese Linie überall gleich weit von zwei einander gegenüberstehenden Punkten der Seitenkanten absteht; diese Linie heiße die Achse der Straße. Durch diese Achse denke man sich der ganzen Länge nach eine verticale Fläche gelegt, welche also allen Biegungen des Planums folgen, daher im allgemeinen eine krumme Fläche sein wird; indessen wird man sie doch von Station zu Station als Ebene ansehen können, da im

schlimmsten Falle die Stationen so kurz genommen werden können, daß diese Annahme vollkommen gerechtfertigt wird. Wenn man dann diese Ebenen zwischen je zwei Stationen, da wo Auftrag gemacht werden muß, noch unterhalb des Planums bis zum natürlichen Terrain fortgesetzt denkt, so theilt jede derselben den Auf- und Abtrag zwischen diesen Stationen in zwei Körper, die im allgemeinen prismatische Gestalt haben, jedoch einerseits von der natürlichen Terrainfläche begrenzt sind, also insofern vom Prisma abweichen. Die natürliche Terrainfläche sieht man als eine windschiefe Cylinderfläche*) an, deren Richtungslinien die Durchschnitte der Querprofile mit der natürlichen Terrainfläche, deren Parallelebene die durch die Achse gelegte Verticalebene ist, so daß man also, wo die Straße nicht ganz gerade bleibt, zwischen je zwei Stationspunkten eine andere Parallelebene bekommt. Das projectirte Planum ist eine horizontale oder geneigte Ebene, indem man die Wölbung, welche sie bei ihrer Vollendung wegen des Wasserabflusses erhält, nicht mit in Rechnung bringt. Die auf- und abzutragenden Erdmassen sind also dann vierseitige Prismen, deren eine Endfläche im projectirten Planum, die andere im natürlichen Terrain liegt; beim Abtrag ist jene die untere, diese die obere Endfläche, beim Auftrag ist es umgekehrt. Da die Neigung des Planums nie 0,05 oder etwa 3° übersteigen darf, so kann man immerhin die im Planum liegende Endfläche der Prismen für die einzelne Station als eine horizontale Ebene ansehen; die in den Ecken dieser Endfläche errichteten Verticalen bilden die Seitenkanten des Prismas, deren Längen durch die rothen Zahlen dieser Ecken bestimmt werden.

§. 373. Von einem dreiseitigen, schief abgeschnittenen Prisma findet man den Inhalt, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten multiplicirt, oder, wenn Δ der Inhalt der dreiseitigen Grundfläche ist und h, h_1, h_2 die Seitenkanten sind, so ist der Inhalt des Prismas:

$$J = \tfrac{1}{3}(h + h_1 + h_2) \cdot \Delta.$$

---

*) Eine windschiefe Cylinderfläche entsteht, wenn sich eine gerade Linie l, welche die Erzeugungslinie heißt, auf zwei geraden oder krummen Linien a, b, welche im letzten Falle geschlossen oder ungeschlossen sein können, so fortbewegt, daß sie 1) immer a und b zugleich trifft und 2) fortwährend mit einer gegebenen Ebene E parallel bleibt. Die geraden oder krummen Linien a, b heißen Richtungslinien, die Ebene E heißt die Parallelebene des windschiefen Cylinders. Die geraden Linien, mit welchen die Erzeugungslinie l bei ihrer Bewegung nach und nach zusammenfällt, heißen die Seiten der windschiefen Cylinderfläche. Die Richtungslinien a, b können zwar in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen; im ersten Falle geht aber die windschiefe Cylinderfläche in eine Ebene über. Sind die Linien a, b Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, so heißt die durch die Bewegung der Linie l erzeugte Fläche eine windschiefe Ebene.

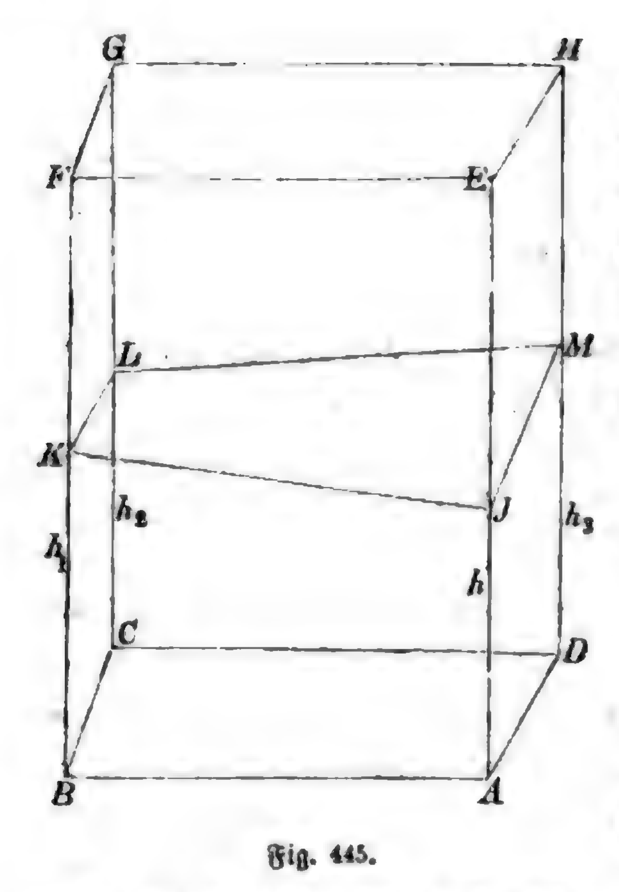


Fig. 445.

Stellt dann ABCDEFGH (Fig. 445) ein vierseitiges, schief abgeschnittenes Prisma vor, dessen Grundfläche ABCD, dessen Seitenkanten h, h_1, h_2, h_3 sind, so läßt es sich durch eine Ebene ACGE in zwei dreiseitige Prismen zerlegen, deren Inhalt zusammen, wenn Δ, Δ_1 ihre Grundflächen sind,

$$J = \tfrac{1}{3}(h + h_1 + h_2) \cdot \Delta + \tfrac{1}{3}(h + h_2 + h_3) \cdot \Delta_1$$

oder $J = \tfrac{1}{3}[(h + h_1 + h_2) \cdot \Delta + (h + h_2 + h_3) \cdot \Delta_1]$.

Man lege durch das Prisma eine windschiefe Fläche JKLM so, daß $KF = AJ$, $GL = DM$, wo dann, vorausgesetzt, daß $BF = AE$ und $CG = DH$, daß also $EF \mathrel{\#} AB$ und $GH \mathrel{\#} CD$ sei, auch noch $BK = EJ$ und $CL = HM$ werden wird. Das ganze Prisma ABCDEFGH wird hierdurch in zwei Prismen ABCDJKLM und EFGHJKLM zerlegt, welche beide gleichen Inhalt haben, weil jede Seite der windschiefen Cylinderfläche der Verticaldurchschnitt des Prismas, in dem er liegt, in zwei gleiche Theile theilt. Heißt P der Inhalt jedes dieser gleichen Prismen, so ist:

$$P = \tfrac{1}{2}J = \tfrac{1}{6}[(h + h_1 + h_2) \cdot \Delta + (h + h_2 + h_3) \cdot \Delta_1].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} h &= AE = AJ + JE = AJ + KB \\ h_1 &= BF = KF + KB = AJ + KB \\ h_2 &= CG = CL + GL = CL + DM \\ h_3 &= DH = MH + MD = CL + DM \end{aligned}$$

$$h + h_1 + h_2 = 2 \cdot AJ + 2 \cdot KB + CL + DM$$
$$h + h_2 + h_3 = 2 \cdot CL + 2 \cdot DM + AJ + KB.$$

Betrachtet man die unter sich parallelen Seiten AB, CD der Grundfläche des Prismas als die Seitenkanten des Planums, die auf den Seiten AD, BC stehenden Verticalebenen als zwei auf einander folgende verticale Querdurchschnitte der Straße, so kann die Grundfläche ABCD die horizontale oder schiefe Ebene des Planums zwischen den Stationen oder Querdurchschnitten AD, BC vorstellen. Man wird diese Grundfläche wenigstens einerseits, z. B. in B und C, allemal rechtwinkelig denken können, da der eine Querdurchschnitt unbedingt auf beiden Seitenkanten des Planums senkrecht angenommen werden kann. Heißt dann b die Breite BC des Planums, λ die Länge AB der

Station an der einen, λ_1 die Länge CD der Station an der andern Seitenkante, so ist:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \cdot b\lambda, \qquad \Delta_1 = \tfrac{1}{2} \cdot b\lambda_1.$$

Die Verticalen AJ, KB, CL, DM stellen die Abstände des Planums von der natürlichen Terrainfläche, also die rothen Zahlen vor: werden diese in den Punkten A, B, C, D beziehlich mit r, r_1, r_2, r_3 bezeichnet, so ist:

$$\text{I.} \quad P = \tfrac{1}{12} \cdot b \cdot [\lambda \cdot (2r + 2r_1 + r_2 + r_3) + \lambda_1 \cdot (2r_2 + 2r_3 + r + r_1)].$$

Die Grundfläche ist hier horizontal gedacht; die Formel stellt also zunächst nur den Fall eines horizontalen Planums dar, was aus den oben angeführten Gründen auch wohl für alle Fälle ausreichen möchte. Um jedoch auch für den Fall eines schiefen Planums die nöthigen Formeln nicht fehlen zu lassen, mag auch dieser Fall noch in Betracht gezogen werden.

Ist das projectirte Planum eine schiefe Ebene, so hat man, zur Berechnung der Erdmassen, statt der Grundfläche ihre Horizontalprojection zu nehmen, und also den Inhalt der Grundfläche noch mit dem Cosinus des Neigungswinkels zu multipliciren; die Seitenkanten der zu bewegenden Erdmassen repräsentiren aber auch in diesem Falle noch immer die rothen Zahlen. Die dann gültige Formel ist also, wenn φ den Neigungswinkel bezeichnet:

$$\text{II.} \quad P = \tfrac{1}{2} \cdot b \cos \varphi \cdot [\lambda (2r + 2r_1 + r_2 + r_3) + \lambda_1 (2r_2 + 2r_3 + r + r_1)].$$

Die größte auf preußischen Chausseen gestattete Neigung ist $1 : 18 = 0{,}0555 \ldots$; dies ist aber die Tangente des Neigungswinkels φ, also $\varphi = 3^\circ$ ungefähr, und $\cos \varphi = 0{,}998 \ldots$, d. h. nicht viel von 1 verschieden, folglich ändert in der That der Factor $\cos \varphi$ nur wenig an dem Werthe des Ausdrucks, und kann ohne merklichen Fehler weggelassen werden, wo dann die Formel in die (I) übergeht.

Da, wo die Straße ganz gerade ist, stehen beide Querschnitte auf der Achse senkrecht, also ist dann das Viereck ABCD ein Rechteck und $\lambda = \lambda_1$. In diesem Falle vereinfacht sich die Formel (I) in:

$$\text{III.} \quad P = \tfrac{1}{4} b\lambda \cdot (r + r_1 + r_2 + r_3),$$

während die (II) wieder den Factor $\cos \varphi$ erhält.

Fällt das Planum bei A und D in die natürliche Terrainfläche, so ist $r_2 = r_3 = 0$ und Formel (I) verwandelt sich in:

$$\text{IV.} \quad P = \tfrac{1}{6} \cdot b\lambda \cdot (r + r_1) + \tfrac{1}{12} b \cdot \lambda_1 \cdot (r + r_1) = \tfrac{1}{6} \cdot b \cdot (r + r_1) \cdot (\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda_1);$$

dagegen Formel (III) in:

$$\text{V.} \quad P = \tfrac{1}{4} b\lambda \cdot (r + r_1).$$

Ist die Grundfläche ein Dreieck, so hat man ein dreiseitiges Prisma zu berechnen, wo dann:

$$P = \frac{1}{3}\Delta \cdot (r + r_1 + r_2) \text{ und } \Delta = \frac{1}{2} b\lambda, \text{ also}$$

VI. $$P = \frac{1}{6} \cdot b\lambda\,(r + r_1 + r_2).$$

Diese Formeln sind zwar einfach genug, um bei der Berechnung der Erdmassen allen billigen Forderungen zu genügen; aber die Praxis verlangt in der Regel doch noch einfachere, schneller zum Ziele führende Wege. Man berechnet daher gewöhnlich die beiden Querschnitte, nimmt davon das arithmetische Mittel und multiplicirt dies mit dem senkrechten Abstand der Schnitte. Der Schnitt in BC ist $= \frac{1}{2}\, b \cdot (r_1 + r_2)$, in AD $= \frac{1}{2}\, b \cdot (r + r_3)$, also:

VII. $$P = \frac{1}{4}\, b \cdot (r + r_1 + r_2 + r_3).$$

Dies ist aber dieselbe Formel, die oben für eine rechteckige Basis gefunden wurde; für diesen Fall ist also die Formel genau richtig, während sie sonst nur Näherungswerthe liefert.

§. 374. Eine besondere Berechnung erfordern die Erdmassen der Böschungen und Gräben.

Böschungen heißen volle, ganze oder einfüßige, wenn ihre Höhe gleich der Basis ist; halbe oder halbfüßige, wenn die Basis die Hälfte der Höhe beträgt; anderthalbfüßig, wenn die Basis $1\frac{1}{2}$ Mal so groß als die Höhe ist. Natürlich hängt es von der Natur des Erdreichs ab, welche dieser verschiedenen Böschungen in einem besondern Falle in Anwendung kommen kann. Die Straße selbst erhält Böschung bei aufgefülltem Planum, das Terrain rechts und links im Falle der Ausgrabungen. Die Böschung fällt ganz fort, wo die Straße mit seitwärts liegendem Terrain in einer Höhe fortläuft. Die Böschung ist somit ein dreiseitig rechtwinkeliges Prisma, dessen Grundfläche aus dem bekannten Böschungsverhältniß als Basis und der rothen Zahl als Höhe berechnet wird (Fig. 446); die Länge der Station gibt die Höhe des Prismas; ist diese $= \lambda$, die rothe Zahl $= r$ und die Basis der Böschung $= b$, so ist der Inhalt

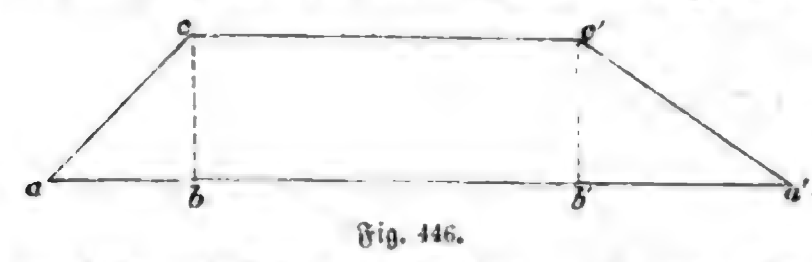


Fig. 446.

$$J = \frac{1}{2}\, br\lambda.$$

Bei voller Böschung ist $b = r$, also dann:

$$J = \frac{1}{2}\, r^2\lambda.$$

Da, wo die Böschung ausläuft, geht das Prisma in eine Pyramide über; man hat dann also $\frac{1}{3}$ der eben berechneten Größe zu nehmen und erhält:

$$J = \frac{1}{6}\, br\lambda \text{ oder } = \frac{1}{6} r^2\lambda.$$

Die Böschung im Abtrage (Fig. 447) ist gerade so zu berechnen; es ist ein Prisma mit der Grundfläche acd, wo $ad = r$, $cd = b$, $\lambda =$ der

Länge der Station; da, wo die Böschung ausläuft, wird sie auch hier zur Pyramide. Hier sowol wie im vorigen Falle läßt sich die Basis b der Bö-

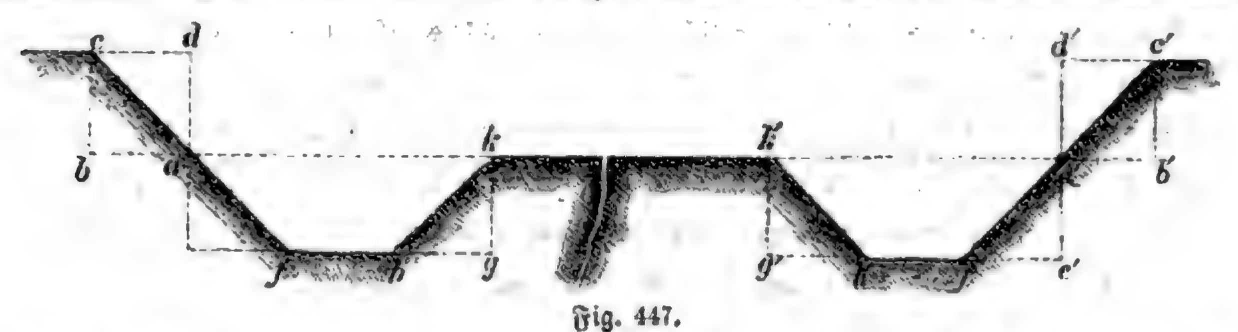


Fig. 447.

schung allemal in r ausdrücken, wenn das Böschungsverhältniß ν gegeben ist, weil dann b = νr, also ist dann

$$J = \frac{1}{2} \cdot \nu\lambda r^2$$

und für auslaufende (pyramidale) Böschung:

$$J = \frac{1}{6}\, \nu\lambda r^2.$$

Die Querdurchschnitte der Gräben sind Trapeze, welche die Grundflächen von Prismen bilden, deren Inhalt die abzutragende Erdmasse bestimmt. Die Höhe ac (Fig. 447) dieser Trapeze ist die vorgeschriebene Grabentiefe t, die mittlere Breite b = ½ (ak + fh) ist ebenfalls bekannt, weil ak und fh vorgeschrieben sind; daher ist die Masse, welche zwischen zwei auf einander folgenden Querschnitten aus dem Graben geschafft werden muß,

$$= bt\lambda,$$

und da, wo der Graben ausläuft, wo nämlich der Aufschutt Grabenhöhe erreicht, ist die Erdmasse wieder als Pyramide zu betrachten, also nur ⅓ vom Inhalte des Prismas zu rechnen.

§. 375. Bei der **Kostenberechnung** des Auf- und Abtrags der Erdmassen kommen ganz besonders auch die **Transportstrecken** in Betracht, da der zur Fortschaffung einer Erdmasse erforderliche Zeitaufwand, also auch der Kostenpreis, der Masse und der Entfernung proportional ist. Wäre z. B. die

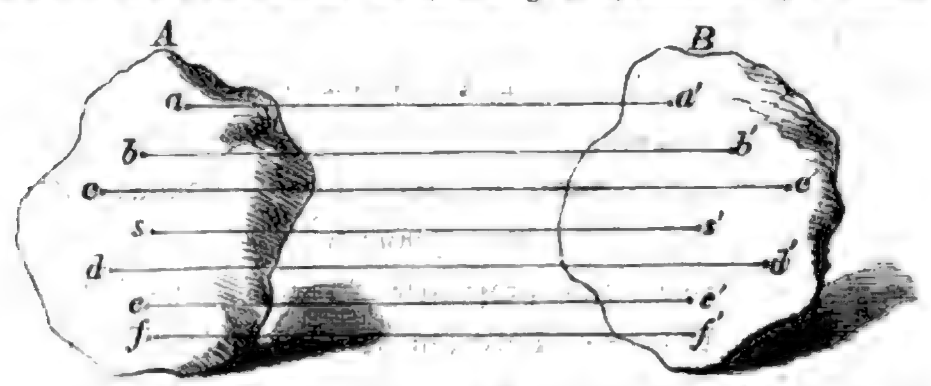


Fig. 448.

Erdmasse AB (Fig. 448) nach CD fortzuschaffen, so würde man a nach a', b nach b', c nach c' u. s. w. schaffen, immer so, daß man die kürzesten Wege zu machen hätte. Wollte man aber alle diese einzelnen Partien in Rechnung ziehen, so wäre das eine sehr langwierige Arbeit. Glücklicherweise

gibt es hier ein Verfahren, welches die Rechnung sehr abkürzt, indem man nämlich für alle die verschiedenen Entfernungen aa′, bb′, cc′ u. s. w. eine mittlere Entfernung ss′ sucht, welche für die ganze Erdmasse AB = M in Rechnung gebracht werden kann, und, wenn sie nur genau ermittelt ist, vollkommen richtige Resultate liefert. Diese mittlere Entfernung ist die gerade Linie zwischen den Schwerpunkten der ab- und aufgetragenen Erdmassen, ss′. Die Gesetze der Schwerpunktsbestimmung müssen wir hier als bekannt voraussetzen.*) Eine ganz genaue Bestimmung des Schwerpunktes ist freilich hierbei nicht erforderlich, es genügt, wenn man die Erdmassen nach den üblichsten Formen als Prismen, Cylinder, Pyramiden unterscheidet. Die Lehre vom Schwerpunkt lehrt nun aber hierüber folgende Gesetze:

1) Der Schwerpunkt eines Prismas oder Cylinders befindet sich in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte ihrer Endflächen. Bei regelmäßigen ebenen Figuren liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte; bei unregelmäßigen Figuren muß man zwei sich durchschneidende Gerade ziehen, von denen jede die Figur in zwei gleiche Theile theilt; der Durchschnittspunkt dieser Geraden ist der Schwerpunkt der ganzen Figur.

2) Der Schwerpunkt einer beliebigen Pyramide wird gefunden, wenn man den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet und in dieser Linie den Punkt bestimmt, welcher um $1/4$ der ganzen Linie von der Grundfläche absteht.

3) Der Schwerpunkt einer parallel mit der Grundfläche abgestumpften Pyramide wird durch die Formel

$$z = \frac{h}{4} \cdot \frac{a + 3b + 2\sqrt{ab}}{a + b + \sqrt{ab}}$$

bestimmt, wenn h den Abstand der beiden parallelen Flächen, a den Inhalt der größern, b den der kleinern Grundfläche, z den Abstand des Schwerpunktes von jener bezeichnet.

Die Anwendung dieser Gesetze würde jedoch einen bedeutenden Aufwand von Calcul erfordern, weshalb denn die Praxis noch schneller zum Ziele führende Mittel anwendet, die, wenn sie auch nur Näherungswerthe zu geben vermögen, doch dem Zwecke hinreichend genügen.

Stellt XX′ (Fig. 449) das projectirte Planum, abcdef die natürliche Terrainfläche vor, so ist O ein Durchgangspunkt, links von O ist Abtrag, rechts Auftrag. Man lege durch O eine Verticalebene YY′ und theile das Volumen des Abtrags und das des Auftrags in möglichst gleiche Schichten

---

*) Den weitere Belehrung suchenden Leser verweisen wir auf des Verfassers „Experimental-Physik" (zweite Auflage, Thl. 3, Berlin 1854), wo er über Schwerpunktsbestimmungen alles Wünschenswerthe vorgetragen findet.

durch die gedachten und äußerlich bezeichneten Querschnitte cC, dD, bB, eE u. s. w., bestimme annähernd den Schwerpunkt s von OcC und s′ von OdD, ebenso s_1 von bBCc und s_1' von dDEe u. s. w., fälle dann von jedem

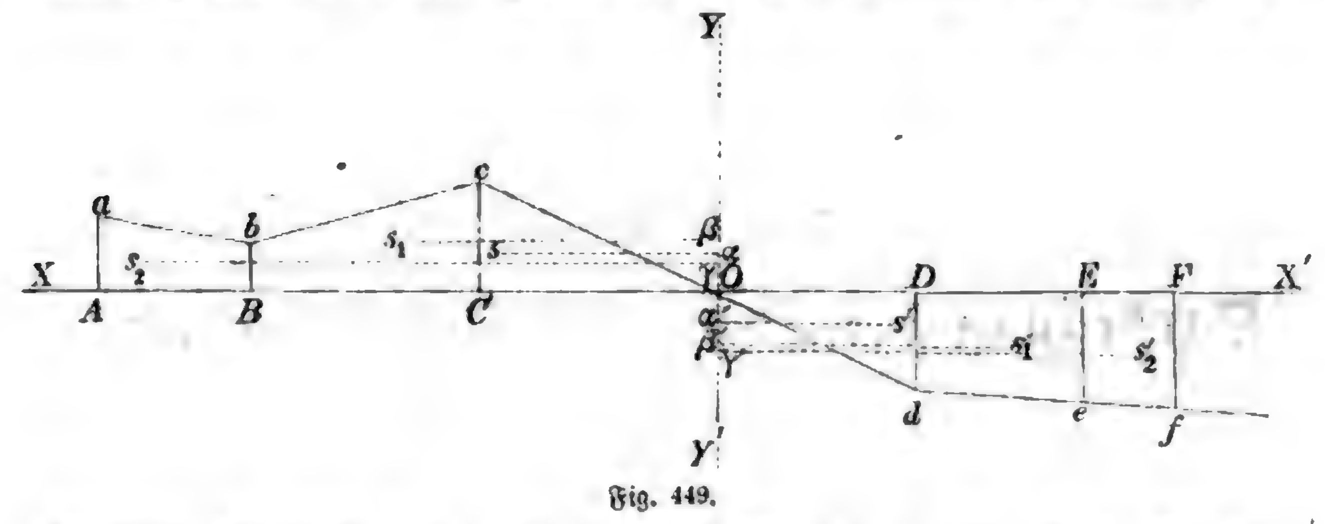


Fig. 449.

Schwerpunkte ein Loth $s\alpha$, $s'\alpha'$, $s_1\beta$, $s_1'\beta'$, $s_2\gamma$, $s_2'\gamma'$ auf die Verticalebene YY′, messe diese Distanzen, addire sie und dividire ihre Summe durch ihre Anzahl. Das so gefundene Maß ist die mittlere Transportdistanz. Bei etwas geübtem Augenmaße wird man mit dieser Operation ziemlich leicht zu Stande kommen und die gesuchte mittlere Entfernung genau genug bestimmen können.

Um in alle diese Rechnungen über den Auf- und Abtrag beim Straßenbau die Ordnung zu bringen, welche allein gegen grobe Irrthümer und Rechnungsfehler sichern kann, muß man die Elemente der Berechnung und die Resultate der Rechnung selbst tabellarisch verzeichnen. In den meisten Ländern ist von den zuständigen Behörden ein bestimmtes Schema hierzu vorgeschrieben, wonach der Feldmesser sich zu richten hat.

Vierter Abschnitt.

Darstellung der Aufnahme durch Zeichnung.

§. 376. Jede Darstellung einer aufgenommenen Fläche durch Zeichnung heißt eine Karte. Eine solche Zeichnung ist nun entweder eine Horizontal- oder Verticalprojection, je nachdem die Projectionsebene mit dem Horizonte zusammenfällt, oder darauf senkrecht steht. Die Horizontalprojectionen heißen Pläne oder Risse, Grundrisse; die Verticalprojectionen Profile oder Aufrisse (§. 8).

Erstes Kapitel.

Abbildung der Horizontalaufnahmen.

§. 377. Erstreckt sich eine Aufnahme über einen so kleinen Theil der Erdoberfläche, daß man, nach §. 6, dabei von der Krümmung der Erde absehen kann, so heißt eine solche Darstellung eine topographische Karte (von τόπος, der Ort, die Gegend, und γραφέω, ich beschreibe); erstreckt sich dagegen die Aufnahme über einen so großen Theil der Erdoberfläche, daß die Gestalt der Erde bei der Projection in Betracht kommt, so heißt die entsprechende Zeichnung eine geographische Karte. Wir haben es hier lediglich mit den topographischen Karten zu thun.

Da die Größe einer Karte durch die Unbequemlichkeit der Handhabung begrenzt wird, so müssen die geographischen Karten stets nach einem viel kleinern Maßstabe entworfen werden als die topographischen; daher könnte man die beiden Arten der Karten auch nach dem Maßstabe, der ihnen zu Grunde liegt, unterscheiden. Man hat wohl auch noch den Unterschied hervorgehoben, daß die topographischen Karten alle bezeichneten Gegenstände nach ihrer wirklichen Gestalt aufführen, die geographischen dagegen nur durch willkürlich gewählte Sinnbilder andeuten. Die topographischen Karten können alle Einzelheiten des Terrains, wie Wälder, Flüsse, Bäche, Seen, Teiche, Wege,

einzelne Häuser u. s. w. wiedergeben, während die geographischen sich auf allgemeine Andeutungen der bedeutendsten Objecte beschränken müssen.

§. 378. Die topographischen Karten zerfallen nun, je nach ihrer Einrichtung und ihrem Zwecke, wieder in mehrere Klassen. Eine Zeichnung in kleinerm Maßstabe, die nur die Lage der Haupttheile einer Gegend angibt, heißt ein Situationsplan. Eine hydrographische Karte ist eine solche, die besonders die natürlichen und die künstlich geleiteten Gewässer eines Landes darstellt; die geognostische Karte gibt die mineralogischen Bestandtheile der dargestellten Gegend an; so wird man aus der Benennung den Zweck der Forstkarten, der ökonomischen, militärischen Pläne u. s. w. erkennen. Bei der Forstkarte ist das Hauptaugenmerk auf die Angabe aller verschiedenen in einer Waldung vorkommenden Holzarten und die genau richtige Abgrenzung der einzelnen Bestände gerichtet; ökonomische Pläne geben die Culturart der einzelnen Theile, Waldungen, Wiesen- und Ackerland u. s. w. an, wo es nöthig auch die Abtheilung in einzelne Schläge und Parcellen; militärische Pläne müssen um so genauer in der Angabe der fahrbaren Straßen, Colonnenwege (Straßen, auf welchen größere Truppenmassen fortgeschafft werden können), der Gewässer, Brücken, Wohnorte, wo Mannschaften auf kürzere oder längere Zeit untergebracht, oder Vertheidigungswerke angelegt werden können, der Berge, Schluchten, Pässe u. s. w. sein. Croquis sind flüchtige militärische Aufnahmen, die meist nur nach dem Augenmaße, oder höchstens durch Abschreiten einzelner Distanzen und ungefähre Messung der Winkel mit solchen Winkelmessern, die sich ohne Belästigung mit sich forttragen lassen, ausgeführt werden, wie solches im Kriege, wo es oft an der zu einer genauern Aufnahme nöthigen Zeit fehlt und manche Theile der aufzunehmenden Gegend nicht betreten werden dürfen. Baupläne werden nach einem großen Maßstabe ausgeführt und geben einen Grundriß auch der einzelnen Theile des Gebäudes, so daß man alle Maße daraus entnehmen kann.

Die Kunst, topographische Karten und Situationspläne anzufertigen, heißt das Situationszeichnen.

§. 379. Von dem Auftragen einer gemachten Aufnahme ist in den §§. 299 und 300 schon im allgemeinen die Rede gewesen; es sind hier nur noch einige Einzelheiten zu erwähnen und zu zeigen, wie eine solche Karte weiter ausgearbeitet wird.

1. Die Flur sei nach der Dreiecksmethode mit der Meßkette aufgenommen, so hat man die Seiten der einzelnen Dreiecke und kann daraus die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf ein schicklich angenommenes rechtwinkeliges Achsensystem berechnen. Mittels der Coordinaten werden dann die Eckpunkte aufgetragen. An das Dreiecksnetz schließen sich die Details leicht an.

2. Die Flur sei mit dem Meßtische vermessen worden, so trägt man die Umfänge einzelner Figuren nach bekannten geometrischen Constructionen in die Reinzeichnung über und schließt die Einzelheiten nach dem Manuale durch Coordinaten an.

3. Ist endlich die Aufnahme durch Triangulation mittels Winkelmessung gemacht, so trägt man zuerst wieder das Netz auf und schließt daran die Details vermittelst der aus dem Manual zu entnehmenden Coordinaten.

Daß man in allen Fällen während des Fortschreitens der Arbeit dieselbe öftern Prüfungen unterwerfen muß, versteht sich von selbst. Dies geschieht dadurch, daß man solche Linien, die selbst nicht nach dem Maßstabe aufgetragen worden, die sich also durch die Verbindung zweier aufgetragenen Punkte ergeben haben, nach der Karte mißt und mit ihren Längen in der natürlichen Projection vergleicht.

Hat man so eine richtige Bleistiftzeichnung entworfen, so werden die Bleistriche sorgfältig mit schwarzer Tusche überzogen. An einer schicklichen Stelle wird dann noch die Richtung des Meridians in der Form eines Pfeils mit der Bezeichnung N — S eingetragen. Es ist üblich, bei der ersten Anlage schon darauf zu sehen, daß der obere Rand der Karte ungefähr nach Norden zu liegen kommt.

§. 380. Bei größern topographischen Karten genügt es meist, wenn die Grenzen des Ganzen und der einzelnen Theile durch schwarze Tuschlinien angegeben werden; die Schattengrenzen, rechts und unten, werden durch stärkere Striche bezeichnet. Die nöthige Schrift, womit jedoch die Zeichnung nicht zu überladen ist, wird sauber und mit möglichster Sorgfalt ebenfalls mit Tusche eingetragen, und zwar gewöhnlich so, daß die Schriftlinien dem obern Rande der Karte parallel laufen; nur fließende Gewässer und Wege werden längs ihres Laufs und ihrer Längenrichtung beschrieben. Wo es angemessen erscheint, z. B. bei größern Flächen, kann man die Schrift einen regelmäßig krummlinigen Zug bilden lassen, um den leeren Raum dafür herauszufinden. Je nach der Wichtigkeit der Gegenstände wählt man größere oder kleinere Schrift. Eine ausführliche Anweisung hierzu findet sich in G. Schreiber's „Vorlesungen über praktische Geometrie“ (S. 72; Karlsruhe 1842).

Bei Karten zu ökonomischen Zwecken, ebenso bei militärischen Plänen, sollen die Einzelheiten so angegeben werden, daß sie leicht ins Auge fallen und einen angenehmen Eindruck machen. Diese Ausführung der Details kann nun entweder blos mit schwarzer Tusche, in schwarzer Manier, oder aber mit Farben gemacht werden.

§. 381. Bei der schwarzen Manier hat man für die am häufigsten vorkommenden Gegenstände stehende Bezeichnungen eingeführt, die jedoch meist

so gewählt sind, daß sie diese Gegenstände darstellen wie sie im Grundrisse erscheinen; Bäume und Sträucher jedoch zeichnet man im Aufrisse, für andere wieder hat man bloße Symbole gewählt. Viele dieser Zeichen werden auch bei der Ausführung in farbiger Manier gebraucht. Graswuchs wird bezeichnet wie Fig. 450, a u. b; Sand, Fig. 451; stehendes Wasser, See, Teich ꝛc., Fig. 452;

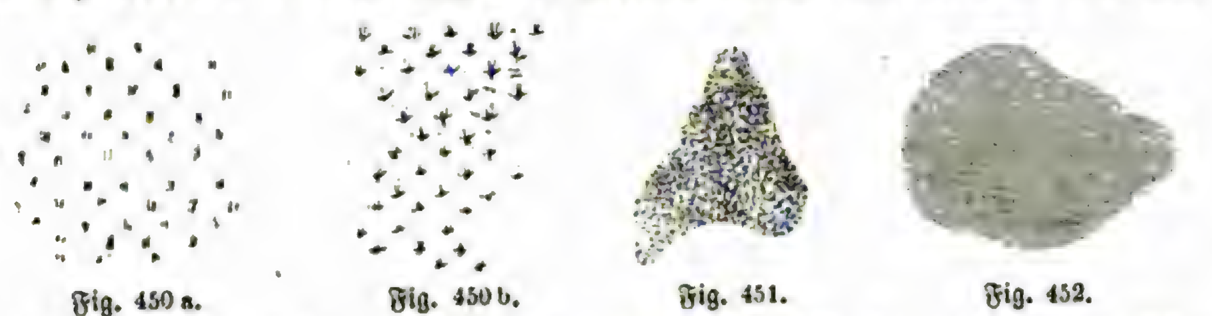


Fig. 450 a. Fig. 450 b. Fig. 451. Fig. 452.

Heideland, Fig 453; nasser Boden mit Graswuchs, Fig. 454; bei Acker-

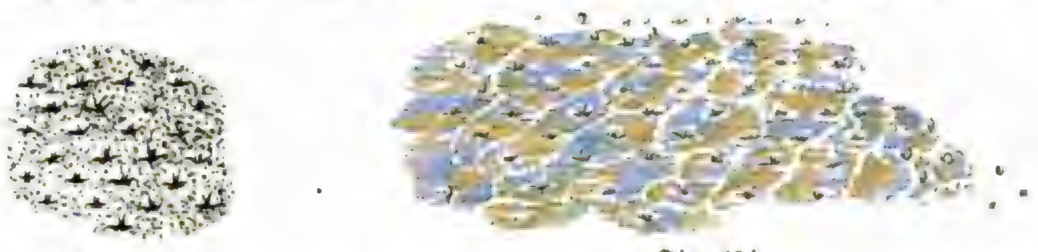


Fig. 453. Fig. 454.

land gibt man die Wendungen und Furchen an, wie Fig. 455; im kleinen Maßstabe wie Fig. 456; Gärten, Fig. 457; fließende Gewässer (Bäche, Flüsse,

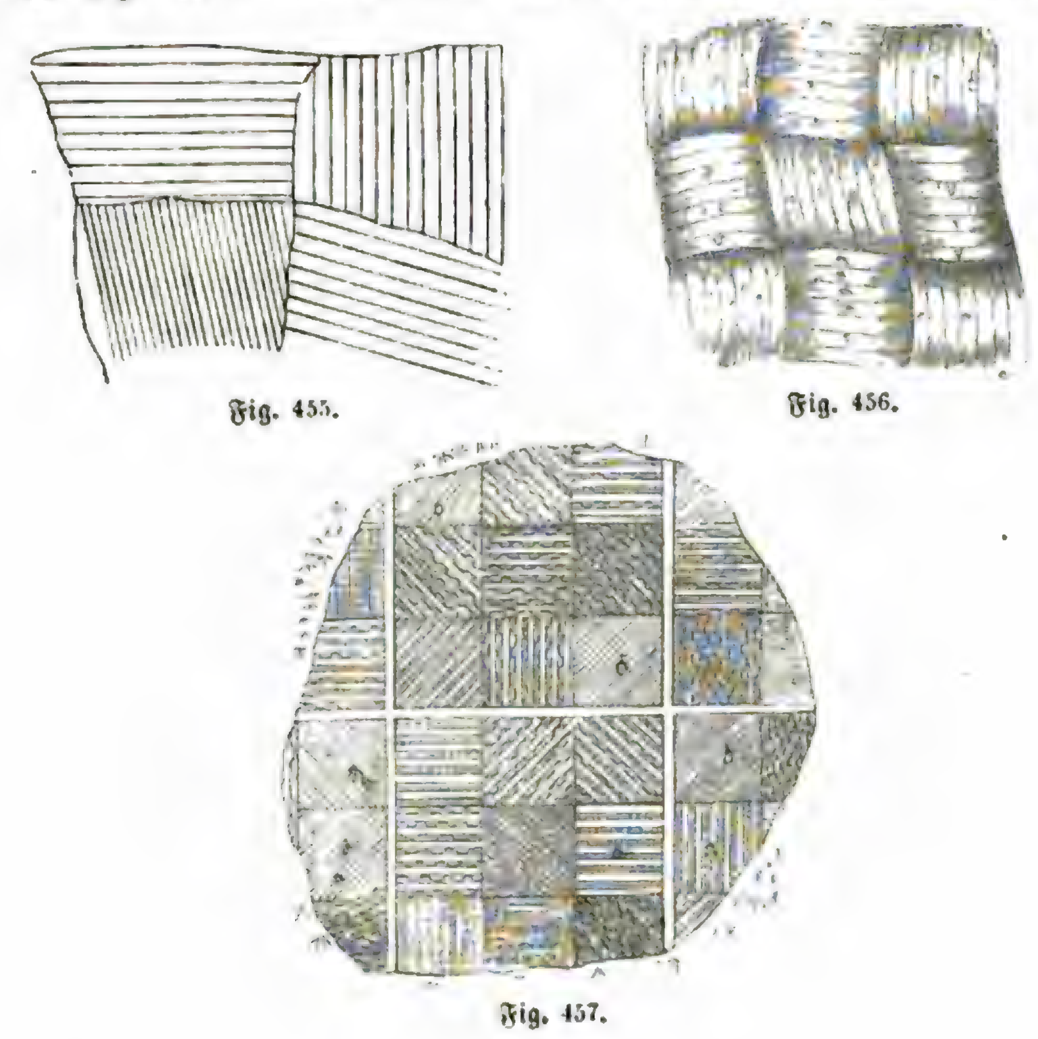


Fig. 455. Fig. 456.

Fig. 457.

Digitized by Google

Kanäle ꝛc.) wie Fig. 458; bei natürlichen Ufern aller Gewässer werden diese durch etwas geschlängelte Linien bezeichnet, die jedoch überall gleich stark sein müssen, außer daß die Schattenseite stets merklich stärker gemacht wird. Laub-

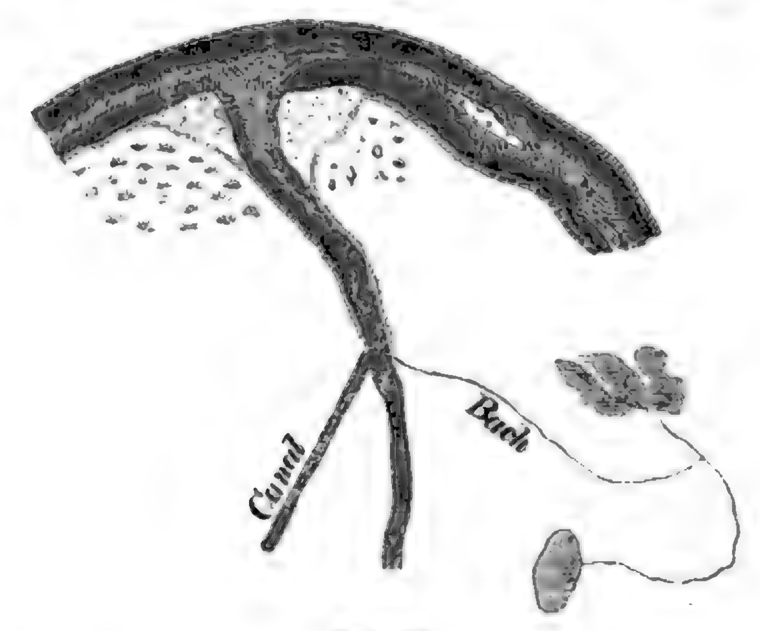


Fig. 458.

holz wie Fig. 459; Nadelholz, Fig. 460; Gebüsch von Laubholz, Fig. 461;

Fig. 459. Fig. 460. Fig. 461.

Gebüsch von Nadelholz, Fig. 462; Alleen, Fig. 463 und 464; Waldun-

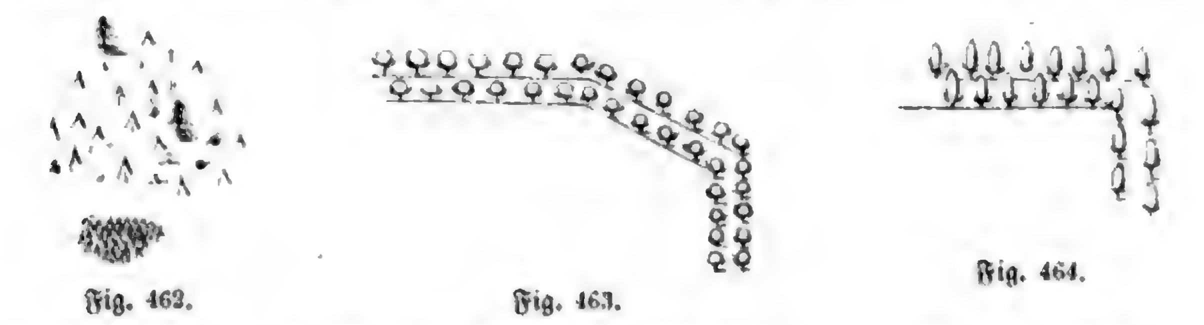


Fig. 462. Fig. 463. Fig. 464.

gen, je nach der Holzart, wie Fig. 465 und Fig. 466; verschiedene Arten der

Fig. 465. Fig. 466.

Wege und Straßen, Fig. 467; Weinberge, Fig. 468; Gebäude im großen

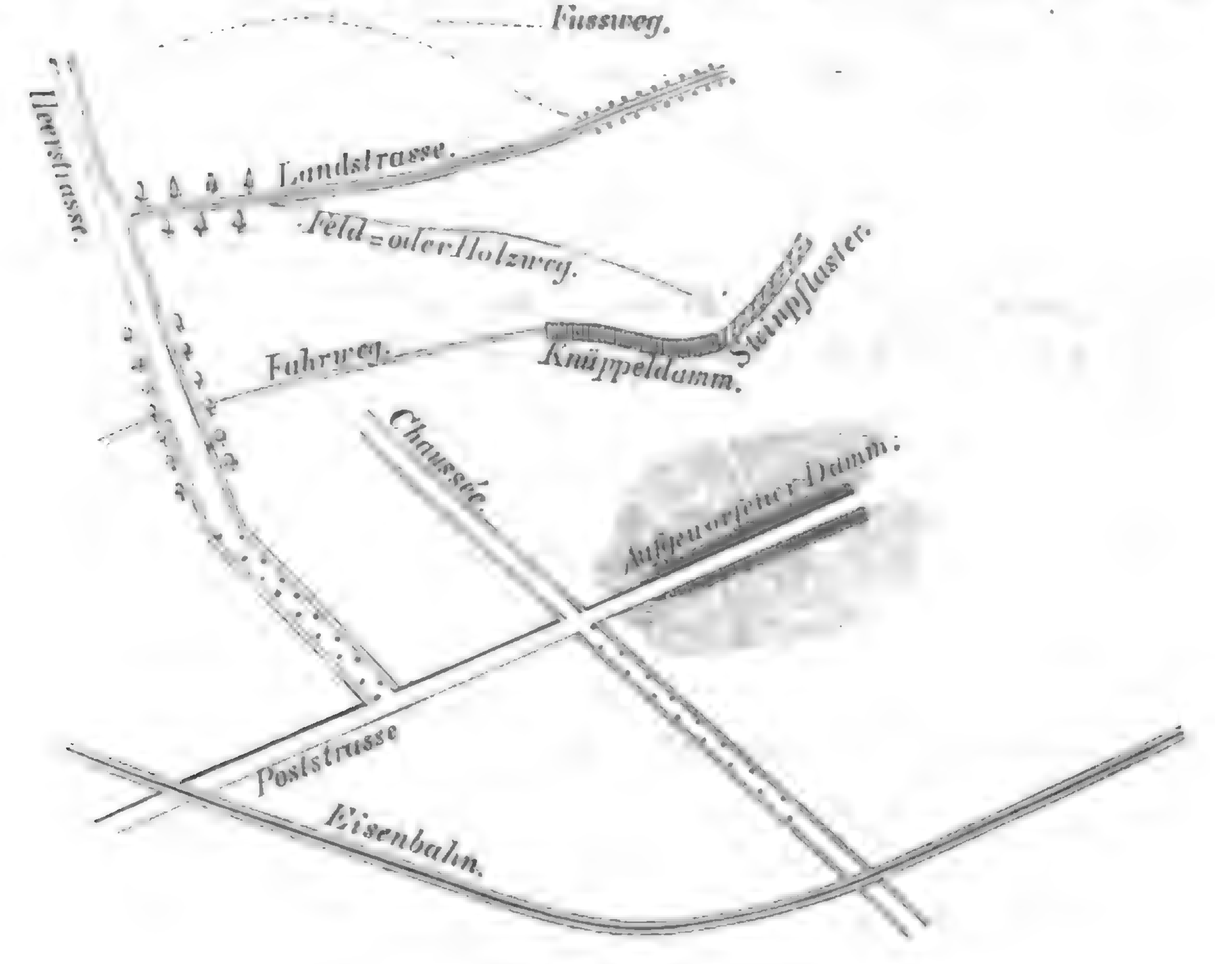


Fig. 467.

Fig. 468.

Maßstabe werden schraffirt, im kleinen Maßstabe ganz schwarz angelegt, wie Fig. 469—71; Hecken, Fig. 472; künstliche Zäune, Fig. 473; nämlich Fig.

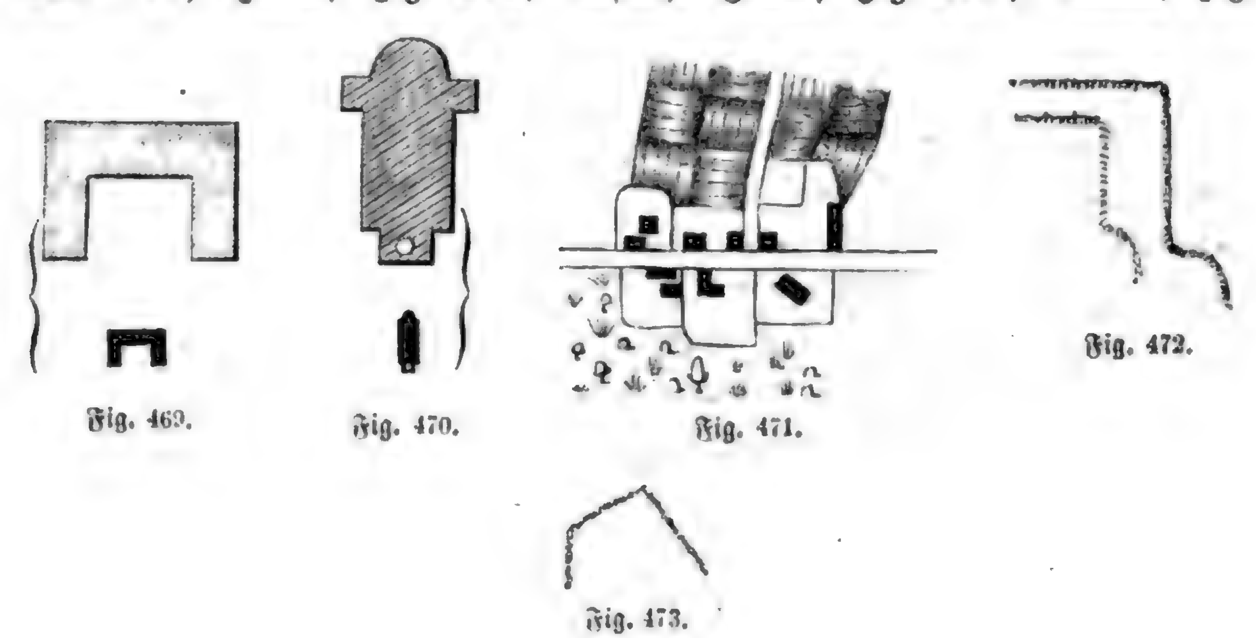


Fig. 469. Fig. 470. Fig. 471. Fig. 472. Fig. 473.

474 Breterwände; Fig. 475 Mauern; Fig. 476 Wände mit Fachwerk; Fig.

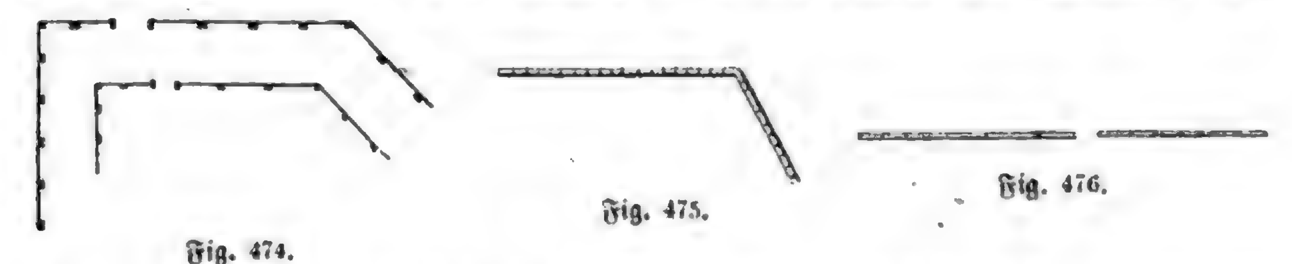


Fig. 474. Fig. 475. Fig. 476.

477 Lattenzäune; Fig. 478 Stacket. Unter den symbolischen Zeichen bemerken wir nur folgende: Landesgrenzen Fig. 479; Provinz-, Bezirks-,

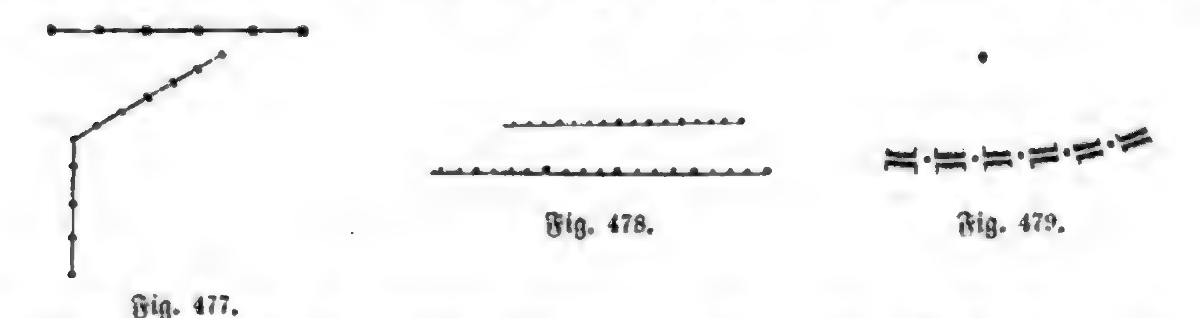


Fig. 477. Fig. 478. Fig. 479.

Kreisgrenze u. s. w. in abnehmender Folge, Fig. 480; Meilensteine, Fig.

Fig. 480. Fig. 481.

481; Poststationen, Fig. 482; Zollhaus, Fig. 483 Mühle, Fig. 484; Bergwerk, Fig. 485.

Fig. 482. Fig. 483. Fig. 484. Fig. 485.

§. 382. Bei der Ausarbeitung der Pläne mit Farben müssen die angewendeten Farben der Farbe des Gegenstandes, den sie darstellen sollen, möglichst entsprechen; nur wenn sich verschiedene Gegenstände von gleicher Farbe nicht gehörig unterscheiden ließen, wählt man willkürliche Farben. Ist die Karte nach einem großen Maßstabe ausgeführt, wie z. B. ökonomische Karten, wo es auf genaue Angabe der einzelnen Acker- und Schlaggrenzen ankommt, so werden alle Begrenzungen durch eine feine schwarze Tuschlinie bezeichnet, ehe die Karte illuminirt wird. Die Farben müssen sich genau an diese Grenzen halten und überall gleichmäßig, übrigens nur matt angelegt werden, blos an den Grenzen pflegt man einen etwas dunklern Farbensaum

zu geben. Damit das Papier die Farbe überall gleichmäßig annehme, muß man namentlich größere Flächen erst mit klarem Wasser überziehen. Ist das Papier schmuzig, so reibe man es vor allem mit weißem Brot (nicht mit Gummi) ab; hilft das nicht, so muß es mit aufgelöster Ochsengalle gewaschen werden. Auf topographischen Karten werden blos die Grenzen der Gebäude mit Tusche überzogen; alle andern Grenzen werden blos durch die an einander stoßenden Farben bezeichnet.

Die Bezeichnung durch Farben geschieht nun in folgender Weise:

1. **Gebäude.** Steinerne Gebäude werden mit blaßrothem Carmin und einem dunklern Schattenstrich rechts und unten gezeichnet; außerhalb bekommen sie auch wol noch einen Schlagschatten von blasser schwarzer Tusche. Hölzerne Gebäude werden mit Gummigutt hochgelb gemalt.

2. **Steinerne Befriedigungen** werden roth, hölzerne gelb angelegt, ganz wie die gleichartigen Gebäude. Als Grundriß der Pfähle setzt man bei Lattenzäunen noch schwarze Pünktchen in gleichen Entfernungen. Lebendige Hecken macht man mit dem sogenannten Gartengrün, aus Grünspan und etwas Gummigutt.

3. **Der Boden.** Getreidefelder werden je nach der Bewirthschaftung verschieden angelegt: Sommerfeld blaß gelbgrün (Carminblau und Gummigutt), Winterfeld blaß rothbraun (Carminroth, Gummigutt und schwarze Tusche), Brachfeld blaßgrau (schwarze Tusche). Wiesen mattgrün (Grünspan mit Gummigutt). Heide mit etwas gelberm Wiesengrün. Sandboden mit einer Mischung aus Gummigutt und Carmin; ebenso Kies- und Lehmboden, nur gelb und roth punktirt. Felsen roth mit Carmin. Steinbrüche mit Sandfarbe in feinen parallelen Strichen.

4. **Wälder** werden mit einer Mischung aus schwarzer Tusche und rothem Carmin gemalt. Blößen bleiben weiß. Einzelne Bäume, Gebüsche, Alleen u. s. w. werden mit Wiesengrün gemacht und erhalten unten rechts Schlagschatten. Baumanlagen und Weingärten gartengrün.

5. **Wege** werden mit Umbratusche und Carmin braun angelegt. Chausseen erhalten zwei schwarze Striche als Begrenzung, Eisenbahnen bekommen blaue Grenzen, Landstraßen und Feldwege entbehren der Grenzlinien, Fußwege werden durch braune Punkte bezeichnet. Dämme und Deiche werden durch zwei parallele Streifen von blasser Tusche bezeichnet, steinerne Brücken roth mit Carmin, hölzerne gelb mit Gummigutt; Zugbrücken gelb mit einem Rechteck und Diagonalen von schwarzen Linien; Schiffbrücken gelb, die Kähne mit schwarzen Umrissen.

6. **Gewässer.** Ströme, Flüsse, Kanäle, Seen, Teiche u. s. w. blaßblau, die Ufer dunkler mit Schlagschatten, Bäche ohne Schlagschatten. Moräste erhalten noch außerdem grüne Horizontalstriche.

Alle hervorragenden Gegenstände erhalten Schlagschatten rechts und unten, alle vertieften links und oben.

Zweites Kapitel.

Abbildung der Verticalaufnahmen.

§. 383. Der auf Grund einer Vermessung angefertigte Plan soll, namentlich zu militärischen Zwecken, nicht blos die auf der Fläche vorhandenen Gegenstände nach ihrer Lage in horizontaler Dimension darstellen, sondern den ganzen Charakter des Terrains wiedergeben und beim ersten Anblick erkennen lassen. Bei Karten zu ökonomischen Zwecken ist dies zwar nicht der Fall, weil die Terrainbeschaffenheit hier nur ein untergeordnetes Interesse hat und überdies eine solche Ausführung die Zeichnung zu sehr überladen würde, um alles Uebrige noch deutlich genug erkennen zu lassen. Desto wichtiger ist der Gegenstand für die Zwecke der Strategie.

Die Beschaffenheit des Terrains nach verticaler Dimension wird in den Plänen auf zweierlei Weise dargestellt: 1) im Grundrisse durch Bezeichnung der verschiedenen Beleuchtung je nach der Neigung der Flächen; 2) durch Verticalprojectionen oder Profile. Des ersten Mittels bedient man sich zur Darstellung der Berge und Anhöhen, des letztern hauptsächlich nur, um die Resultate eines Nivellements zur fernern Benutzung bei den darauf gegründeten Erdarbeiten (Auf- und Abtragungen), weil es hier auf die genauen Maße wesentlich ankommt. In der physischen Geographie benutzt man Profile, nach verschiedenen Himmelsrichtungen genommen, zur deutlichern Darstellung der Charakteristik eines Landes.

A. Darstellung der Verticaldimensionen im Grundrisse. Bergzeichnen.

§. 384. Es sei ABCD (Fig. 486) eine horizontale, EFGH eine schiefe Ebene, welche erstere in der Geraden EF schneidet. EFGH und EFCD bilden auf jeder Seite von EFGH einen Flächenwinkel, wovon EF die Kante ist. In irgend einem Punkte von EF, z. B. in Q, errichte man ein Loth auf EF in der Ebene EG, und in demselben Punkte Q auch ein Loth auf EF in der Ebene EC; ersteres sei PQ, letzteres QR; PQ und QR bilden den Linienwinkel PQR. Denselben Linien-

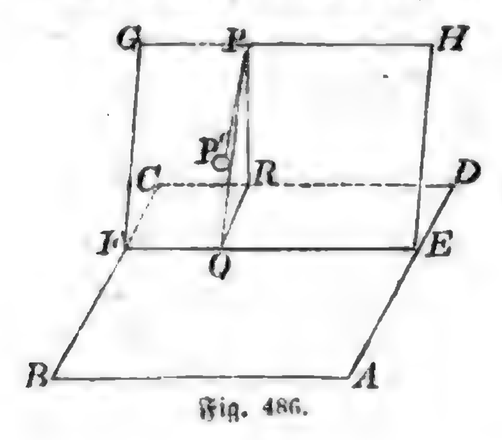


Fig. 486.

winkel PQR erhält man, wenn man die Ebenen EG und AC durch eine zur Linie EF senkrechte, durch den Punkt Q gehende Ebene geschnitten denkt. QR ist also die Horizontalprojection von PQ. Der Winkel PQR, welchen PQ mit seiner Horizontalprojection bildet, heißt der Neigungswinkel beider Ebenen, auch wohl, wenn AC, wie hier, horizontal gedacht wird, der Neigungswinkel der schiefen Ebene EG. Aber ebenso ist PQR der Neigungswinkel der schiefen Linie PQ, und ein Pendel, das, in P befestigt, in die Ebene EG gelegt würde, müßte, wie PP′, die Richtung der Geraden PQ annehmen, welche auf EF senkrecht steht; oder ein Wassertropfen, in P freigelassen, würde in der Linie PQ herunterfließen. Die Linie PQ heißt daher die Linie des größten Falles, die Neigungslinie der Ebene EG, auch die Richtung des Wasserlaufs. Die im Terrain vorkommenden geneigten Ebenen heißen Abdachung oder Böschung, wenn sie natürlich, Dossirungen, wenn sie durch Kunst hergestellt sind.

Die Neigung φ der schiefen Ebene EG wird ausgedrückt durch:

$$\frac{QR}{PR} = \operatorname{cotg} \varphi,$$

d. h. die Horizontalprojection der Neigungslinie, dividirt durch die Höhe, gibt die Cotangente des Neigungswinkels φ. Nimmt man dann die Höhe zur Einheit, so ist geradezu die Horizontalprojection die Cotangente des Neigungswinkels.

§. 385. Soll nun eine Erhöhung über dem Horizonte eines Ortes der Erde durch die bloße Horizontalprojection so dargestellt werden, daß man auch ohne Verticalprojection alle Dimensionsverhältnisse (auch die der Höhe) mit Sicherheit daraus entnehmen kann, so verfahre man dabei auf folgende Weise. Man denke sich die Erhöhung, den Berg oder Hügel, durch mehrere horizontale Ebenen geschnitten, so nämlich, daß die Neigungslinien der Abdachung zwischen je zwei Horizontalen gerade Linien bilden, so entstehen durch die horizontalen Schnitte ebenso viele Curven, welche den Umfang des Berges in der betreffenden Höhe darstellen. Diese Curven projicire man auf den Horizont. Diese Projectionen heißen Niveaucurven oder Horizontalen, weil alle Punkte derselben Curve gleiches Niveau, d. h. gleiche Höhe über dem Horizonte haben. Ermittelt man dann noch diese Höhe jedes der horizontalen Schnitte oder jeder Curve, und schreibt die entsprechende Zahl zu der Projection hinzu, so heißen diese Zahlen die Höhenkoten der verschiedenen Curven; eine Niveaucurve mit der ihr zukommenden Höhenkote versehen, heißt die Curve kotiren.

Es mögen n, n′, n″, n‴, n^{IV} (Fig. 487) solche Niveaucurven in der Horizontalprojection, 10, 20, 40, 70, 100 ihre Höhenkoten vorstellen, so

sagt uns die Zeichnung: es sei z. B. n' ein horizontaler Schnitt der Erderhöhung in 20 Fuß oder Ruthen u. s. w. Höhe über dem Horizonte, n'' eine

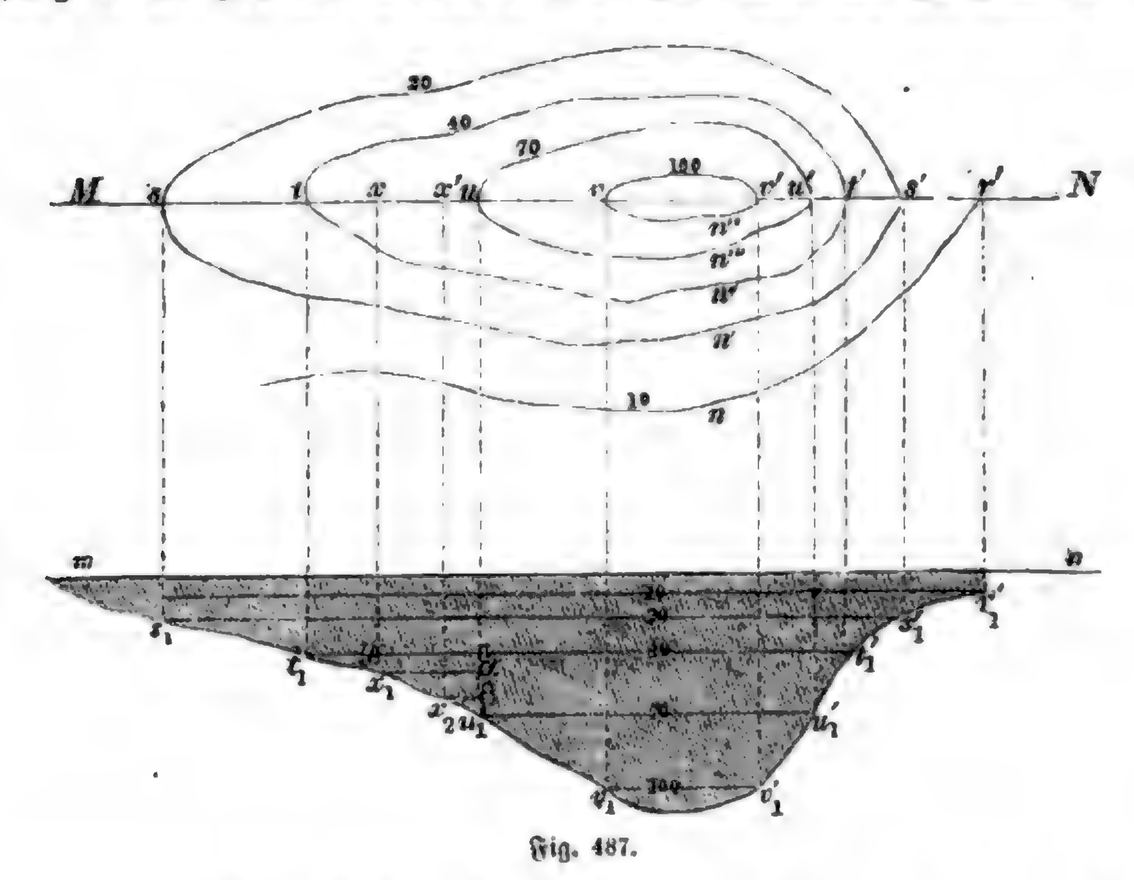


Fig. 487.

andere in 40 Fuß, Ruthen Höhe u. s. w. Um nun, wenn auch vorgreifend, gleich den Nutzen solcher Niveaucurven zu zeigen, lege man durch die Projection eine Gerade MN nach irgend einer Richtung, errichte in den Schnittpunkten s, t, u, v, v', u', t', s', r' der Geraden MN mit den verschiedenen Niveaucurven Lothe auf MN, ziehe mn parallel zu MN, verlängere dann jedes Loth um die betreffende Höhenkote über mn hinaus, also $s s_1$ um 20, $t t'$ um 40 Längeneinheiten u. s. w., ziehe durch die Endpunkte die Geraden $s_1\ s_1'$, $t_1\ t_1'$, $u_1\ u_1'$ u. s. w. und verbinde die Punkte s_1, t_1, u_1, v_1 u. s. w., so erhält man einen Aufriß oder ein Profil des Berges nach der Richtung der Linie MN genommen. Es wird hierdurch zugleich anschaulich, daß $s t$ des Grundrisses die Horizontalprojection von $s_1 t_1$ des Aufrisses ist, $t u$ des Grundrisses die Horizontalprojection von $t_1 u_1$ des Aufrisses u. s. w. Da nun immer, wenn p die Projection der Neigungslinie, h die Höhe, φ der Neigungswinkel ist,

$$\frac{p}{h} = \operatorname{cotg} \varphi,$$

so kann man aus den Abständen $s t$, $t u$ u. s. w. je zweier Niveaucurven und den Höhenkoten geradezu die Neigung des Abhanges zwischen je zwei Horizontalschnitten, d. h. die Neigung der Abdachung oder den Böschungswinkel finden.

§. 386. Ist in der Horizontalprojection irgend ein Punkt x gegeben, der zwischen zwei Niveaucurven liegt, so läßt sich leicht seine Höhenkote finden, denn zieht man die projicirende Linie $x x_1$ so ist $x_1 y$ die Höhe des Punktes x über der Ebene der nächst tiefern Niveaucurve. Addirt man zur Höhe $x_1 y$ noch die Höhe der Ebene $t_1 t_1'$, so hat man die Höhe des Punktes x über dem Horizonte. Es ist aber:

$$x_1 y : u_1 z = t_1 y : t_1 z$$

$$\frac{t_1 z}{u_1 z} = \frac{t_1 y}{x_1 y}.$$

Nun wird die Abdachung zwischen t' und u' als unveränderlich angesehen, also ist der Neigungswinkel in x_1 derselbe wie in der Ebene $t_1 t_1'$; und

$$\frac{t_1 y}{x_1 y} = \cotg \varphi,$$

$$\text{also } x_1 y = t_1 y \cdot \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{oder } x_1 y = t_1 y \cdot \frac{u_1 z}{t_1 z}.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$t_1 y = t x; \quad t_1 z = t u; \quad u_1 z = 70 - 40 = 30,$$

also: $x_1 y = t x \cdot \frac{30}{t u}$, d. h. man dividire den Höhenunterschied der beiden nächst anliegenden Höhenkoten durch die Projection der Neigungslinie und multiplicire den Quotienten mit dem aus der Horizontalprojection genommenen Abstande des Punktes von der nächst tiefern Niveaucurve.

Wollte man den im Terrain gegebenen Punkt x_1 nachträglich noch in die Karte eintragen, also den Punkt x der Projection suchen, so wäre die Linie $t x = t_1 y$ zu bestimmen. Man hätte:

$$t_1 y : t_1 x_1 = t_1 z : t_1 u_1$$

$$t_1 y = t x = \frac{t_1 x_1 \cdot t_1 z}{t_1 u_1}.$$

Oder: $\frac{t_1 y}{t_1 x_1} = \cos \varphi$; $\cotg \varphi = \frac{p}{h}$, wodurch φ gefunden wird; $t_1 x_1$ kann gemessen werden, also hat man dann $t_1 y = t x = t_1 x_1 \cdot \cos \varphi = t_1 x_1 \cdot \frac{p}{h} = t_1 x_1 \cdot \frac{u t}{30}$.

Ebenso gelangt man dahin, zwischen zwei Niveaucurven noch eine dritte einzuschalten. Es seien (Fig. 488) die Curven mn und pq aufgenommen und verzeichnet; ihre Höhenkoten seien h, h'. Sind zwei Punkte x, y, durch welche die einzuschaltenden Curven gehen sollen, in der Projection gegeben, so ziehe man xa, yb senkrecht auf jede Curve und verlege allenfalls den einen Punkt y so, daß ax in der Verlängerung durch ihn hindurchgeht; sollte

sie auf pq nicht senkrecht stehen, so wird sie etwas gekrümmt, bis sie dieser Bedingung genügt. Dann ziehe man noch andere Zwischenlinien a′b′, a″b″, alle auf beiden Niveaucurven senkrecht und theile sie nach demselben Verhältniß, nach welchem ab getheilt ist; ziehe endlich die verlangten Curven durch die zusammengehörigen Theilungspunkte xx′x″, yy′y″.

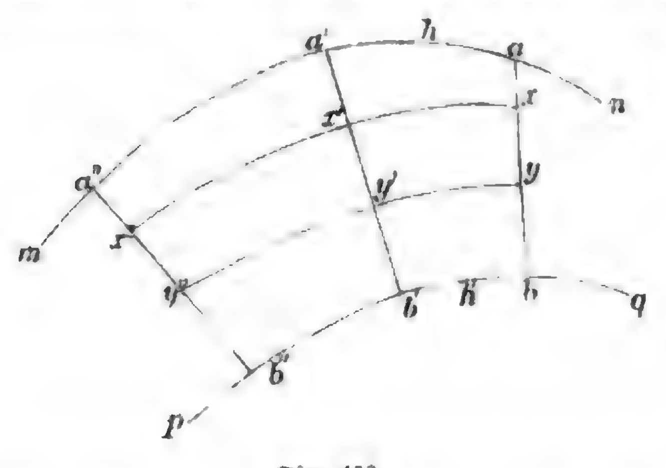


Fig. 488.

Sind Punkte, durch welche Zwischencurven gehen sollen, im Felde gegeben, so ist klar, daß die Projection nach demselben Verhältniß getheilt werden muß wie die Böschungslinie; also kann man $x_1 y$ bestimmen, folglich dann auch x′, x″, y′, y″ u. s. w. Und wären endlich die Höhen der einzuschaltenden Curven zwischen den Nachbarcurven gegeben, so müßte man diese Höhen auf zu_1 (Fig. 487) abtragen, durch die so gefundenen Punkte α, β parallel mit zt_1 ziehen, dann die Punkte x_1, x_2 auf MN projiciren, so fände man, daß ut in demselben Verhältniß wie zu_1 getheilt werden muß.

Man sieht, daß die Niveaucurven in Verbindung mit ihren Höhenkoten alles leisten, was zur Erkennung der Configuration des Terrains erforderlich ist. Es fehlt ihnen nur das eine, die Terrainbeschaffenheit auch in die Augen fallend darzustellen, wie dies namentlich von militärischen Plänen und eigentlichen Landkarten verlangt wird; dafür sind sie aber auch um so bestimmter und sicherer in diesen Angaben.*)

Statt der Niveaucurven kann man sich zur Darstellung der Gestaltung des Terrains auch der Projection der Böschungs- oder Neigungslinien bedienen. Aber sie vermögen allein auch noch nicht die Neigung des Abhanges zu bestimmen; vielmehr können sie nur angeben, wie weit etwa diese Neigung dieselbe bleibe; also muß entweder der Neigungswinkel zugeschrieben, oder es müssen an verschiedenen Stellen die Koten bemerkt werden, woraus man dann wieder die horizontalen Niveaucurven ableiten kann, weil diese auf den Böschungslinien senkrecht stehen. Es stelle Fig. 489 einige Böschungslinien eines Abhanges vor, und man wolle die Höhe des Punktes p finden, so würde man senkrecht gegen alle Böschungslinien die krumme Linie qpr ziehen;

---

*) Wenn man übrigens Niveaucurven von überall gleichen Verticalabständen construirt, wie dies in jeder Hinsicht zu empfehlen ist, so kommen natürlich die Curven bei steilerm Terrain in der Horizontalprojection näher an einander zu liegen und dies läßt dann einigermaßen auch die Gestaltung des Bodens erkennen.

da nun in der Linie die Höhen über dem Horizonte bemerkt sind, so wird, weil r zwischen 70 und 90 fällt, die Höhe von $p = 70 + \frac{cr}{cd} \cdot 20$, denn p liegt nun ebenso hoch, wie r oder q.

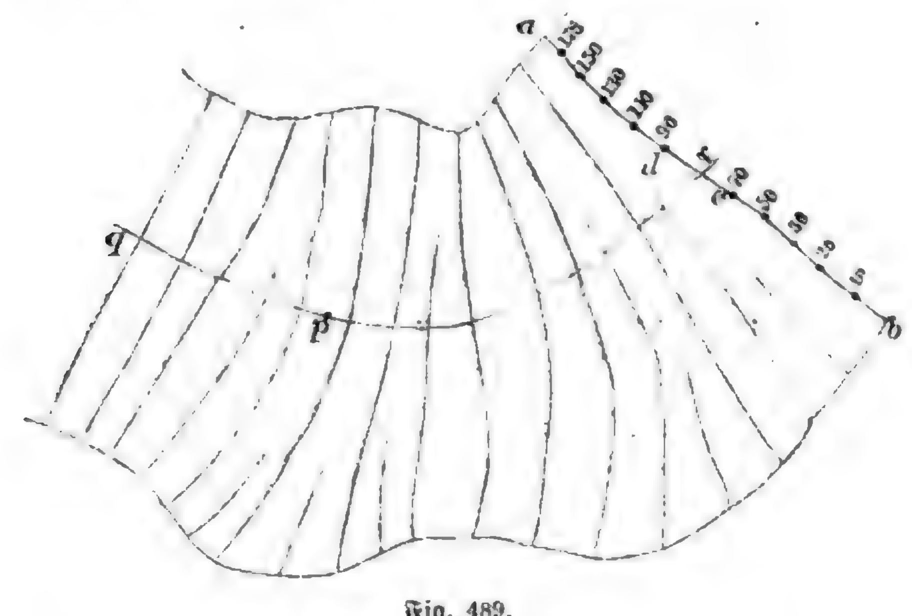


Fig. 489.

§. 387. Der sächsische Major J. G. Lehmann hat eine Theorie der Bezeichnung schiefer Flächen mittels der Böschungslinien geschaffen und zuerst 1799 publicirt, welche in der That allen Anforderungen entspricht, die man an die Lösung einer so schwierigen Aufgabe stellen kann. Ihrer allgemeinen Anwendung steht nur die ungemeine Mühseligkeit der Ausführung im Wege, daher sie fast nur auf militärische Pläne beschränkt bleibt, während man sich in allen andern Fällen einzig der Niveaucurven bedient, um die Bodengestaltung anzudeuten.

Die Lehmann'sche Methode des Bergzeichnens beruht auf dem bekannten Satze der Optik, daß die Erleuchtung einer Fläche dem Cosinus des Neigungswinkels dieser Fläche proportional ist (§. 58). Da man nun annehmen kann, daß das Tageslicht vertical auffalle, und weil $\cos 0 = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$ ist, so wird eine horizontale Ebene am hellsten, eine verticale am wenigsten erleuchtet erscheinen; wird also eine beliebig geneigte Ebene im Grundriß dargestellt, so muß ihr eine Helligkeit gegeben werden, welche dem Cosinus ihres Neigungswinkels zur Horizontalen proportional ist; ebenso ist klar, daß, umgekehrt, wenn eine in Grundriß gelegte Ebene die nach diesem Gesetz ihr zukommende Helligkeit hat, jeder Beschauer gleich die Neigung, die sie in der Wirklichkeit hat, daraus wird ersehen können. Die größere oder geringere Helligkeit einer Fläche wird hervorgebracht durch die entsprechende Mischung von Weiß und Schwarz; völliges Weiß entspricht der Helligkeit der horizontalen völliges Schwarz dem Dunkel der verticalen Fläche. Diese Mischung von Weiß und Schwarz kann nun auf zwei verschiedene Weisen hervorgebracht

werden: erstens dadurch, daß man die ganze Fläche gleichmäßig mit einer Farbe bemalt, welche von den Abstufungen vom vollen Weiß durch alle Grade des Grau hindurch bis zum absoluten Schwarz gerade die Mischung darstellt, welche nach dem angeführten Gesetze der Neigung der Fläche zukommt; oder zweitens dadurch, daß man zwar Weiß und Schwarz in demselben Verhältniß ($1 : \cos \alpha$) anbringt, aber nicht gemischt, sondern neben einander, so jedoch, daß sie auf das Auge denselben Eindruck machen, wie wenn sie gemischt wären. Dies würde nicht der Fall sein, wenn man den einen Theil der Fläche weiß, den übrigen schwarz machen wollte, wol aber, wenn Weiß und Schwarz in schmalen Zwischenräumen nach dem durch die Neigung geforderten Verhältniß mit einander abwechseln, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn man die ganze Fläche in eine große Anzahl schmaler Streifen theilt, und jeden dieser Streifen in einem Theile weiß läßt, im übrigen nach dem Verhältniß $1 : \cos \alpha$ schwarz bemalt. Dies führt auf den Begriff der Licht- und Schattenstriche. Ist der Neigungswinkel α klein, die Fläche also fast horizontal, so müssen die Lichtstriche breiter als die Schattenstriche sein; ist α groß, so findet das umgekehrte Verhältniß statt.

§. 388. Dies würde eine theoretisch streng richtige Bergzeichnung geben. Aber, wenn man auch nur Abstufungen des Hell und Dunkel nach ganzen Graden der Neigung einführen wollte, so würden ihrer doch zu viele, um vom Auge mit Leichtigkeit und Sicherheit abgeschätzt zu werden. Lehmann ist daher, um der Vereinfachung willen, von dieser strengen Theorie abgegangen. Bergabhänge von 45° kommen in der Natur nur sehr selten vor und sind völlig ungangbar; es werden daher nur Böschungen unter 45° durch Bergstriche gezeichnet und alle größern Neigungen ganz schwarz angegeben. Für die Neigungen von 0° bis 45° aber bestimmt Lehmann das Verhältniß zwischen Schwarz und Weiß so, daß er sich den Raum, den ein Bergstrich mit dem ihm angrenzenden weißen Zwischenraume einnehmen soll, in 45 gleiche Theile getheilt denkt, so viele dieser Theile, als die Neigung der Fläche Grade hat, schwarz anlegt, das übrige weiß läßt oder dem Zwischenraume zutheilt. Unterscheidet man, wie gewöhnlich geschieht, die Neigungen blos von 5 zu 5 Graden, so bekommt man hiernach folgende Scala:

Neigung.	Verhältniß von Schwarz zu Weiß.	Verhältniß von Schwarz und Weiß in kleinern Zahlen.
0°	0 : 45	Weiß.
5°	5 : 40	1 : 8
10°	10 : 35	2 : 7
15°	15 : 30	3 : 6
20°	20 : 25	4 : 5
25°	25 : 20	5 : 4
30°	30 : 15	6 : 3
35°	35 : 10	7 : 2
40°	40 : 5	8 : 1
45°	45 : 0	Schwarz.

Neigungen, die zwischen 0° und 5° fallen, werden wie die von 5°, die von 6—9° wie 10° u. s. w. gezeichnet, nur daß die schwarzen Striche etwas weniger Stärke erhalten. Die Fig. 490 gibt den sogenannten Böschungs-

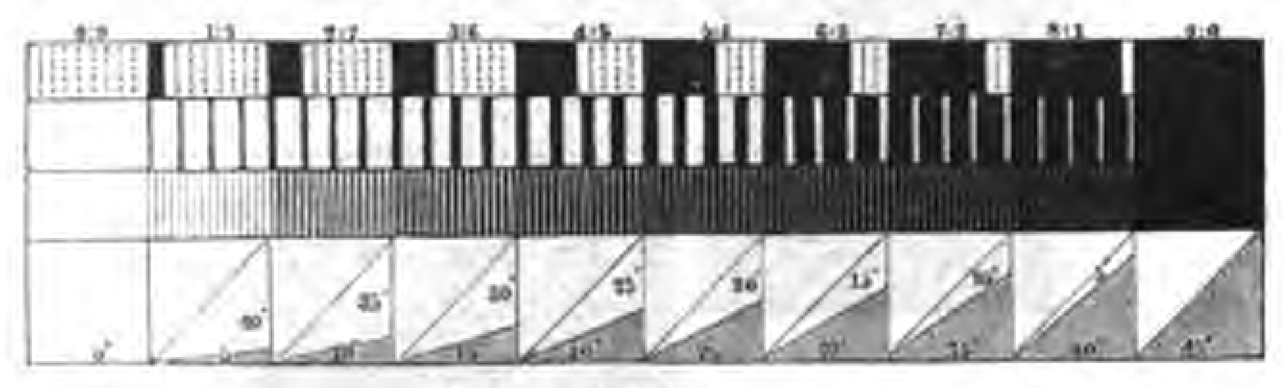


Fig. 490.

maßstab, wodurch für jede der oben verzeichneten Neigungen das Verhältniß des Schwarzen zum Weißen anschaulich dargestellt wird. Es ist an sich ganz gleich, ob die einzelnen Striche dick oder dünn seien, wenn nur das richtige Verhältniß von Schatten und Licht beobachtet wird; aber das Ansehen der Zeichnung gewinnt dadurch, daß man die Striche so fein macht, daß man in der Weite des deutlichen Sehens nicht mehr die einzelnen Striche zu unterscheiden vermag, vielmehr nur einen Gesammteindruck des Lichtverhältnisses bekommt; wiederum sollen die Striche so dick sein, daß man bei genauerm Ansehen in kürzerer Entfernung das Verhältniß zwischen Weiß und Schwarz abzuschätzen vermag.

Für eine Neigung von n° ist das Verhältniß zwischen Schwarz und Weiß n : 45 — n. Und ist in einer vorliegenden Zeichnung dieses Verhältniß = m : n, so findet man den Neigungswinkel x durch die Proportion:

Digitized by Google

$$x : 45 - x = m : n$$
$$45 : x = m + n : m$$
$$x = \frac{45 \cdot m}{m + n}.$$

Es kommt also alles darauf an, durch eine richtige Abschätzung der schwarzen Striche und weißen Zwischenräume das Verhältniß m : n möglichst genau zu bestimmen.

Durch den General von Müffling ist für die preußische Armee eine hiervon etwas abweichende Art des Bergzeichnens eingeführt. In Fig. 491

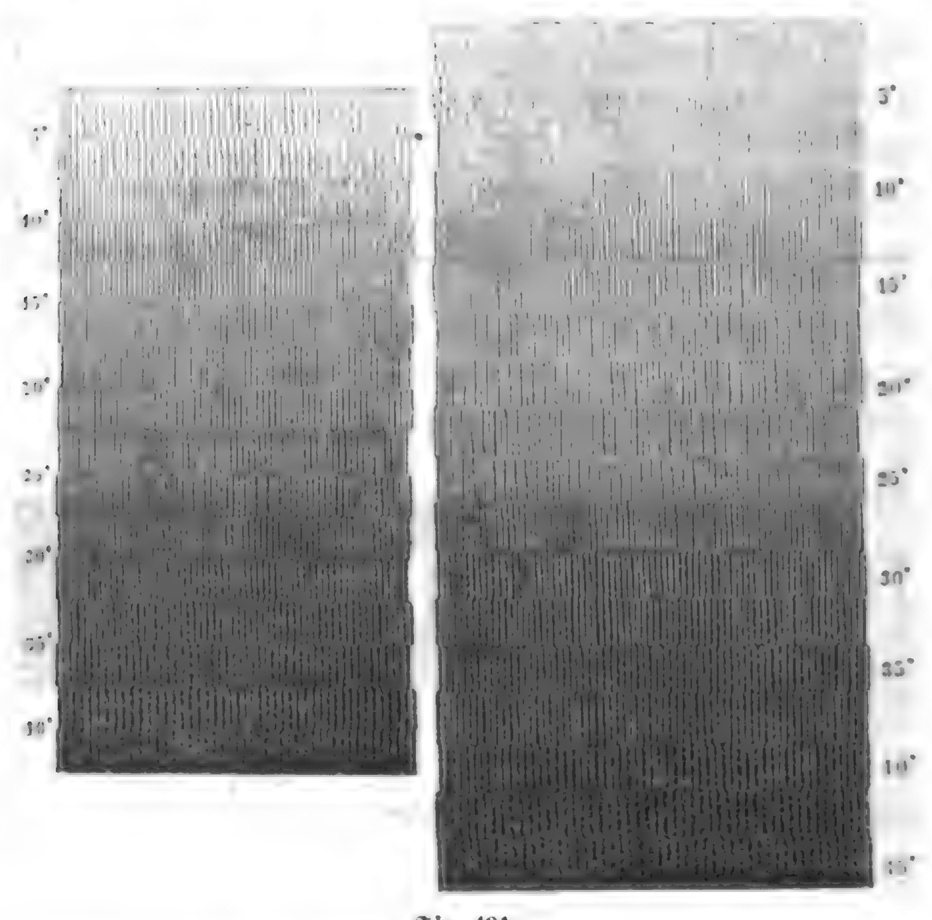


Fig. 491.

sind die Hauptgradationen in Müffling'scher, der sogenannten Generalstabsmanier, neben die Lehmann'sche Zeichnungsweise gestellt. Für den preußischen Generalstab ist bestimmt: in topographischen Karten sollen, bei einem Maßstabe von 1 : 20000 40 Striche den Raum von 1 Decimalzoll füllen, bei einem Maßstabe von 1 : 25000 50 Striche, bei einem Maßstabe von 1 : 50000 aber 100 Striche. Bei allen Arbeiten, welche in einem kleinern Maßstabe als 1 : 50000 ausgeführt werden, sollen nur die Bergstriche von 5° und 10° in Generalstabsmanier, alle andern in Lehmann'scher Manier ausgeführt werden.

§. 389. Stellt AB (Fig. 492) den überall gleich geneigten Abhang, AC die Basis, BC die senkrechte Höhe eines Berges vor, alles im senkrechten Durchschnitt, und ist α der Neigungs- oder Böschungswinkel, so ist das Dreieck

ABC ein eigentliches Profil des Berges; soll dieser im Grundrisse dargestellt werden, so wird AB auf AC projicirt; die Projection wird = AC, und die Beleuchtung oder das Verhältniß zwischen Schwarz und Weiß bestimmt sich durch die Größe des Böschungswinkels α. Die Länge der Bergstriche muß also bei einer stetig geböschten Anhöhe stets so groß sein als die Horizontalprojection eines senkrechten Durchschnitts des Abhangs, nach dem Maßstabe der Karte. Schließt sich an BA ein anderer Abhang AD mit einem andern Böschungswinkel β, so gelten hierfür wieder dieselben Schlüsse, die Bergstriche erhalten hier die Länge DE und Licht und Schatten werden dem Winkel β gemäß. Haben zwei Abhänge Bergstriche von gleicher Länge, so entspricht die dunklere Zeichnung dem steilern, die hellere dem flachern Abhange. Die Länge der Bergstriche wird durch den Ausdruck:

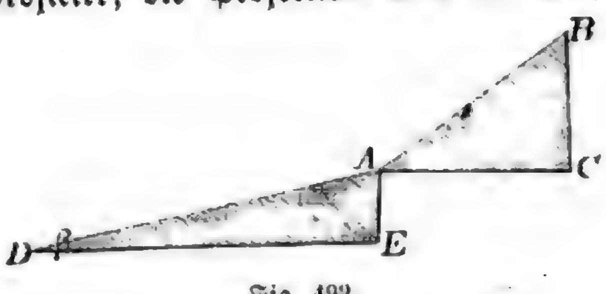


Fig. 492.

$$\lambda = h \cdot \text{cotg}\ \alpha$$

bezeichnet, wenn h die Höhe (BC) des Abhangs ist. Ist also bei einem andern Abhange die Höhe h dieselbe, so ist:

$$\lambda' = h \cdot \text{cotg}\ \alpha',$$

folglich:

$$\lambda : \lambda' = \text{cotg}\ \alpha : \text{cotg}\ \alpha'$$

oder:

$$\lambda : \lambda' = \text{tg}\ \alpha' : \text{tg}\ \alpha,$$

d. h. die Länge der Bergstriche verhält sich bei gleicher Höhe der Abhänge umgekehrt wie die Tangenten der Böschungswinkel.

Haben die Abhänge gleiche Länge c, so ist:

$$\lambda = c \cdot \cos\ \alpha$$

und

$$\lambda' = c \cdot \cos\ \alpha',$$

also

$$\lambda : \lambda' = \cos\ \alpha : \cos\ \alpha'.$$

Bei gleicher Länge der Abhänge verhalten sich die Längen der Bergstriche wie die Cosinus der Böschungswinkel.

Sind endlich die Böschungswinkel zweier Abhänge einander gleich, so verhalten sich die Bergstriche wie die Längen der Abhänge,

$$\lambda : \lambda' = c : c'.$$

§. 390. Die Länge der Bergstriche läßt sich nun vermittelst des sogenannten **Böschungsmessers** (Fig. 493) auch ohne Rechnung, durch eine einfache Construction finden. Man ziehe eine horizontale Gerade AB, in A errichte man ein Loth AX auf AB und trage an AB die Hauptneigungen von 5°, 10°, 15° .... bis 45° vom Punkte A aus an; trage dann auf AX die Höhe der Horizontalschicht AC auf, ziehe CD parallel AB, so stellt z. B. AE den Abhang von 20° für die Schichthöhe AC vor; also ist dann

CE, als Projection von AE, die Strichlänge; ebenso ist CF die Strichlänge bei 15° Böschung und der Schichthöhe AC; die Schichthöhe AC′ würde für dieselben Böschungen beziehlich die Strichlängen C′E′ und C′F′ geben.

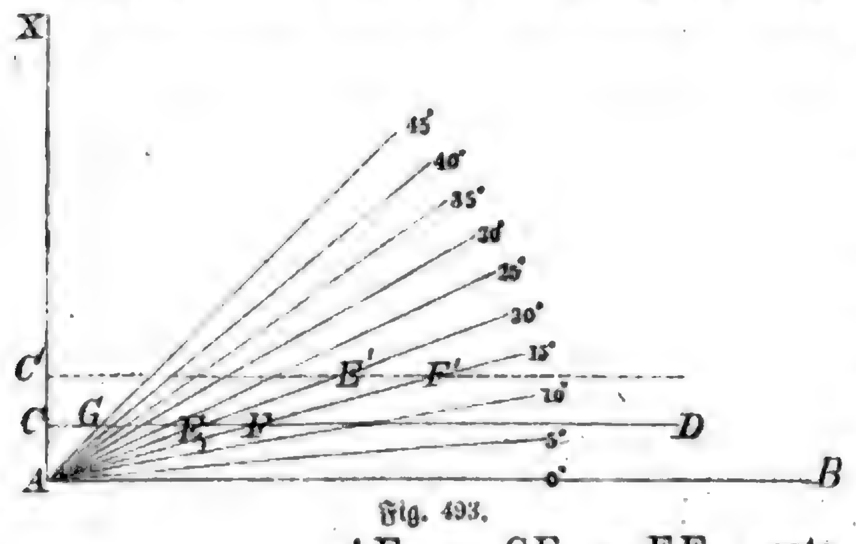


Fig. 493.

Zieht man noch EE_1 senkrecht auf AB und nennt α den Böschungswinkel EAB, so ist:

$$AE_1 = CE = EE_1 \cdot \operatorname{cotg} \alpha,$$

d. h. die Strichlänge ist der Höhe der Schicht und der Cotangente des Böschungswinkels direct proportional. Berechnet man hiernach die Strichlängen für die Hauptböschungswinkel von 5 zu 5°, so findet sich, wenn man die Strichlänge für 5° Böschung gleich 1 setzt:

Böschung: 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°.
Strichlänge: 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{11}$.

Da für 45° (Fig. 493) AC = CG, so ist die Strichlänge für 45° gleich der Höhe der Horizontalschicht, d. h. gleich dem verticalen Abstande der beiden die Schicht begrenzenden Niveaucurven.

Setzt man also die Schichthöhe = 1, so erhält man folgende Scala:

Böschung: 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°.
Strichlänge: 11, $5^1/_2$, $3^2/_3$, $2^3/_4$, $2^1/_5$, $1^4/_7$, $1^3/_8$, $1^2/_9$, 1.

Aus der bekannten Strichlänge und der Höhe der Horizontalschicht kann man nun auch leicht den Böschungswinkel finden, und zwar:

1) Durch Construction. Wenn man die Schichthöhe auf dem Böschungsmesser aufträgt, z. B. AC (Fig. 493), durch C die CD ∥ AB zieht, darauf die gegebene Strichlänge von C aus abträgt, so trifft der andere Endpunkt dieser Linie den Schenkel des gesuchten Böschungswinkels, z. B. E oder F den Schenkel von 25° oder 15°.

2) Durch Rechnung. Ist die Strichlänge a für 20° bekannt, und x die Schichthöhe, so ist:

$$x : a = {}^1/_{11} : {}^1/_4$$
$$x = {}^4/_{11} \cdot a.$$

§. 391. Ein Bergabhang kann in verticaler Dimension entweder stetig, oder concav, oder convex geböscht sein. Er ist stetig geböscht (Fig. 494), wenn der Böschungswinkel überall derselbe bleibt; concav (Fig. 495), wenn der Böschungswinkel von oben nach unten abnimmt; convex, wenn, wie in

Fig. 496, der Böschungswinkel von oben nach unten zunimmt. Gewöhnlich kommen diese drei Formen in Verbindung mit einander vor. Einen Abhang

Fig. 494.

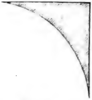


Fig. 495.

Fig. 496.

mit stetigem Böschungswinkel zeichnet man, indem man die Länge c des Abhangs und den Böschungswinkel α mißt, die Bergstriche $= c \cdot \cos \alpha$, oder gleich der Horizontalprojection des Abhangs macht und ihnen das nach dem Verhältniß $\frac{\alpha}{45 - \alpha}$ erforderliche Licht gibt. Ihre Richtung ist allemal die Richtung eines durch ihren obern Anfangspunkt geführten und gegen die horizontale Begrenzung des Abhangs senkrechten Verticaldurchschnitts. Es ist dies die Richtung des stärksten Abfalls oder des natürlichen Wasserlaufs.

Um einen Abhang mit nach verticaler Dimension veränderlichem Böschungswinkel zu zeichnen, theilt man ihn durch horizontale Ebenen (Niveaucurven) in Schichten mit stetigem Böschungswinkel und zeichnet jede Schicht für sich in der Lage, wie der Grundriß es vorschreibt. Die Horizontalen oder Niveaucurven aber verschafft man sich natürlich durch eine besondere Aufnahme, die am bequemsten mit dem Meßtische ausgeführt wird, nachdem man mittels eines Nivellirinstruments die Horizontalen abgesteckt hat.

Untersucht man dann die Böschungen zwischen je zwei auf einander folgenden Niveaucurven, so wird man in der horizontalen Ausdehnung des Abhangs folgende verschiedene Formen finden, die in den mannichfaltigsten Combinationen vorkommen:

1) Die Horizontalen sind gerade und die Böschungen zwischen ihnen bleiben unverändert dieselben (Fig. 497); die Bergstriche sind, da sie stets senkrecht gegen beide Horizontalen liegen müssen, gerade, parallel und von gleicher Länge.

Fig. 497.

2) Die Horizontalen sind krumm und die Böschungen bleiben dieselben (Fig. 498); die Bergstriche sind gerade, von gleicher Länge, aber divergent.

Fig. 498.

3) Die Horizontalen sind gerade, aber der Böschungswinkel ändert sich (Fig. 499); die Bergstriche sind krumm, von ungleicher Länge, aber unter sich parallel.

Fig. 499. Fig. 500.

4) Die Horizontalen sind krumm und der Böschungswinkel ändert sich (Fig. 500); die Bergstriche sind krumm, divergirend und von ungleicher Länge.

Bei der Aufnahme der Horizontalen werden sämmtliche Böschungswinkel gemessen und an der betreffenden Stelle mit Blei in die Zeichnung eingetragen, um nachher beim Auszeichnen der Bergstriche an ihnen die nöthige Leitung zu haben.

§. 392. Sind zwei Bergabhänge gegen einander geneigt, so entsteht zwischen beiden eine Einsenkung, die man eine Schlucht nennt. Die beiden Abhänge heißen die Seiten oder Wände der Schlucht, die Linie, in der sie zusammenstoßen, die Schluchtlinie.

Es stelle AB (Fig. 501) eine Schluchtlinie vor, C einen Punkt des Abhangs auf der einen, D einen Punkt des Abhangs auf der andern Seite, beide mit B in einer Höhe, so daß BC, BD Horizontalen sind, während AC'B'D' die horizontale Projectionsebene vorstellt. Von C ziehe man senkrecht zur Horizontalen BC die Böschungslinie CA, von D senkrecht zur Horizontalen BD die Böschungslinie DA, projicire dann die Schluchtlinie AB und die beiden Böschungslinien CA, DA auf die Horizontalebene AC'B'D': AB' sei die Horizontalprojection von AB, AC' die von AC, AD' die von AD; es sei ferner der Neigungswinkel der Schluchtlinie BAB' $= \alpha$, der Böschungswinkel des Abhangs links CAC' $= \gamma$, der des Abhangs rechts DAD' $= \delta$; h sei der gegenseitige verticale Abstand der beiden Horizontalebenen, nämlich h $=$ BB' $=$ CC' $=$ DD'; endlich sei noch μ der Winkel, welchen die Projection AC' der Böschungslinie AC mit der Projection der

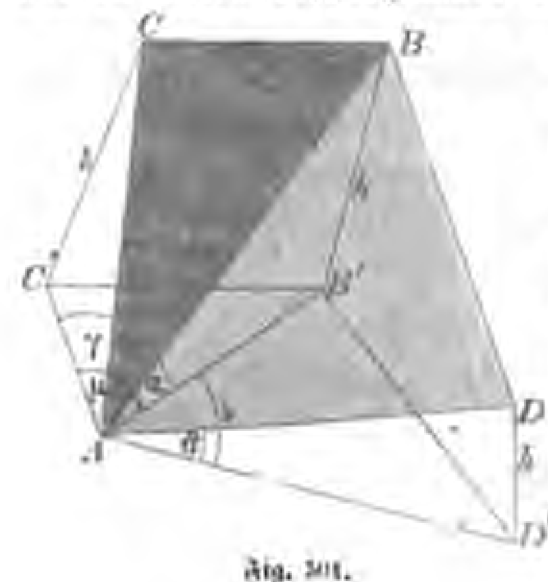


Fig. 501.

Schluchtlinie macht, also $\mu = B'AC'$, und ν der entsprechende Winkel $B'AD'$ auf der andern Seite; so sind μ und ν die Winkel, welche die Bergstriche mit der Projection der Schluchtlinie machen, da die Bergstriche ja nichts anderes sind als die Projectionen der Böschungslinien.

Nun sind die Dreiecke ABB', ACC', ADD' beziehlich bei B', C', D' rechtwinkelig, daher ist:

$$h = AB' \cdot \operatorname{tg} \alpha = AC' \cdot \operatorname{tg} \gamma = AD' \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Ferner sind die Dreiecke $AB'C'$ und $AB'D'$ bei C', D' rechtwinkelig und es ist W. $B'AC' = \mu$, $B'AD' = \nu$, also:

$$AC' = AB' \cdot \cos \mu \quad \text{und } AD' = AB' \cdot \cos \nu.$$

Diese Werthe in die obigen Ausdrücke eingesetzt, liefern:

$$h = AB' \cdot \operatorname{tg} \alpha = AB' \cdot \cos \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma = AB' \cdot \cos \nu \cdot \operatorname{tg} \delta,$$

d. h. $\operatorname{tg} \alpha = \cos \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma = \cos \nu \cdot \operatorname{tg} \delta$.

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun die Gesetze für die Lage der Bergstriche in Schluchten ableiten, und umgekehrt, aus der Lage der Bergstriche läßt sich mittels derselben die Beschaffenheit der Schlucht finden.

1) Es sei die Schluchtlinie horizontal, so ist $\alpha = 0$, also auch $\operatorname{tg} \alpha = 0$, folglich $\cos \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma = 0$. Da γ nicht 0 sein kann, weil sonst von keinem Abhange die Rede sein könnte, so muß $\cos \mu = 0$, also, weil hier nur Winkel unter 180° vorkommen können, $\mu = 90°$ sein, d. h.: wenn die Schluchtlinie horizontal ist, so stehen die Bergstriche senkrecht zur Projection der Schluchtlinie.

2) Umgekehrt, stehen die Bergstriche senkrecht zur Projection der Schluchtlinie, so ist letztere horizontal; denn dann ist $\mu = 90°$, $\cos \mu = 0$, $\cos \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma = 0$, also $\operatorname{tg} \alpha = 0$ und $\alpha = 0$.

3) Ist die Schluchtlinie gegen den Horizont geneigt, so daß α ein positiver spitzer Winkel ist, die Schluchtlinie also von A aus ansteigt, so ist $\operatorname{tg} \alpha$ positiv; da γ immer spitz, also $\operatorname{tg} \gamma$ immer positiv sein muß, so muß $\cos \mu$ auch positiv, also μ spitz sein. Nach der Seite hin, nach welcher die Schlucht ansteigt, bildet jeder Bergstrich mit der Projection der Schluchtlinie einen spitzen Winkel.

4) Sinkt die Schluchtlinie von A aus unter den Horizont von A, so ist W. α negativ, und da $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, γ aber immer ein positiver spitzer Winkel sein muß, so muß $\cos \mu$ negativ, also μ stumpf sein. Nach der Seite hin, wo die Schluchtlinie abfällt, bildet jeder Bergstrich mit der Projection der Schluchtlinie einen stumpfen Winkel.

5) Und bildet ein Bergstrich mit der Projection der Schluchtlinie einerseits einen stumpfen, andererseits einen spitzen Winkel, ist also z. B. μ spitz, also sein Nebenwinkel stumpf, so ist $\cos \mu$ positiv; da $\operatorname{tg} \gamma$ immer positiv

Digitized by Google

sein muß, so ist tg α positiv, also α positiv und spitz; folglich steigt die Schluchtlinie nach der Seite hin an, nach welcher die Bergstriche spitze Winkel mit der Projection der Schluchtlinie machen.

6) Der Neigungswinkel der Schluchtlinie ist kleiner als jeder der Böschungswinkel der beiden Abhänge. Denn $\cos\mu$ ist ein echter Bruch, also $\cos\mu \cdot \operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\gamma$, d. h. $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\gamma$, folglich $\alpha < \gamma$. Ebenso findet sich $\alpha < \delta$. Oder: die rechtwinkeligen Dreiecke ABB' und ACC' haben $BB' = CC' = h$, aber die Hypotenuse AC in ACC' ist Kathete im Dreieck ABC, folglich $< AB$; daher ist W. $CAC' > BAB'$, d. h. $\gamma > \alpha$.

7) Je größer der Neigungswinkel der Schluchtlinie ist, desto schiefer stehen die Bergstriche zur Projection der Schluchtlinie, und umgekehrt. Denn je größer α, desto größer ist tg α, also auch $\cos\mu \cdot \operatorname{tg}\gamma$. Bleiben nun die Böschungswinkel der Abhänge, γ und δ, dieselben, so müssen mit wachsendem α auch $\cos\mu$ und $\cos\nu$ zunehmen, d. h. μ und ν abnehmen. Umgekehrt, je kleiner μ und ν, desto größer sind $\cos\mu$ und $\cos\nu$, also auch tg α und α selbst.

Hiernach wird man auch selbst in den complicirtesten Fällen im Stande sein, sowol die Bergstriche richtig anzulegen, als auch eine fertige Zeichnung zu beurtheilen und die Beschaffenheit des Terrains aus der Lage der Bergstriche zu erkennen. Wollte man z. B. bei gegebener Neigung der Schluchtlinie und gegebenem Böschungswinkel des Abhangs den Winkel finden, unter welchem die Bergstriche auf die Projection der Schluchtlinie treffen müssen, so hätte man:

$$\cos\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Wäre nun $\alpha = 16°$, $\gamma = 28°$, so wäre:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}\alpha &= 9{,}4574964 \\ \log \operatorname{tg}\gamma &= 9{,}7256744 \\ \hline \log\cos\mu &= 9{,}7318220 \\ \mu &= 57°\ 21'\ 53'', \end{aligned}$$

wofür natürlich 55° oder 60° genommen werden kann, da man beim Zeichnen die Richtungen der Bergstriche nicht nach einzelnen Graden abmessen kann.

B. Darstellung der Verticaldimensionen im Aufrisse. Berg- und Nivellementsprofile.

§. 393. Ist von einem erhabenen Gegenstande der Grundriß gegeben, so ist es leicht, daraus ein Profil herzustellen, wenn nur noch die Erhebung der wichtigsten Höhenpunkte über die Horizontalebene bekannt ist. Man zieht

eine gerade Linie durch den Grundriß in der Richtung, in welcher das Profil den Gegenstand darstellen soll, z. B. ab (Fig. 502), zieht dann irgendwo

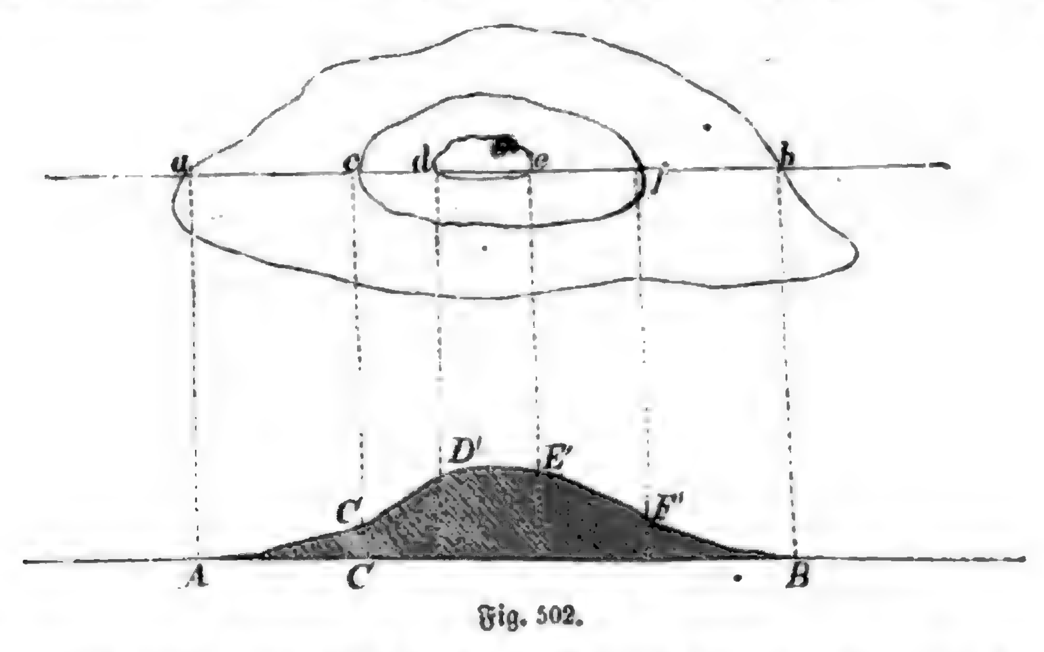


Fig. 502.

in der Ebene eine Parallele AB mit ab, und errichtet nun auf ab Lothe in allen Punkten, wo die Gerade ab Theile des Grundrisses trifft, verlängert diese Lothe bis zur Linie AB und schneidet auf jedem derselben von AB aus diejenige Höhe ab, welche dem zugehörigen Punkte des Grundrisses zukommt, z. B. CC′ gleich der Höhe des Punktes c, DD′ gleich der von d u. s. w., verbindet endlich die so gefundenen Punkte der verschiedenen Lothe, so ist die entstehende Figur AC′D′E′F′B das Profil des durch den Grundriß dargestellten Gegenstandes.

Die Höhen der verschiedenen Punkte des Grundrisses können entweder durch die Koten gegeben sein, oder aber erst aus der Zeichnung gefunden werden müssen, wie dies bei Grundrissen von Bergen, die mittels der Lehmann'schen Terrainzeichnung dargestellt sind, oft der Fall ist. Dann findet man aber aus dem Verhältniß von Licht und Schatten den Böschungswinkel nach §. 388, aus diesem und der Strichlänge aber die Höhe der Horizontalschicht mittels der Gleichung $h = \lambda \cdot tg\ \alpha$. In derselben Weise findet man die Höhe aller Schichten, in welche der Berg bei der Aufnahme zerlegt wurde, und ihre Summe gibt dann die Höhe des Bergs.

§. 394. Um ein Nivellementsprofil zu zeichnen, ziehe man eine Horizontale, die sogenannte Haupthorizontale, so hoch über dem Anfangspunkte des Profils, daß womöglich alle Punkte des Profils unter diese Linie fallen. Auf dieser Linie XY (Fig. 503) trage man vom Nullpunkte aus die Horizontalprojectionen der Stationslängen auf, bezeichne die Stationen mit römischen Ziffern und schreibe in ihre Längenprojectionen die Zahl Längeneinheiten aus der Nivellementstabelle. In den Endpunkten der Stationen errichte man Normalen und bestimme in der ersten dieser Normalen (im Null-

punkte) den Abstand der Haupthorizontalen vom Anfangspunkte des Profils nach dem Maßstabe; um diese Größe vermehre man alle Gefälle in der Ni-

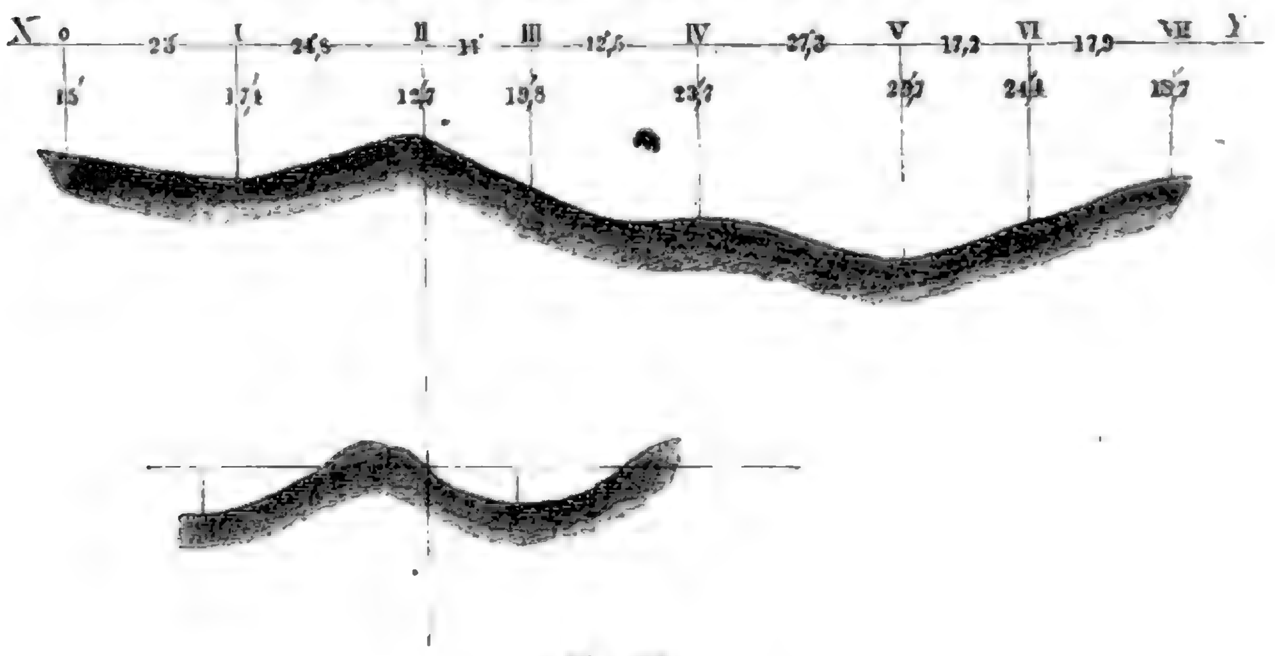


Fig. 503.

vellementstabelle, trage dann die so veränderten Gefälle von der Haupthorizontalen aus auf die betreffenden Normalen und verbinde die so bezeichneten Punkte durch Linien, so ist die so entstehende Linie das Längenprofil des Nivellements. Es leuchtet ein, daß, wenn man Steigungen austrüge statt der Gefälle, die Höhe der Haupthorizontalen über dem Nullpunkte in jedem Stationspunkte um die der Station zukommende Steigung vermindert werden müßte. Bemerkt man also Gefälle mit +, Steigungen mit —, so bleibt immer die oben gegebene Regel gültig, daß jedes Gefälle, mag es ein positives oder negatives, ein wirkliches Gefälle oder eine Steigung sein, stets um die Höhe der Haupthorizontalen vermehrt werden muß.

§. 395. Ebenso verfährt man beim Auftragen der Querprofile. Die Querprofile zeichnet man so unter das Längenprofil, daß die Horizontale des Querprofils die nach unten verlängerte Ordinate desjenigen Punktes des Längenprofils, in welchem das Querprofil genommen wurde, senkrecht durchschneidet. Der Durchschnittspunkt jener Ordinate mit der Horizontalen des Querprofils ist der Nullpunkt des letztern, von wo aus nach rechts und links hin die zugehörigen Abscissen und auf diesen wieder die Ordinaten des Querprofils aufgetragen werden, wie Fig. 503 dies zeigt. Alle Abscissen und Ordinaten werden mit den Zahlen, die ihre Längen nach dem Maßstabe ausdrücken, bezeichnet.

§. 396. Für das Auftragen sämmtlicher Nivellementsprofile ist jedoch noch zu bemerken, daß man die Längen und Höhen nicht nach demselben Maßstabe aufträgt. Die Höhenunterschiede oder Ordinaten sind in der Regel im Verhältniß zu den Längen oder Abscissen nur klein, sollen aber dennoch aus

dem Profil bis auf $1/2$ Zoll genau abgenommen werden können. Als Maßstab der Abscissen dient gewöhnlich $1/_{2500}$ der natürlichen Größe, während der der Ordinaten wenigstens 10 Mal größer ist. Das Profil erhält zwar dadurch eine verzerrte Gestalt und ist der Natur nicht ähnlich; aber wenn man die Abscissen in einem ebenso großen Maßstabe darstellen wollte wie die Ordinaten, so würde die Karte eine höchst unbequeme Länge bekommen, während die geforderte Genauigkeit, behufs der auf ein solches Profil zu gründenden Erdarbeiten, für die Ordinaten keinen kleinern Maßstab zuläßt.

Das so verzeichnete Profil wird mit schwarzer Tusche nachgezogen und mit brauner Farbe verwaschen, wenn Erde dargestellt werden soll; bei Profilen von Flüssen und Wassergräben bedient man sich der blauen Farbe.

Anhang.

I.

Das Polarplanimeter von Amsler.

Lange schon war man bemüht, Instrumente zu erfinden, mittels deren der Inhalt ebener Figuren auf blos mechanischem Wege gefunden werden könnte. Die bisherigen Instrumente dieser Art, **Planimeter** genannt, waren aber theils unzutreffend, oder im Preise so hoch, daß deren Anschaffung bedeutende Mittel in Anspruch nahm. Ich habe deshalb keins derselben beschrieben. Während des Drucks meines Buches nun wurde ich durch wohlwollende Freunde auf ein neues Planimeter von **Amsler** aufmerksam gemacht, das mit der Einfachheit im Bau große Genauigkeit und sehr geringen Preis (15—16 Thlr. Courant) verbindet. Dies bestimmte mich, dasselbe noch in einem Anhange zu beschreiben.

Die Fig. 504 gibt eine perspectivische Ansicht des Planimeters von Amsler. Es besteht aus einem Rahmen H, in welchem sich die stählerne Laufrolle D an einer Achse bewegt. Der obere Theil H dieses Rahmens nimmt in seiner

Fig. 504.

gleichgestalteten Höhlung ein vierkantiges Lineal A auf, welches am Ende den sogenannten Fahrstift F trägt; das Lineal A bewegt sich in der Hülse H mit Reibung; die Hülse ist an beiden Enden eingeschnitten und die so gebildeten Lappen dienen als Federn, um die Reibung zu vermehren und die Stellung des Lineals sicherer zu machen. An dem Ende m trägt der Rahmen die zu H und A rechtwinkelige, drehbare Achse C, mit der ein zweites Lineal B

Digitized by Google

verbunden ist, das an seinem Ende den Nadeleinsatz E trägt. Oben auf dem Lineale A sind einige Querstriche angebracht, welche anzeigen, wie weit das Lineal in die Hülse geschoben werden muß, damit das Instrument den gesuchten Inhalt einer Figur nach einem gewissen Maßstabe angebe; an der Seitenfläche desselben Lineals stehen noch einige Zahlen, jenen Strichen entsprechend; diese müssen unter gewissen, noch anzugebenden Umständen, zu den Angaben des Instruments addirt werden. Die Achse der Rolle ist parallel mit der Verticalebene, welche durch die Mitte der Achse C und durch die Spitze des Fahrstifts F geht. Der äußerste Rand der Rolle D steht etwas über die übrige, cylindrische Fläche derselben hervor, ist abgerundet und polirt; die cylindrische Fläche bildet einen in 100 oder 200 Grade getheilten Limbus. Der Stand der Theilung kann mittels des an der Hülse H angebrachten Nonius O bis auf $^1/_{10}$-Grade abgelesen werden. Die Zahl der ganzen Umdrehungen der Rolle D wird durch das Rädchen G gezählt; dieses wird mittels eines an seiner senkrechten Achse angebrachten Triebes durch einige in die Achse der Rolle D geschnittene Schraubengänge in Bewegung gesetzt. Während jeder Messung behält das Lineal A in seiner Hülse H eine unveränderliche Stellung, und muß natürlich für jede andere Maßeinheit, die man der Messung zu Grunde legt, anders gestellt werden.

Um den Flächeninhalt einer Figur in irgend einer auf dem Lineal A angegebenen Einheit zu finden, verschiebt man das Lineal in seiner Hülse so, daß der Strich auf der obern Fläche des Lineals A, bei welchem die verlangte Maßeinheit bemerkt ist, mit der Kante m der Hülse H coincidirt. Dann setzt man das Instrument so auf die Ebene der Zeichnung, daß es mit der Spitze E, dem Fahrstifte F und der Rolle D aufsteht, drückt den Nadeleinsatz E ins Papier ein, so daß er während der ganzen übrigen Operation an derselben Stelle festsitzt, weshalb denn der Punkt E auch der P o l heißt, setzt den Stift F auf einen beliebigen, aber genau bezeichneten Punkt des Umfangs Z der Figur und notirt den Stand der Scheibe G und der Rolle D, wobei zu beachten, daß, wenn z. B. der Index von G auf 7, der Nonius O der Rolle auf 34,8 steht, 7,348 aufzuschreiben ist. Nun verfolgt man den Umfang der Figur mit der Spitze des Fahrstifts F von links nach rechts, in dem Sinne der Zeiger einer Uhr, bis man auf den Ausgangspunkt zurückkommt, wo man dann abermals von G und D abliest; befindet sich die Spitze E a u ß e r h a l b der umfahrenen Figur, so drückt der Unterschied, den man durch Subtraction der ersten Ablesung von der zweiten erhält, den Inhalt der umfahrenen Figur in derjenigen Flächeneinheit aus, auf welche das Lineal eingestellt ist. Befindet sich dagegen die Spitze E i n n e r h a l b der umfahrenen Figur, so hat man zu dem auf die oben angegebene Weise bestimmten Unterschiede noch eine Zahl hinzuzuaddiren, welche (wie oben bemerkt) auf der

Seitenfläche des Lineals A, zunächst bei dem auf m eingestellten Theilstrich gravirt ist. Bei den vom Erfinder selbst ausgegebenen Planimetern stehen auf dem Lineal A als Flächeneinheiten verzeichnet 1 □ Decim., 0,1 □′ engl., 0,1 □′ schweiz., 10 □″ engl., 5 □″ schweiz. Die an der vordern Seitenfläche stehenden Zahlen sind die erwähnten Hülfszahlen. Der Verfertiger kann aber durch sorgfältig angestellte Versuche den Ort der Einstellung für jedes andere Maß ebenso gut auffinden und auf dem Instrumente bemerken. Befindet sich die Spitze E außerhalb der Figur, so ist die zweite Ablesung größer als die erste und der nach der oben gegebenen Vorschrift berechnete Unterschied wird eine positive Zahl. Liegt dagegen E innerhalb, so kann jener Unterschied negativ werden, und man hat dann bei der Addition der Hülfszahl auf diesen Umstand zu achten.

Theorie des Polarplanimeters.*)

In den Figuren 505 und 506 bezeichne F die Spitze des Fahrstifts, E die Nadelspitze, C den Punkt, in welchem die verlängerte Achse C des Instruments (Fig. 504) die Zeichenebene treffen würde, D den Punkt, in welchem die Laufrolle das Papier berührt, CF = r die während einer Messung con-

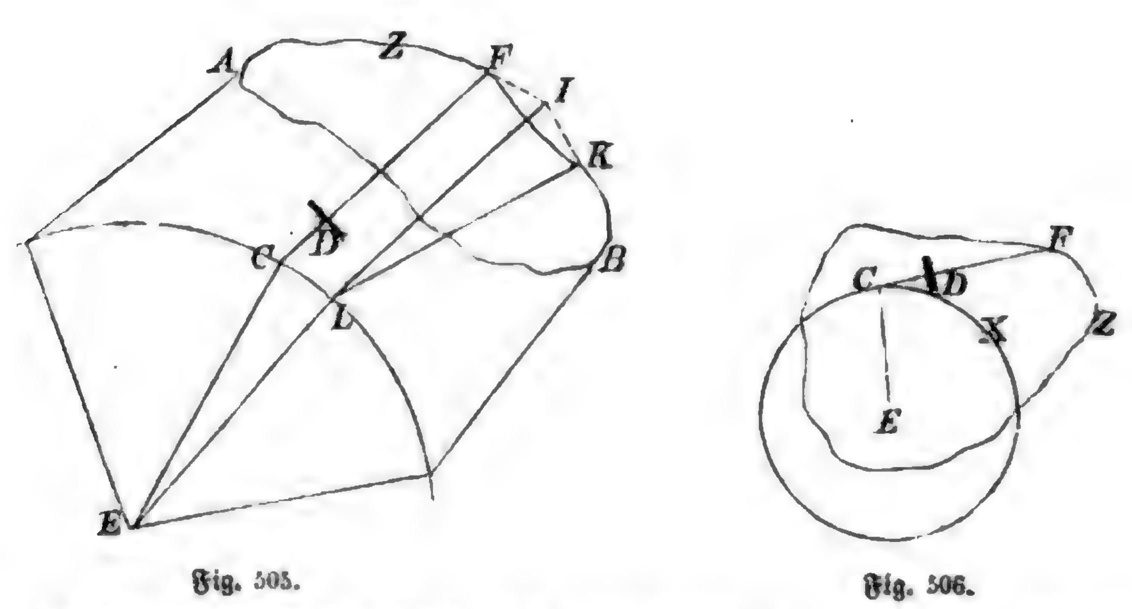


Fig. 505. Fig. 506.

stante Entfernung des Fahrstifts vom Drehpunkte C, CE = R die gleichfalls constante Entfernung des Drehpunktes C vom Pol E.

*) Es mag hier diese Theorie in der elementaren Weise, wie Amsler selbst sie gegeben, behandelt werden, da es mir an Raum fehlt, die zu der gründlichern Durchführung mittels der Differential- und Integralrechnung für den Anfänger durchaus nöthigen Vorkenntnisse dieser Rechnungen ausführlich zu geben, wiewol diese Behandlungsweise, abgesehen von den vorbereitenden Lehren, kürzer ausgefallen wäre.

Umschreibt der Punkt F eine geschlossene Curve Z, so beschreibt der Punkt C einen Kreisbogen oder einen ganzen Kreis, je nachdem der Pol E außerhalb oder innerhalb der Curve liegt.

Erster Fall. Der Pol liegt außerhalb der von F umschriebenen Curve (Fig. 505). Wenn der Punkt F den ganzen Umfang der Curve Z durchlaufen hat, so befindet sich die Gerade CF wieder in ihrer anfänglichen Lage, und während dieser Bewegung hat CF jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal oder eine ungerade Anzahl Mal getroffen, dagegen jeden äußern Punkt entweder gar nicht oder eine gerade Anzahl Mal.

Es seien CF und LK zwei auf einander folgende Lagen der Geraden; man kann sich vorstellen, CF sei in die Lage LK gelangt, indem sie erst in die mit CF parallele Lage LI übergegangen und dann sich durch eine Drehung um den Punkt L von der Lage LI in die andere LK begeben habe. Das Flächenelement CFKL kann also als Summe eines Parallelogramms CFIL und eines Sectors LIK betrachtet werden, wo jedoch die Summe im algebraischen Sinne zu verstehen ist, weil beide Flächen auch subtractiv können in Rechnung gebracht werden müssen. Der Inhalt des Parallelogramms heiße p, der des Sectors s. Die Größe p werde als positiv betrachtet, wenn sie bezüglich des Pols E jenseit der in C an den von C beschriebenen Kreisbogen gelegten Tangente liegt, und wenn überdies der Punkt L, von E aus gesehen, rechts von C erscheint; der Sector s werde als positiv angesehen, wenn die Gerade EL in die nachfolgende Lage durch eine Drehung von links nach rechts gelangt.

Jedes durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden CF und durch die von ihren Endpunkten durchlaufenen Bogen begrenzte Flächenelement kann ebenso, wie mit CFKL geschehen, in ein Parallelogramm p und einen Sector verwandelt werden. Bezeichnen wir nun, ähnlich wie §. 283, mit S [p] die Summe aller so durchlaufenen Parallelogramme, mit S [s] die Summe aller Sectoren, so bezeichnet die Summe

$$S\,[p] + S\,[s],$$

wenn man sie auf den ganzen von CF durchlaufenen Raum bezieht, den Flächeninhalt der von der Curve Z begrenzten, also vom Fahrstift F umlaufenen Figur, da, nachdem der Stift den Theil AFB der Curve durchlaufen hat und von B aus durch den noch übrigen Theil nach A zurückkehrt, der ganze außerhalb Z liegende Raum, der bisher positiv in Rechnung kam, bei der rückkehrenden Bewegung als negativer Ausdruck auftritt. Dasselbe ist der Fall bei jeder beliebigen Gestalt der Figur Z, weil jeder innerhalb Z liegende Punkt eine ungerade, jeder außerhalb liegende eine gerade Anzahl Mal befahren wird, letzterer also aufgehoben wird, weil die Hälfte aller Bewegungen

stets retrograd ist. Man hat demnach, wenn I den Inhalt der Curve Z bezeichnet,

$$I = S[p] + S[s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ist nun mit der Geraden CF die Rolle D verbunden, deren Achse parallel mit CF ist, so kann man die Bewegung der Rolle bei dem Uebergang der Geraden CF in die Lage LK ebenfalls in zwei Bewegungen zerlegen, eine in der Richtung der Achse CF, eine andere senkrecht darauf; bei jener wird sie blos gleiten, bei dieser rollen. Der von der Rolle abgewickelte Bogen ist daher stets gleich dem senkrechten Abstande beider Lagen der Geraden CF, welche die Achse zu Anfang und am Ende der Bewegung annahm. Ist der vom Berührungspunkt der Rolle zurückgelegte Weg gerade und $= \omega$, ψ der Winkel, den die Richtung dieses Wegs mit der Richtung der Rollenachse bildet, h der Abstand und die Endlage der Achse, so ist

$$h = \omega \cdot \sin \psi.$$

Zerlegt man die Bewegung der Geraden aus der Lage CF in die Lage LK in eine parallele Verschiebung aus CF in LI und eine Drehung aus der Lage LI in die Lage LK, so wickelt die Rolle D bei ihrem Uebergang aus der Lage CF in die Lage LI einen Bogen $= h$ ab, der also gleich dem senkrechten Abstand der parallelen Linien CF und LI ist. Wenn dann die Gerade LI in die Lage LK übergeht, so beschreibt der Berührungspunkt D der Rolle einen Bogen $= \rho\varphi$, wo $\rho = CD$ ist und φ den Winkel ILK bezeichnet, um welche die Gerade LI sich gedreht hat; die Rolle wickelt daher den Bogen $\rho\varphi$ ab, und der ganze von der Rolle D bei ihrem Uebergang aus der Lage CF in die Lage LK abgewickelte Bogen ist $= h + \rho\varphi$. Während der Punkt F die ganze Curve Z durchläuft, wickelt also die Rolle D den Bogen

$$u = S[h] + S[\rho\varphi] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ab, wo h mit p, und φ mit s zugleich positiv oder negativ ist.

Liegt der Pol E außerhalb der Curve Z, so hat die Gerade CF, nachdem sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, gleiche Drehungen in positivem und negativem Sinne ausgeführt; die Summe ihrer Drehungen, d. h. die Größe S [s] ist also gleich Null, und die Gleichung (1) geht über in

$$I = S[p] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus gleichem Grunde wird in der Gleichung (2)

$$S[\rho\varphi] = \rho \cdot S[\varphi] = o,$$

und die Gleichung (2) geht über in

$$u = S[h] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nun bezeichnet aber u die algebraische Summe der Höhen h aller Parallelogramme p, deren Basis die constante Linie CF $= r$ ist; für jedes einzelne Parallelogramm ist also $p = rh$, und für die ganze Curve Z:

$$ru = r \cdot S\,[h] = S\,[rh], \text{ oder}$$
$$ru = S\,[p].$$

Also ist denn nach (3):

$$I = ru \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Folglich ist die von dem Punkte F umschriebene Fläche gleich einem Rechtecke, welches die constante Länge r der beweglichen Geraden CF zur Grundlinie, den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat.

Zweiter Fall. Der Pol E liegt innerhalb der Curve Z (Fig. 506). Hier macht die Gerade CF eine ganze Umdrehung, ehe sie in ihre Anfangslage zurückkehrt, statt daß sie im ersten Falle gleiche Drehungen in positivem und negativem Sinne ausführt. Die von den Punkten F und C durchlaufenen Curven Z und X (welches letztere, X, eine Kreislinie ist) zerlegen die Zeichenebene in Flächen von zweierlei Art: a) in Flächenstücke, welche von beiden Curven gleichzeitig eingeschlossen oder gleichzeitig ausgeschlossen werden, und b) in Flächenstücke, welche von der einen Curve aus-, von der andern eingeschlossen werden, also vollständig begrenzt sind.

Die Punkte in den Flächenräumen der ersten Art werden offenbar von der beweglichen Geraden CF entweder gar nicht, oder eine gerade Anzahl Mal, die Punkte in den Flächenräumen der zweiten Art eine ungerade Anzahl Mal durchlaufen. Die durch S [p] + S [s] bezeichnete Summe drückt also jetzt nicht mehr den Inhalt der Curve Z, sondern nur die Summe der Flächenräume der zweiten Art aus. Erinnert man sich aber des oben über das Vorzeichen der durchlaufenen Flächenräume Gesagten, so erscheinen die außerhalb der Kreislinie X liegenden Flächenstücke als positive, die im Kreise liegenden als negative Summanden; d. h. die Summe S [p] + S [s] ist in diesem Falle die Differenz der von den Curven Z und X begrenzten Flächen. Bezeichnet also I wieder den Inhalt von Z, und ist R = CE der Radius des Kreises X, so ist:

$$I - R^2\pi = S\,[p] + S\,[s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

während die Gleichung (2) auch für den vorliegenden Fall bei Bestand bleibt.

Da die Gerade r = CF eine ganze Umdrehung macht, ehe sie in ihre Anfangslage zurückkehrt, so ist die algebraische Summe aller nach einander von ihr beschriebenen Sectoren ein Kreis vom Radius r; also ist dann

$$S\,[s] = r^2\pi$$

und
$$I - R^2\pi = r^2\pi + S\,[p] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Summe aller Drehungen macht hier, wo E innerhalb Z liegt, eine ganze Umdrehung; daher wird in der Gleichung (2) der Ausdruck

$$S\,[\rho\varphi] = \rho \cdot S\,[\varphi] = 2\rho\pi,$$

d. h. gleich dem Umfange eines Kreises vom Radius $\rho = CD$. Also geht dann Gleichung (2) über in:

$$u = S[h] + 2\rho\pi;$$

multiplicirt man mit $r = CF$, so kommt:

$$ru = S[rh] + 2r\rho\pi$$

oder

$$ru = S[p] + 2r\rho\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Eliminirt man in (7) die Größe $S[p]$ mittels (8), und löst dann nach I auf, so erhält man:

$$I = ru + (R^2 + r^2 - 2r\rho)\cdot\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ein von den Dimensionen des Instruments abhängiger constanter Factor; es läßt sich daher aus der Gleichung (9) das Gesetz herleiten: Befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrenen Fläche, so ist diese gleich der Summe einer Constanten und eines Rechtecks, dessen Basis $CF = r$ und dessen Höhe gleich dem von der Rolle abgewickelten Bogen ist.

Rücksichtlich der Eintheilung des Lineals A ist noch Folgendes zu merken. Soll eine ganze Umdrehung der Laufrolle D einem gegebenen Flächeninhalte, z. B. einer Quadratruthe entsprechen, so muß, wenn v der Umfang der Rolle ist,

$$rv = 1$$

also

$$r = \frac{1}{v}$$

sein, wo r und v in Ruthen ausgedrückt sind.

Die Constante $(R^2 + r^2 - 2r\rho)\,\pi$ ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius so gefunden wird: man bringe das Instrument in eine solche Stellung, daß die Ebene, welche den äußersten Umfang der Rolle D aufnimmt, erweitert durch die Spitze E geht; alsdann ist die Entfernung EF der fragliche Radius.

Um ein Planimeter zu prüfen, beschreibe man einen Kreis mit genau gemessenem Radius und berechne aus diesem den Inhalt; dann bestimme man den Inhalt desselben Kreises durch das Planimeter; der Unterschied beider Resultate dividirt durch den berechneten Inhalt, gibt den relativen Fehler des Instruments. Vielfache Versuche haben ergeben, daß der Fehler des beschriebenen Planimeters bei nur einigermaßen sorgfältiger Mechanik weit unter der erlaubten Fehlergrenze liegt und in der Regel nur $^1/_{1000}$ bis $^1/_{2000}$ beträgt, wonach denn eine besondere Justirung des Instruments kaum je nöthig sein dürfte.

Was die durch das Planimeter erzielte Zeitersparniß anlangt, so hat Bauernfeind Versuche darüber angestellt und gefunden, daß die Berechnung der Gesammtfläche einer vorliegenden Figur 2 Std. 40 Min. Zeit erforderte, die Inhaltsbestimmung durch das Planimeter 3 Min.; die einzelnen Parcellen

wurden in 4 Std. 33 Min. berechnet; das Planimeter gab die Flächen in 20 Min. Im ersten Falle bedurfte man also nur $^1/_{53}$, im letztern $^1/_{13}$ der zur Berechnung erforderlichen Zeit. Hierbei darf der Vortheil des Instruments nicht übersehen werden, den es rücksichtlich der geistigen Abspannung, die durch ein vier- bis fünfstündiges Rechnen herbeigeführt wird, leistet, da es diese ganz beseitigt.

II.

Der Orthograph von Pelz.

Der Kammercommissär Herr Pelz in Schwerin hat in jüngster Zeit ein höchst zweckmäßiges Instrument erfunden und von dem jungen und geschickten Mechaniker Krille daselbst anfertigen lassen, das dazu bestimmt ist, die Abscissen und Ordinaten gemessener Punkte ohne alle Zirkelmessung in den Plan zu tragen. Da es zum Auftragen senkrechter Linien dient, habe ich es unter Zustimmung des Erfinders Orthograph genannt.

Fig. 507 stellt den zugehörigen Maßstab in natürlicher Größe, aber nur mit wenigen Theilstrichen vor, Fig. 508 das Instrument selbst im Grundrisse, ebenfalls in natürlicher Größe, Fig. 509 im senkrechten Durchschnitt.

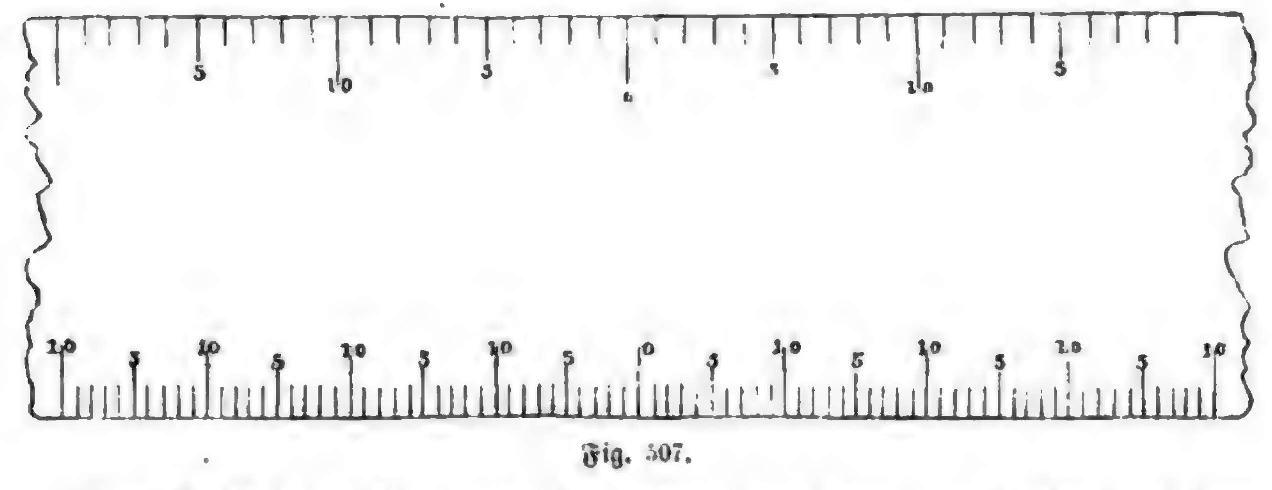


Fig. 507.

Der Maßstab enthält zwei Theilungen, eine von 10 Ruthen auf den Zoll, die andere von 20 Ruthen auf den Zoll, und ist in einzelne Ruthen getheilt, von 10° zu 10° und mit 50° und 100° beziffert und geht von der Mitte aus nach rechts und links hin, beiderseits bis 100°.

Das Instrument selbst besteht aus einer rechtwinkeligen Messingplatte a b c d; die Ränder a b, c d sind senkrecht abgeschnitten, b c und a d dagegen abgeschrägt, wie Fig. 509 zeigt. Die schraffirten Rechtecke e f g h sind Ausschnitte, so daß man durch sie hindurch das Papier der Zeichnung sehen kann, e f k i die Abschrägungen der Ränder e f dieser Ausschnitte; die Ausschnitte liegen

symmetrisch zu beiden Seiten der Mittellinie mn, so daß die beiden Kanten ef in diese Mittellinie fallen. Das Rechteck pqrs ist abermals ein Ausschnitt,

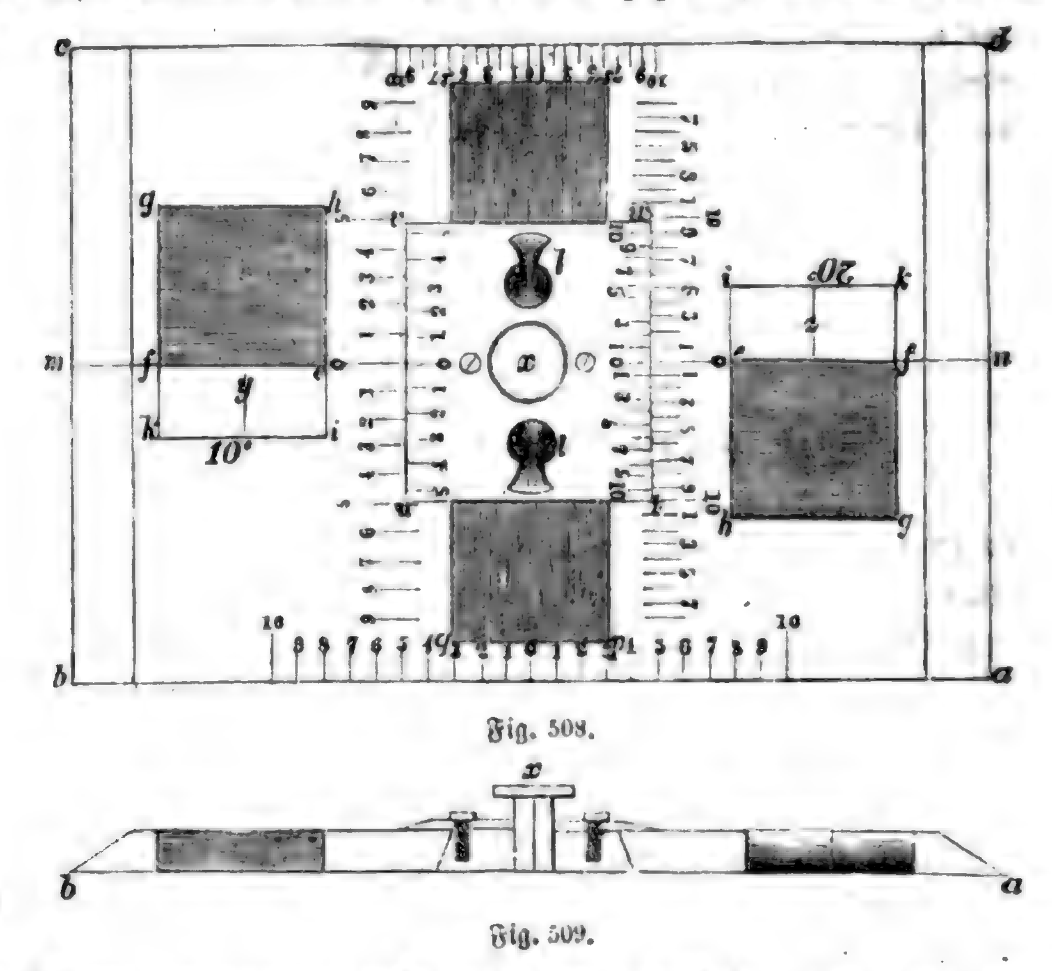


Fig. 508.

Fig. 509.

dessen Ränder ps und qr nach außen zu abgeschrägt sind (wie der Durchschnitt zeigt), um einen Schlitten tuvw aufzunehmen, der darin mit sanfter Bewegung von pq an bis rs und zurück geschoben werden kann; l, l sind zwei kleine Knöpfe, die als Griffe dienen; x ist der Knopf eines Stifts, der durch die Platte des Schlittens durchgeht, am untern Ende einen feinen Nadeleinsatz trägt, zwischen der obern Platte des Schlittens und dem Knopfe x aber eine Drahtfeder, welche ihn, wenn er sich selbst überlassen ist, so weit in die Höhe drückt, daß der Nadeleinsatz in die Höhlung zurücktritt und dem Verschieben des Instruments über das Papier nicht hinderlich ist; durch einen Druck mit dem Finger auf den Knopf x verursacht die Nadel eine Marke im Papier und steigt bei nachlassendem Drucke sogleich wieder in die Höhe. Der Rand ab trägt einen Nonius für den Maßstab 10° = 1″, der Rand cd einen Nonius für den Maßstab 20° = 1″; beide Nonien sind so eingerichtet, daß 10 Noniustheile = 9 Limbustheile. Dies sind die Abscissennonien. Neben uv und tw, zu beiden Seiten des Schlittens, den Seiten qr und ps des ausgeschnittenen Rechtecks entlang, sind die beiden Maßstäbe aufgetragen, einerseits 10° = 1″, andererseits 20° = 1″, von der Mittellinie mn aus mit 0 anfangend nach beiden Seiten. Der Schlitten selbst trägt beiderseits die Nonien zu diesen Maßstäben, für die Ordinaten. Die beiderseits bei ki

auf den abgeschrägten Flächen verzeichneten Striche y, z heißen die Inderstriche.

Um den Nonius nach 10° = 1″ an den Nullpunkt einer Linie zu bringen, werden die Inderstriche y und z so auf die gezogene Linie gelegt, daß der Inderstrich x (bei 10°) an dem Nullpunkte der Linie liegt; hierauf schiebt man den Maßstab (Fig. 507) vorsichtig an den Orthographen (Fig. 508) und zwar so, daß der Punkt 10 des Maßstabes an den Nullpunkt des Abscissennonius zu liegen kommt, führt dann den Orthographen so weit am Lineal entlang, bis der Nullpunkt des Abscissennonius mit dem Nullpunkte des Maßstabes zusammentrifft. Sind nun die beiden Punkte auf dem Nonius eingestellt, so fällt die Nadelspitze auf den Nullpunkt der Linie. Bei längern Linien ist noch eine Probe zu machen, ob der Maßstab in seiner ganzen Länge auch parallel mit der Linie liege. Diese bewerkstelligt man einfach dadurch, daß der Nonius nach der voraufgehenden Procedur längs des Maßstabes fortgeschoben wird, wobei man darauf achtet, ob die Inderstriche m und n beständig auf der Linie bleiben; ist dies nicht der Fall, so muß man die nöthigen Correcturen vornehmen.

Wie hiernach der Orthograph auf die aus dem Vermessungsmanual entnommenen Abscissen mittels der Nonien an ab oder cd, je nachdem man den Maßstab für 10° = 1″ oder für 20° = 1″ gebraucht, eingestellt wird, ist von selbst klar. Ist derselbe auf die Abscisse z. B. von 6°,4 rechts einzustellen, so schiebt man ihn vom Nullpunkte aus längs des Lineals rechts hin, bis der Nullpunkt des Nonius zwischen 6 und 7, und der Noniusstrich 4 mit dem Limbusstrich 10 zusammenfällt. Ebenso verfährt man links vom Nullpunkte.

Der Nonius für die Ordinaten ist so eingerichtet, daß man bei dem Maßstabe von 10° = 1″ die Ordinaten unterhalb und oberhalb der Messungslinie bis zu 6°, und bei dem Maßstabe von 20° = 1″ bis zu 12° auftragen kann. Z. B. die Ordinate 1°,7 soll nach oben abgesetzt werden, so fährt man mit dem Schlitten vom Nullpunkte des Limbus aufwärts, bis der Nullpunkt des Nonius noch über 1° hinaus zu liegen kommt und stellt unterhalb des Nullpunktes den Nonienstrich 3 auf den Limbusstrich 1 ein. Oder man wollte unterhalb der Messungslinie 5°,8 abtragen, so geht man mit dem Schlitten und dem Nullpunkte des Nonius noch unterhalb 5° des Limbus, bis der Noniusstrich 2 oberhalb 0 mit dem Limbustheilstrich 4 unter dem Nullpunkte des Limbus zusammenfällt. Denn hätte man den Inder auf 5 des Limbus gesetzt, so würde der Theilstrich 2 des Nonius um 0,2 vom Limbusstrich 3 abweichen; also um 0,8 vom Limbusstrich 4; bringt man also nun 2 des Nonius mit 4 des Limbus zusammen, so muß der Inder um 0,8 von 5 abweichen, oder 5,8 anzeigen.

Herr Kammercommissär Pelz hat vielfache Versuche über die Zeitersparung mittels des Orthographen im Gegensatz gegen das Abtragen mit dem Zirkel angestellt und gefunden, daß man damit $\frac{1}{3}$ der Zeit erspart: wozu man mit dem Zirkel 3 Stunden gebraucht, das macht man mit dem Orthographen in 2. Ueberdies fällt die Arbeit genauer und netter aus, da das Papier nicht so sehr wie mit der Zirkelspitze zerstochen wird; die Nadel macht eine Marke, die man eben sehen kann, ohne die Stelle zu verunzieren.

III.

Preisverzeichniss
geodätischer Instrumente.

Um die Leser dieses Buchs in den Stand zu setzen, beim Anschaffen geodätischer Instrumente eine ihren Bedürfnissen und Mitteln angemessene Auswahl zu treffen, stelle ich im Folgenden einen Auszug aus den Preiscourants der für geodätische Instrumente vorzüglichsten Werkstätten Deutschlands geordnet zusammen. Die hierbei berücksichtigten Werkstätten sind:

Breithaupt & Sohn in Kassel,
Ertel & Sohn in München,
Lüttig in Berlin,
Meyerstein in Göttingen,
Poller in Leipzig,

und sind diese in dem Verzeichniß stets mit den Anfangsbuchstaben der Namen bezeichnet.

I. Instrumente zur Distanzmessung.

B. Meßkette mit messingenen Handringen und Kloben, die Ruthe zu	1 Thlr.	15 Sgr.
E. Meßkette, 50, 100 Fuß lang, / 8½, 16 Thlr.		
L. Meßkette, 5 Ruthen lang	7 »	15 »
10 eiserne Markirpflöcke	1 »	— »
2 eichene Kettenstäbe	2 »	— »
M. Comparateur zur Untersuchung von Längenmaßen, mit 2 Mikrometer-Mikroskopen	140 »	— »
M. Comparateur mit einem Reißerwerk, um Normalmaße überzutragen	160 »	— »
M. Längentheilmaschine mit einer 650mm langen Schraube . . .	80 »	— »

II. Instrumente zum Abstecken bestimmter Winkel.

B. Winkelkopf von Messing, 2¼″ Durchmesser	4 »	— »
B. Winkelkopf von 3¼″ Durchmesser mit Horizontalkreis von 4½″ Durchmesser, womit jeder Winkel mittels eines Nonius bis auf 1 Minute abzulesen	12 »	15 »

B. Stativ dazu	3 Rℓ.	15 Sgr.
B. Wird statt des Winkelkopfs ein kleiner Aufsatz mit 7zölligem, achromatischem Fernrohr auf dem Horizontalkreise angebracht	20 »	— »
E. Großer Winkelspiegel mit geschliffenen Spiegeln	9 fl	— xr
E. Kleinerer Winkelspiegel	4 »	30 »
E. Winkelspiegel mit gewöhnlichen Spiegeln	3 »	30 »
E. Winkelspiegel mit Rohr	8 »	— »
L. Winkelkreuz von Messing, 2¾″ Durchmesser	4 Rℓ.	— Sgr.
L. Winkelkreuz von 3¼″ Durchmesser mit getheiltem Kreis und Nonius, der die Winkel zu 10 Minuten angibt, nebst Mikrometerschraube	12 »	— »
L. Dasselbe mit Boussole, Libelle und Nuß	22 »	20 »
L. Ein kleines Stativ hierzu	5 »	— »
L. Winkelspiegel	3 »	— »

III. Meßtischapparate.

B. Eine verbesserte Meßtischvorrichtung mit 3 Stellschrauben und einer Mikrometerschraube; das Blatt kann horizontal um 3 Zoll verschoben werden; mit Stativ	42 »	— »
B. Eine dergleichen, bei welcher die Stellschrauben nicht zur Unterstützung dienen	43 »	— »
B. Dieselbe ohne Stellschrauben	32 »	— »
B. Nuß mit simpler Horizontaldrehung und Stativ zu einem Meßtischapparat	10 »	— »
B. Dieselbe mit Schraube ohne Ende und Stativ	12 »	— »
B. Nuß mit Horizontaldrehung und Schraube ohne Ende zu einem Blatt von 18″ Q. mit Stativ	16 »	— »
B. Dieselbe mit Stellschrauben	20 »	— »
E. Meßtischstativ nach neuester Construction. Das Tischblatt läßt sich kreisförmig in dem Rande einer metallenen Schale drehen, gegen welche die 3 Verticalschrauben drücken, und hat eine Mikrometerschraube	55 fl	— xr
E. Dasselbe kleiner, sonst ebenso	40 »	— »
L. Ein Meßtisch nach Lehmann mit Mikrometerschraube	30 Rℓ.	— Sgr.
L. Ein Meßtisch nach Reichenbach, auf 3 Stellschrauben, mit Mikrometerbewegung . . . 50 —	70 »	— »
M. Meßtisch nach Reichenbach	27 »	— »
P. Meßtisch, die Nuß mit Rad ohne Ende	34 »	— »
P. Ein Meßtisch neuester Construction, die Nuß mit Mikrometerschraube und feiner, durch 3 Schrauben bewirkter Horizontalstellung	34 »	— »
P. Meßtisch mit einfacher Kugelnuß	20 »	15 »
P. Ein münchener Meßtisch mit Schraube ohne Ende	48 »	— »
B. Regel mit Diopteru, 12—14″ lang	4 »	— »
B. Dieselbe, 18″ lang	8 »	— »
B. Dieselbe mit Dioptern zum Umlegen	15 »	— »
L. Diopterlineal, 18″ lang	16 »	— »

E. Diopterlineal von 2 Fuß Länge	44 fl.	— kr.
P. Diopterlineal von 20″ Länge mit Charnierdioptern zum Vor- und Rückwärtsvisiren	15 Thlr.	— Sgr.
P. Dasselbe mit feststehenden Diopteru	12 »	— »
P. Dasselbe mit Tangententheilung	18 »	— »
B. Kippregel mit Aufsatz und Fernrohr	18 »	— »
B. Dieselbe mit Gradbogen und Nonius	24 »	— »
B. Dieselbe von 22″ Länge mit Aufsatz und Fernrohr ohne Gradbogen	24 »	— »
B. Dieselbe mit Gradbogen und Nonius	30 »	— »
B. Dieselbe mit Libelle auf dem Fernrohr	35 »	— »
B. Dieselbe mit Mikrometerschraube am Gradbogen	40 »	— »
B. Dieselbe mit Höhenkreis, Fernrohr zum Durchschlagen	42 »	· »
E. Kippregel mit einem einfachen Fernrohr, Diopter, Gradbogen und Lineal	55 fl.	— kr.
E. Dieselbe mit achromatischem Fernrohr von 10‴ Oeffnung und 13″ Brennweite	75 »	— »
L. Kippregel mit 10zölligem achromatischen Fernrohr	30 Thlr.	— Sgr.
M. Kippregel mit einem Fernrohr von 25mm Oeffnung und 250mm Brennweite	40 »	— »
P. Kippregel mit Fernrohr zum Umschlagen und Halbkreis, Ocular fest, Objectiv beweglich	32 »	— »
P. Kippregel mit Aufsatz und Fernrohr	25 »	— »
B. Runde Libelle von 2″ Durchmesser	2 »	— »
B. Dieselbe von 1½″ Durchmesser	1 »	15 »
B. Cylinderlibelle mit Correction	5 »	— »
B. Dieselbe auf einem Lineal von 20″ Länge	6 »	— »
E. Meßtischlibelle mit Correctionsschraube	5 fl.	24 kr.
E. Libelle, 6″ lang, mit Correctionsschraube	9 »	— »
E. Dieselbe, 10″ lang	15 »	— »
L. Dosenniveau von 2—3″ Durchmesser	2 — 3 Thlr.	— Sgr.
P. Dosenlibelle von 2″ Durchmesser	3 »	15 »
P. Cylinderlibelle mit Mikrometerschraube	6 »	— »
B. Einlothgabel	— »	20 »
B. Dieselbe, bis zur Mitte des Tisches reichend	1 »	25 »
B. Pendel mit Gegengewicht	1 »	25 »
B. Dasselbe einfach	— »	25 »

IV. Boussolen.

B. Eine Boussole, Nadel 5″ lang, Hütchen von Karneol, der Ring in ⅓-Grade getheilt, das achromatische Fernrohr umzulegen	36 Thlr.	— Sgr.
B. Eine zu obiger Boussole neu construirte Vorrichtung mit 3 Stellschrauben, die Horizontaldrehung mit Mikrometerschraube; nach Erforderniß eine Meßtischplatte darauf anzubringen	20 »	— »

B. Hierzu Stativ nach Reichenbach	7 Rt.	— Sgr.
B. Dieselbe, das Fernrohr mit Diopteru	64 »	— »
B. Dieselbe mit Gradbogen nebst Nonius von 1 Minute Angabe	68 »	15 »
B. Dieselbe mit Cylinderlibelle, Justir- und Mikrometerschraube, wodurch der Apparat zum Nivellirinstrument wird	78 »	15 »
B. Ein Boussolenapparat, Nadel von 5″ Länge, Horizontalkreis in ⅓-Grade getheilt; das achromatische Fernrohr zum Umlegen, von 25maliger Vergrößerung; Verticalkreis in ½-Grade getheilt, mit Mikrometerschraube und Nonius, der 1 Minute angibt; auf dem Fernrohr eine Cylinderlibelle mit Correctionsschraube. Der Apparat kann zugleich als Verticalwinkelmesser und Nivellirinstrument benutzt werden	80 »	— »
B. Taschenboussole in Uhrform, der Ring in ganze Grade getheilt	6 »	20 »
E. Boussole mit beweglichem Diopter, die Nadel 4″ lang	40 fl.	— Xr.
E. Boussole mit 4zölliger Nadel und Diopter	25 »	— »
E. Dieselbe ohne Diopter	13 »	— »
E. Taschenboussole, Nadel von 2″ Länge	9 »	— »
E. Boussole in länglicher Form, mit messingener Platte und hölzernem Gehäuse	8 »	— »
L. Boussole mit 2 achromatischen Fernröhren an einer Achse	80 Rt.	— Sgr.
L. Boussole mit einem achromatischen Fernrohr und kleinen Dioptern	70 »	— »
L. Boussole mit einem durchzuschlagenden gebrochenen Fernrohr und Dioptern; Horizontal- und Verticalbewegung mit Mikrometerschrauben; der Nonius des Höhenkreises gibt die Winkel auf 1 Minute an	85 »	— »
L. Diopterboussole mit Mikrometer- und Keilschraube	60 »	— »
Sämmtliche Boussolen haben im Ring einen Durchmesser von 6″ und die Nadeln laufen auf Achat.		
P. Eine kleine Boussole, der Ring in ½- oder ⅓-Grade getheilt, die Magnetnadel 4¼″ lang, Hütchen von Achat, Charnierdiopter zum Vor- und Rückwärtsvisiren, 12½″ von einander entfernt . . . 30 —	35 »	— »
P. Eine Boussole, der Limbus in ¼-Grade getheilt, die Nadel 5½″ lang, Hütchen von Achat; die Nuß nach eigener Erfindung; Entfernung der Charnierdiopter 17″	50 »	— »
P. Dieselbe größer und mit 4 Dioptern	68 »	— »
P. Eine Boussole derselben Art, ohne Diopter, aber mit Visirrohr und Dosenlibelle	56 »	— »
P. Dieselbe mit Fernrohr	65 »	— »
P. Eine desgleichen mit Höhenmesser nebst Nonius und Fernrohr mit Cylinderlibelle, die Winkel auf 1 Minute bestimmbar, das Stativ auch zum Meßtisch zu verwenden, mit Planchette	98 »	— »
Ohne Planchette	95 »	— »
P. Eine Boussole, länglich viereckig, Nadel 5½″ lang	7 »	— »
P. Taschenboussole in Uhrform . . . 1 Rt. 10 Sgr. —	8 »	— »

V. Astrolabium.

E. Astrolabium mit einem Kreis von 7″ Durchmesser, mittels zweier diametralen Nonien von Minute zu Minute getheilt, mit 4 Diooptern, einer Boussole und einer Libelle auf der Alhidade; mit Stativ	90 Rℓ	—	Nℓ
E. Astrolabium wie das vorige, aber mit Fernrohr von 9‴ Oeffnung und 10″ Brennweite	100 »	—	»

VI. Theodoliten.

B. Ein 4½zölliger auf messingenem Dreifuß ruhender Compensationstheodolit, mit achromatischem Fernrohr von 8″ Länge. Der versilberte Limbus des Kreises ist in ½-Grade, und die 2 Nonien der Alhidade sind zu einzelnen Minuten getheilt. Fernrohr zum Umschlagen, an der Achse desselben ein Verticalkreis mit doppeltem Nonius	63 Rℓ	—	Sgr.
B. Derselbe mit 2 Lupen und Blenden . . . mehr	8 »	—	»
B. Derselbe, aber das Fernrohr mit Cylinderlibelle, der Höhenkreis mit Mikrometerschraube, wo dann der Theodolit auch als Nivellirinstrument gebraucht werden kann . . . mehr	10 »	—	»
B. Ein dergleichen Compensationstheodolit von 5½″ Durchmesser mit silbernem Limbus und beweglichen Lupen. Das achromatische Fernrohr hat eine 20malige Vergrößerung, 12″ Länge und 12‴ Oeffnung	100 »	—	»
B. Derselbe Theodolit von 7½″ Durchmesser, in ⅓-Grade getheilt, die Nonien ½ Minuten angebend, mit einem Fernrohr von 14—15″ Länge, dessen Achromat 14‴ Oeffnung und eine 25malige Vergrößerung hat. Der Verticalkreis mit Nonius hat 5″ Durchmesser	126 »	—	»
B. Derselbe zum fortgesetzten Repetiren eingerichtet	142 »	—	»
B. Derselbe mit höhern Trägern und 16zölligem Fernrohr, mit einem Achromat von 15‴ Oeffnung	147 »	—	»
B. Derselbe, wo auch der Limbus und Nonius des Verticalkreises von Silber	152 »	—	»
B. Derselbe, die Nonien des Horizontalkreises von 20 zu 20 Secunden getheilt	157 »	15	»

Noch andere, ähnliche Theodoliten zur Repetition eingerichtet, liefert die Breithaupt'sche Werkstatt mit Horizontalkreis von 8, 10, 12″ Durchmesser und dem angemessener übriger Vollendung zu den Preisen von 183, 200 und 350 Rℓ. Ein Versicherungsfernrohr steigert den Preis noch um weitere 25—30 Rℓ.

Außerdem construirt Herr Breithaupt noch ein combinirtes Winkelmeßinstrument, das aus einem Theodoliten, einem Nivellir-, Boussolen- und Meßtischapparat besteht. Der Horizontalkreis hat 7, der Höhenkreis 4″ Durchmesser, das Fernrohr 13″ Länge, 13‴ Oeffnung und 25malige Vergrößerung; der Kreis ist in ⅓-Grade getheilt und mit 2 Nonien von 30 Secunden Angabe versehen. Der Theodolit kostet	130 »	—	»

Die Einrichtung zum Nivellirinstrument	10 Thlr. — Sgr.
Der Boussolenapparat mit 5zölliger Nadel	22 » — »
Der Meßtischapparat	11 » — »

Das Ganze kostet also 173 Thlr., während die vier einzelnen Apparate zusammen 300 Thlr. kosten würden.

E.	Terrestrischer Multiplications-Theodolit, mit einem Horizontalkreise von 6″, und einem Höhenkreise von 4″ 5‴ Durchmesser, beide auf silbernem Limbus, der erste durch 4 Nonien von 10 zu 10 Secunden, der letzte mittels eines Nonius von Minute zu Minute getheilt. Das Fernrohr hat ein achromatisches Objectiv von 10″ Brennweite und 10‴ Oeffnung, ein astronomisches Ocular und ein Sonnenglas. Das Instrument, zugleich zum Nivelliren brauchbar, hat 2 Libellen	300 Thlr. — Sgr.
E.	Terrestrischer Theodolit, mit einem Horizontalkreise von 6″, und einem Höhenkreise von 4″ 5‴ Durchmesser, beide auf silbernem Limbus, der erste durch 2 Nonien, der andere durch einen Nonius von Minute zu Minute getheilt, und 2 Fernröhren, deren achromatische Objective 10″ Brennweite und 10‴ Oeffnung haben	250 » — »
E.	Dasselbe ohne Versicherungsfernrohr	225 » — »

Die übrigen Ertel'schen Theodoliten steigen im Preise von 400 bis zu 1500 Thlr. und sind eigentlich nur für größere Landesvermessungen bestimmt.

L.	Theodolit mit 7zölligem Horizontalkreis, durch 4 Nonien 10 Secunden angebend; Theilung verdeckt und durch Glasplatten geschützt; der 4zöllige Höhenkreis gibt mit einem Nonius die Winkel zu 30 Secunden an. Die Röhrenlibelle auf dem Fernrohr macht das Instrument zum Nivelliren brauchbar. Fernrohr zum Durchschlagen	170 Thlr. — Sgr.
L.	Ein Theodolit mit 6½zölligem Horizontalkreis, mit 2 Nonien, die 30 Secunden angeben, der 4zöllige Höhenkreis mit 1 Nonius von 1 Minute Angabe	140 » — »
L.	Derselbe, aber das Fernrohr nicht zum Durchschlagen und mit Dosenlibelle	120 » — »
L.	Derselbe, mit einer Boussole verbunden	140 » — »
L.	Ein Theodolit mit 5zölligem Horizontalkreis mit 2 einzelne Minuten angebenden Nonien	90 » — »
M.	Theodolit ohne Repetition; Radius des silbernen Limbus des Azimuthal-, sowie des Verticalkreises 55^{mm}; die Nonien geben an jenem 20 Secunden, an diesem einzelne Minuten an. Oeffnung des Fernrohrs 18^{mm}, Brennweite 160^{mm}, mit prismatischem Ocular und einem Sonnenglas	90 » — »
M.	Repetitionstheodolit. Radius des silbernen Limbus 85^{mm}; die Theilung des Azimuthalkreises ist mittels der Nonien in 10 Secunden, die des Verticalkreises in 20 Secunden. Oeffnung des Fernrohrs 25^{mm}, Brennweite 250^{mm}	160 » — »

VII. Reflexionsinstrumente.

B.	Ein Spiegelsextant, 9″ Radius, auf Silber getheilt, doppelte correspondirende Nonien, 10 Secunden angebend	90 Rℓ.	— Sgr.
B.	Derselbe von 7″ Radius	80 »	— »
B.	Ein dergleichen von 5″ Radius, 20 Secunden angebend	50 »	— »
B.	Ein dergleichen von 4″ Radius, mit 20 Secunden Angabe, ohne Farbengläser, aber mit Blendglas zur Sonnenbeobachtung	32 »	— »
B.	Ein Spiegelsextant einfacher Art von 7″ Radius, mit Fernrohr und Nonius von 30 Secunden Angabe	32 »	— »
B.	Ein dergleichen von 5″ Radius, Noniusangabe 1 Minute	24 »	— »
B.	Derselbe ohne Fernrohr	20 »	— »
B.	Ein Dosensextant mit Fernrohr und Farbengläsern	24 »	— »
B.	Derselbe ohne Fernrohr, dagegen mit der Einrichtung, daß die Winkel nicht erst auf den Horizont reducirt zu werden brauchen	15 »	— »
B.	Zu demselben ein Stockstativ mit Nuß	9 »	— »
B.	Dasselbe von einfacherer Construction	5 »	— »
B.	Ein künstlicher Horizont mit Niveau und Planglas, Untergestell von Biscuit	22 »	— »
B.	Ein angequickter Quecksilberhorizont	7 »	— »
E.	Spiegelsextant von 6″ Radius, mittels eines Nonius 10 Secunden angebend und mit einem Fernrohr von 7‴ Oeffnung, 5″ Brennweite und astronomischem Ocular; für jedes der beiden Bilder 3 Sonnengläser verschiedener Helligkeit; diese, sowie beide Spiegel sind plan-parallel	180 fl.	— Xr.
E.	Spiegelsextant ohne Fernrohr, zur Messung aller Winkel bis zu 180° und zur Absteckung von Curven auf dem Felde	30 »	— »
M.	Spiegelsextant, Radius 160^{mm}	80 Rℓ.	— Sgr.
M.	Desgleichen, Radius 130^{mm}	70 »	— »
M.	Desgleichen, Radius 100^{mm}	50 »	— »

VIII. Nivellirinstrumente.

B.	Das Ertel'sche Nivellirinstrument, durch einige wesentliche Verbesserungen vervollkommnet; 20zölliges achromatisches Fernrohr mit 35maliger Vergrößerung	170 Rℓ.	— Sgr.
B.	Dasselbe ohne Horizontalkreis und ohne Mikrometerstellung	136 »	— »
B.	Dasselbe auch ohne Verticalbogen	126 »	— »
B.	Nivellirinstrument neuerer Construction, auf messingenem Dreifuß ruhend, Fernrohr 20″ lang, von 18‴ Oeffnung und 35maliger Vergrößerung, zum Umlegen. Die ausgeschliffene Röhrenlibelle gibt bei einer Linie Ausschlag 5 Secunden an. Der Verticalbogen hat 8″ Radius, der Horizontalkreis 7″ Durchmesser, beide sind in 1/6-Grade getheilt und geben mittels der Nonien 10 Secunden an	190 »	— »
B.	Dasselbe ohne Horizontalkreis	160 »	— »
B.	Dasselbe kleiner mit Horizontalkreis und Verticalbogen, Fernrohr 16″ lang, 16‴ Oeffnung und 30malige Vergrößerung	150 »	— »

B. Dasselbe ohne Horizontalkreis	120 Rt.	—	Sgr.
B. Dasselbe, wenn beide Kreise fehlen	83 »	—	»
B. Ein vollständiges Nivellirinstrument von einfacherer Einrichtung	116 »	—	»
B. Einfachere Formen desselben . . . 83 und	68 »	—	»
B. Ein kleines Nivellirinstrument mit achromatischem Fernrohr für Distanzen bis zu 300 Fuß	32 »	15	»
B. Ein landwirthschaftliches Nivellirinstrument mit Diopterrohr	19 »	—	»
B. Ein vollständiger Architekten-Meßapparat, bestehend aus einem Nivellir-, Boussolen- und Mensulapparat	75 »	10	»
E. Nivellirinstrument mit einem Horizontalkreis von 6″ Durchmesser und einem Höhengradbogen von 3″ Halbmesser, beide auf silbernem Limbus, der erste durch 2 Nonien von 10 zu 10 Secunden, der andere mittels eines Nonius von Minute zu Minute getheilt. Das Objectiv des Fernrohrs hat 18″ Brennweite und 17‴ Oeffnung. Libelle zum Aufsetzen auf das Fernrohr	325 fl.	—	kr.
E. Dasselbe ohne Horizontalkreis	250 »	—	»
E. Ein Nivellirinstrument mit einem Horizontalkreis von 5″ Durchmesser und einem Höhengradbogen von 2″ 3‴ Halbmesser. Fernrohr 13″ Brennweite und 13‴ Oeffnung	250 »	—	»
E. Dasselbe ohne Horizontalkreis	160 »	—	»
E. Nivellirinstrument mit einem Horizontalkreis von 5″ Durchmesser, auf silbernem Limbus mittels 2 Nonien von Minute zu Minute getheilt; Fernrohr 13″ Brennweite und 13‴ Oeffnung	200 »	—	»
E. Dasselbe ohne Horizontalkreis	142 »	—	»
E. Kleines Nivellirinstrument ohne Horizontalkreis, aber mit einem Höhengradbogen. Fernrohr 10″ Brennweite und 10‴ Oeffnung, mit Mikrometerbewegung	130 »	—	»
E. Dasselbe ohne Höhengradbogen	120 »	—	»
E. Dasselbe ohne horizontale Mikrometerbewegung	112 »	—	»
E. Einfaches Nivellirinstrument ohne Fernrohr mit Dioptern in 13″ Entfernung	55 »	—	»
E. Dasselbe noch kleiner	30 »	—	»
L. Ein großes Nivellirinstrument mit 16zölligem achromatischen Fernrohr von 30maliger Vergrößerung, welches in seinen Lagern umgelegt und um die Achse gedreht werden kann. Die Libelle gibt bei einer Linie Ausschlag 4—6 Secunden an; der 5zöllige mit Silber ausgelegte Horizontalkreis gibt durch 2 Nonien die Winkel bis auf 30 Secunden an	160 Rt.	—	Sgr.
L. Ein Nivellirinstrument mit 13zölligem achromatischen Fernrohr von 18maliger Vergrößerung zum Umlegen und Drehen in den Lagern. Die Libelle gibt bei 1 par. Linie Ausschlag 10 Secunden an, der Horizontalkreis mittels des Nonius die Winkel zu 1 Minute	110 »	—	»
L. Dasselbe mit 11zölligem Fernrohr	90 »	—	»

L.	Ein Nivellirinstrument mit 13zölligem achromatischen Fernrohr und geschliffener Röhrenlibelle, beide in fester Verbindung mit dem Instrument, auf Dreifuß mit 3 Stellschrauben		60 Rg.	— Sgr.
L.	Ein Nivellirinstrument mit 11zölligem achromatischen Fernrohr und geschliffener Röhrenlibelle, welche auf die par. Linie Ausschlag 30 Secunden anzeigt. Fernrohr und Libelle in fester Verbindung mit dem Instrumente. Besonders für den Eisenbahn-, Kanal- und Chausseebau geeignet		40 »	— »
L.	Ein Nivellirinstrument mit 9zölligem achromatischen Fernrohr, unter welchem sich die Röhrenlibelle mit Correctionsschraube befindet; für landwirthschaftliche Zwecke		34 »	— »
M.	Nivellirinstrument nach Reichenbach, mit einem Azimuthalkreise von 70^{mm} Radius. Der silberne Limbus ist durch die Nonien in einzelne Minuten getheilt. Die Ablesung mittels eines Nonius 10 Sec. Oeffnung des Fernrohrs 36^{mm}, Brennweite 430^{mm}		150 »	— »
M.	Nivellirinstrument ohne Verticalkreis		100 »	— »
M.	Desgleichen ohne Azimuthalkreis		60 »	— »
M.	Desgleichen nach Stampfer		100 »	— »
M.	Desgleichen nach Stampfer, kleiner		60 »	— »
B.	Nivellirlatte mit Tableau, ausgeschoben 18′ lang, auf der $^1/_{100}$′ abzulesen		19 »	— »
B.	Dieselbe mit einem zweiten Tableau, für hohen und niedern Visirstand		24 »	— »
B.	Eine 7½ Fuß hohe Nivellirlatte mit eisernem Fuß und 2 Tableaux, welche letztere auf einem in der Latte verschiebbaren Prisma befestigt sind		16 »	25 »
B.	Nivellirlatte nach Angabe des kurhessischen Bauraths Rudolph		15 »	5 »
B.	Nivellirlatte von 8—10 Fuß Höhe, ohne verschiebbares Tableau, die 0,05 Fuß abzulesen gestattet		7 »	— »
B.	Dieselbe von 15 Fuß Länge		9 »	15 »
B.	Dieselbe aus 3 Stücken zum Zusammenlegen		15 »	— »
B.	Dieselbe aus 4 Stücken		20 »	— »
L.	Nivellirlatte mit Tafel, ausgeschoben 13 Fuß lang und auf $^1/_{10}$″ abzulesen		8 »	— »
L.	Desgleichen zum directen Ablesen 8 oder 10 Fuß lang	7 —	10 »	— »
P.	Nivellirlatte, je nach der Eintheilung	8 —	10 »	— »
P.	Dieselbe mit verschiebbarem Tableau		12 »	— »
L.	Kanalwage		32 »	— »
P.	Ein Quecksilberniveau		10 »	— »
P.	Dieselbe mit Nuß zur Horizontal- und Verticalbewegung, Stativ und Schraubzwingen		28 »	— »
P.	Ein Stativ	5 —	7 »	— »

37 *

IX. Instrumente zum Zeichnen und Auftragen.

B.	Transporteur von 4″ Durchmesser, in ganze Grade getheilt		1 Thlr.	10 Sgr.
B.	Derselbe in halbe Grade getheilt		2 »	— »
B.	Derselbe von 4½″ Durchmesser mit gravirten Ziffern		2 »	15 »
B.	Derselbe von 5″ Durchmesser		3 »	— »
B.	Derselbe in ⅓-Grade getheilt		3 »	15 »
B.	Derselbe von 6″ Durchmesser in halbe Grade getheilt		3 »	15 »
B.	Derselbe in ⅓-Grade getheilt		4 »	— »
B.	Derselbe in ¼-Grade getheilt		4 »	15 »
B.	Boussolen-Transporteur von 7—8″ Durchmesser in ⅓-Grade getheilt		5 »	20 »
B.	Derselbe in ¼-Grade getheilt		6 »	20 »
B.	Derselbe mit Nonius für einzelne Minuten		9 »	— »
B.	Derselbe von 8—9″ Durchmesser mit beweglicher Regel und Nonius für einzelne Minuten		14 »	— »
B.	Derselbe als ganzer Kreis von 7—8″ Durchmesser		20 »	— »
E.	Transporteur, kreisförmiger, mit silbernem Limbus, 7″ Durchmesser, mittels eines Nonius einzelne Minuten angebend, mit Mikrometerschraube		55 Thlr.	— Ngr.
E.	Derselbe ohne Mikrometerschraube und auf Messing getheilt		44 »	— »
E.	Transporteur, Halbkreis 6—5″ Durchmesser, in halbe Grade getheilt	7 —	6 »	— »
E.	Derselbe 4″ Durchmesser, in ganze Grade getheilt		3 »	— »
L.	Transporteur, Vollkreis mit 2 Nonien, Theilung auf Silber, eine Minute angebend		30 Thlr.	— Sgr.
L.	Alhidaden-Transporteur, auf der 12zölligen Platte 4 Maßstäbe, mit Nonius für einzelne Minuten		22 »	20 »
L.	Derselbe kleiner und ohne Maßstäbe		18 »	— »
L.	Boussolen-Transporteur von 8″ Durchmesser mit 6 Maßstäben		13 »	15 »
L.	Derselbe von 7½″ Durchmesser		12 »	— »
L.	Transporteur, Halbkreis von 7½—9½″ Durchmesser	6 —	10 »	— »
L.	Kleine Transporteure	1 —	3 »	— »
B.	Lineal von Messing, 8″ lang, mit einem verjüngten Maßstab		— »	25 »
B.	Dasselbe mit 2 Maßstäben		1 »	10 »
B.	Dasselbe mit gravirten Ziffern		2 »	— »
B.	Dasselbe mit 4 Maßstäben		3 »	20 »
B.	Dasselbe 1 Fuß lang		5 »	— »

B. Eisernes Lineal 6, 4, 3 Fuß lang,
3, 3, 2½ Zoll breit,
18, 12, 8 Thlr.

B. Eisernes Dreieck:

18 u. 14,	12 u. 9 Zoll,	2 u. 1½,	2⅓ u. 2 F. Kathetenlänge,
10,	8,	16,	20 Thlr.

E. Lineal von Stahl mit 2 Messingköpfen:

60,	57,	54,	51,	48,	45,	42,	39,	36,	33,	30,	27,	24 Z. lang,
30,	28,	26,	24,	22,	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6 Thlr.

E. Winkel von Stahl	3 — 25 fl.	— kr.
L. Eiserne Lineale 3, 3, 4, 5, 6 Fuß lang, / 5, 7, 10, 14, 18 Thlr.		
L. Eiserne Dreiecke	4 — 10 Thlr.	— Sgr.
P. Eiserne Lineale, lackirt $1\frac{1}{2}$ — 3 Fuß lang	1 — 3 »	— »
P. Eiserne Winkel, lackirt	2 — 3 »	— »
B. Stangenzirkel von Holz, 2—3 Fuß lang, mit 2 messingenen Schiebern und Stahlspitzen	3 »	15 »
B. Derselbe mit Mikrometerschraube	6 »	— »
B. Derselbe mit Einsatzbleihülse und Reißfeder	7 »	10 »
B. Stangenzirkel aus einer messingenen Röhre von 2 Fuß Länge mit Mikrometerschraube und einer Justirschraube zur Berichtigung der Spitzen, mit Eintheilung und Nonius zu $\frac{1}{10}$ Linie	28 »	— »
E. Stangenzirkel von 3 Fuß Länge, aus einem getheilten Messingrohr, mit Theilung und Nonius	55 fl.	— kr.
E. Stangenzirkel mit hölzerner Stange und Mikrometerschraube 3—4, 2—3 Fuß lang, / 16, 15 fl.		
E. Letzterer mit Stahlstange	20 »	— »
E. Stangenzirkel aus einem Messingrohr von 18″ Länge, mit sanfter Einstellung, Bleirohr und Nadeleinsatz	13 »	— »
L. Ein kleiner Stangenzirkel mit Metallstange, $1\frac{1}{2}$ Fuß lang mit Mikrometerschraube und Ziehfeder-Einsatz	6 Thlr.	— Sgr.
L. Ein großer Stangenzirkel mit hölzerner prismatischer Stange, Theilung, Mikrometerschraube, Ziehfeder und Bleirohr	10 — 16 »	— »
P. Stangenzirkel von Holz, 3—4′ lang mit Mikrometerschraube und Zubehör	6 »	— »
P. Derselbe, ebenso lang, sonst größer und stärker	6 »	15 »
P. Derselbe von 16″ Länge	5 »	— »
E. Maßstab, 1 Fuß lang, achterlei Maße mit Transversalen enthaltend	40 fl.	— kr.
E. Derselbe mit 4 Maßen	30 »	— »
E. Maßstab von der Länge eines Fußes, in 2500 und 5000 Theile getheilt, an 4 Enden transversal	11 »	— »
E. Derselbe, an 2 Enden transversal	10 »	— »
E. Maßstab von 1 bair., rheinl., engl. oder par. Fuß in 1440 oder 1000 Theile getheilt	6 »	— »
E. Derselbe auf beiden Seiten getheilt, an 4 Enden transversal	8 »	30 »
E. Derselbe an 2 Enden transversal	7 »	— »
E. Maßstab, $\frac{1}{2}$ Fuß lang in 2500 und 5000 Theile getheilt, an 4 Enden transversal	5 »	30 »
E. Derselbe, an 2 Enden transversal	4 »	30 »
E. Maßstab, prismatischer, von Messing, 1 Fuß lang, auf 2 Seiten in 1000 oder 1200 Theile getheilt, wenn die ganze Länge fein getheilt	8 »	— »

E. Derselbe, $\frac{1}{2}$ Fuß lang	5 Thlr.	—	Ngr.
E. Derselbe, wenn nur 1 Zoll auf jeder Seite fein getheilt	4 »	—	»
E. Hölzerne Maßstäbe . . . von $1\frac{1}{3}$ —	3 »	—	»

L. Messingene, versilberte Maßstäbe,

a) mit einer Theilung $\frac{5,\ 8,\ 10''\ \text{dec. lang,}}{1\frac{1}{3},\ 1\frac{5}{6},\ 2\frac{1}{2}\ \text{Thlr.}}$

b) mit zwei Theilungen auf denselben Parallelen, $\frac{5,\ 8,\ 10''\ \text{dec. lang,}}{1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{2},\ 3\ \text{Thlr.}}$

c) mit zwei Theilungen auf verschiedenen Parallelen, $\frac{5,\ 8,\ 10''\ \text{dec. lang.}}{2,\ 2\frac{5}{6},\ 3\frac{2}{3}\ \text{Thlr.}}$

P. Ein Transversalmaßstab, worauf 6 oder 7 Zoll, und durch die Transversalen 1 Zoll in 100 oder 120 Theile getheilt	— Thlr.	20	Ngr.
P. Ein Geodätenmaßstab, wo ein dresdener Zoll = 15 Ruthen	1 »	—	»
P. Ein sächsischer Ruthenmaßstab, wo ein Ruthendecimalzoll in 20 oder 30 Theile — Ruthen — getheilt ist	1 »	15	»
P. Längere Maßstäbe dieser Art, die wie die vorigen auch nach preußischem Maß getheilt sein können	3 »	—	»
P. Ruthenmaßstab nach jedem gewünschten Maße, wo die Theilung auf einer versilberten Abschrägung aufgetragen ist, entweder 20er, 25er oder 30er, d. h. 20, 25 oder 30 Ruthen gehen auf einen Ruthenzoll, 200, 250, 300 auf einen Ruthenfuß	10 »	—	»
B. Stückzirkel, 4, 5—6″ lang	1 »	5	»
B. Einsatzreißfeder und Bleihülse	1 »	10	»
B. Stückzirkel mit doppelten Stahlbacken	1 »	15	»
B. Verlängerungseinsatz	— »	15	»
B. Einsatzbleirohr	— »	20	»
B. Einsatzreißfeder	— »	20	»
B. Dieselbe zum Aufklappen	1 »	—	»
B. Handzirkel	1 »	—	»
B. Derselbe mit Stahlbacken	1 »	10	»
B. Federzirkel	1 »	20	»
B. Haarzirkel	1 »	15	»
L. Stückzirkel mit Ziehfeder und Bleieinsatz	3 »	—	»
L. Handzirkel, 3—$5\frac{1}{2}$″ lang	1 »	5	»
L. Federzirkel mit Centralspitze	1 »	25	»
L. Verlängerungsstück mit Knie	1 »	—	»
L. Eine Centralspitze zum Aufsetzen auf die Stückzirkelspitze	1 »	—	»
L. Haarzirkel	1 »	25	»
L. Eine Ziehfeder à la Gärtner	1 »	—	»
L. Vollständige Reißzeuge . . . 6 —	18 »	—	»
P. Stückzirkel mit Einsätzen . . . $1\frac{1}{4}$ —	1 »	15	»

P. Handzirkel	20 — 25 Sgr.
P. Reißfeder	10 — 20 »
P. Reißfederzirkel für kleine Kreise	3 Rß. — »
P. Federzirkel mit Einsatz	3 » — »

Anmerkung. Die in diesem Verzeichniß bei den Ertel'schen Instrumenten aufgeführten Gulden wird man leicht auf Thaler, die übrigen erforderlichenfalls auf Gulden reduciren, da 7 Fl. = 4 Thlr. — Es konnte hier, der Raumersparniß halber, nur ein Auszug aus den verschiedenen Preisverzeichnissen gemacht werden; es werden aber die resp. Vorstände der hier genannten Werkstätten gern bereit sein, dem, der sich an sie wendet, die vollständigen Verzeichnisse einzuliefern.

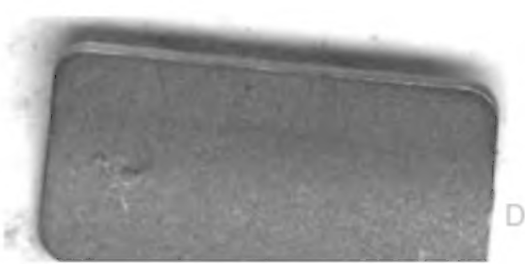
Xylographie und Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Berichtigungen.

Seite 34, Zeile 14 v. o., statt: $<$, lies: $>$
» 47, » 20 v. u., st.: x, l.: v
» 47, » 13 v. u., st.: w, l.: w_1
» 48, » 3 v. o., st.: $r_1 = \cos(\pi - v_1)$, l.: $r_1 \cdot \cos(\pi - v_1)$
» 132, » 9 und 10 v. o., st.: kg', l.: kh
» 132, » 10 und 11 v. o., st.: gk, l.: gg'

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google